論文審査の結果の要旨

氏　名　　　　　吉　田　建　一

有限表示群とは有限個の生成元とその間の有限個の関係式により定義される群である。応用上重要なコンパクトな空間の基本群は有限表示群となる。有限表示群 G の表示長 $T(G)$ は、群 G の表示 $\langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$ に対して、$\sum_{i=1}^{m} \max\{0, |r_i| - 2\}$ を考え、これの群の表示をすべてとったときの最小値として、Delzant により定義された。Delzant は、有限表示群とその有限個の部分群の組 $(G; C_1, \ldots, C_\ell)$ に対して、面が二角形または三角形となる Haefliger の意味の群複体である 2 次元の群の表示複体の三角形の個数の（表示複体をすべてとったときの）最小値として、相対表示長 $T(G; C_1, \ldots, C_\ell)$ も定義している。三次元双曲多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ に対しては、Cooper により、双曲体積が基本群の表示長の π 倍で上から評価されること $(\mathrm{vol}(M) < \pi \cdot T(\pi_1(M)))$ が示されていた。

論文提出者 吉田建一 は、表示長、相対表示長を、有限指数部分群において考え、それを指数で除したものの下限として安定表示長 $T_\infty(G)$, 安定相対表示長 $T_\infty(G; C_1, \ldots, C_\ell)$ を定義し、さらに多様体 M については、その基本群 $\pi_1(M)$, 境界 ∂M の基本群の像を用いて、安定表示長 $T_\infty(M)$, $T_\infty(M, \partial M)$ を定義した。

次に、この安定表示長について、その基本的な性質を明らかにした。すなわち、自由積に対し、加法性（$T_\infty(G_1 * G_2) = T_\infty(G_1) + T_\infty(G_2)$）が成り立つことを示した。このとき、自由積についての加法性は、多様体の連結和についての加法性であるが、3 次元既約多様体 M の JSJ 分解（トーラス分解）$M = M_1 \cup \cdots \cup M_k$ に対しても、加法性（$T_\infty(M) = T_\infty(M_1) + \cdots + T_\infty(M_k)$）が成立することを示した。また、3 次元 Seifert 多様体 M に対しては、$T_\infty(M) = T_\infty(M, \partial M) = 0$ を示した。

さらに、次の技術的に重要な定理を示した。

定理。 G が、その単位元以外の元に対しそれを含まない有限指数正規部分群を持つとする。C_1, ..., C_ℓ を階数 2 以上の自由アーベル群と同型な G の部分群とする。このとき、$T_\infty(G; C_1, \ldots, C_\ell) = T_\infty(G)$ が成立する。

論文提出者 吉田建一 は、この定理を用いて、特に、三次元双曲多様体 M に対し、体積の安定表示長による下からの評価 $(\exists K > 0,\ K \cdot T_\infty(\pi_1(M)) \leqq \mathrm{vol}(M))$ を与えた。以上の結果を組み合わせると、一般の 3 次元閉多様体 M に対し、安

定表示長と Gromov の単体体積は、ほぼ比例していること（$\exists K,\ K \cdot T_\infty(M) \leqq \|M\| \leqq (\pi/V_3)T_\infty(M)$, ここで $\|M\|$ は単体体積、V_3 は三次元双曲空間の理想正四面体の体積) が示されている。この評価が、論文の主要な結果である。

さらに、多様体 M に対し、Matveev により定義された complexity $c(M)$ の安定化 $c_\infty(M)$ が Francaviglia-Frigerio-Martelli により定義されているが、論文提出者 吉田建一 は、三次元双曲多様体 M に対し、$T_\infty(M) = c_\infty(M)/2$ が成り立つという予想を提示し、いくつかの双曲多様体について、$T_\infty(M)$, $c_\infty(M)$ の値が、この予想と矛盾しないことを計算している。

これらの論文提出者の結果は、基本的な概念の定義を与え、理論的にその意味を明らかにし、さらに必要な計算を行って、今後の研究の方向を示したもので、有限表示群の組み合わせ的理論と三次元多様体の基本群の理論において、重要な意味を持つものであり、この分野のこれからの研究の基礎となるものである。よって論文提出者 吉田建一 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。