論文審査の結果の要旨

氏　名　劉 逸侃

劉 逸侃は本学位請求論文において、 次の 2 種類の偏微分方程式に関して初期値・境界値問題などの解の存在や定性的な性質という順問題ならびに逆問題に関して数学解析および数値解析手法を考察した.

·相転移現象を記述する多重双曲型方程式.

·特異拡散現象を記述する複数個の非整数階時間微分項を持つ拡散方程式.

第一部において、相転移を研究した。これは 様々なプロセスで発生し、 考えている材料の特性を最終的に支配するものである. すでに Cahn により. 核生成率 $\Psi(x,t)$ と成長速度 $\rho(t)$ で相転移率 $u(x,t)$ を記述する「time cone モデル」があったが, 多重積分を含むため, 数学や数値手法が困難であったが、第一章では, 全ての奇数空間次元において, time cone モデルを同値な多重双曲型方程式に変形することに成功した. これは、time cone モデルの解析にとって極めて重要である. すなわち、この変形により、空間 3 次元までの場合に $u(x,t)$ を求める順問題については, 十分な精度を持つ効率的な数値解法を開発することができた.

第二章では, 1 次元 time cone モデルにおける成長速度 $\rho(t)$ を最終時刻の観測データから決定する逆問題を考察した. 前章で導出した定式化により, この逆問題を双曲型方程式の係数決定逆問題に帰着し, 解を安定化させる正則化方法を適用し, 数値解法の有効性を検証した.　第一章における time cone モデルの多重双曲型方程式への変形により、 核生成率 $\Psi(x,t)$ の再構成は波動源決定逆問題に帰着することが可能になった. 一方でそのような双曲型方程式の逆問題に特化した最適な数値解法はなかったので 第三章では, そのような逆問題の数値手法として, この逆問題を最小化問題へ帰着させ, 最小化関数が満たすべき変分方程式を調べ, 反復法によるアルゴリズムを提案した. このアルゴリズムの精度と効率を, 多くの数値実験によって実証した.

第四章では, 3 次元 time cone モデルにおいて, u の部分内部観測データから核生成率 Ψ の再構成について, 理論上の安定性及び数値解法を, 多重双曲型方程式に関する波動源決定逆問題の枠組みで確立した. 逆問題に対して大域的な Lipschitz 安定性を証明した. 一方, 数値計算については, 前章の準備を踏まえ, 最小化問題に関する反復法を導いた. 3 次元までの数値実験を行い, 計算性能を詳しく分析した.

さらに、本論文の第二部において非整数階微分方程式を考察した. 不均質媒質における拡散について, 古典的な拡散方程式が実験データを再現しない場合があることが知られており、そのような拡散現象は特異拡散現象とよばれ, モデルの候補として, Caputo

微分と呼ばれる非整数階の時間微分項の線型結合を持つ拡散方程式が注目を浴びている．このような方程式が，古典的な拡散方程式の特徴的な性質をどの程度満たすのか？が理論上の一つの焦点であり、この問題に関して新たな結果を得た．
第五章では，「強最大値原理」が，非整数階拡散方程式に対しても成り立つことを証明した．即ち，初期値と拡散源が非負かつ初期値が恒等的にゼロでない場合，非整数階拡散方程式の解がほぼ至る所で正であることを示した．この結果は既存の最大値原理を改良したものであり、応用として，汚染源決定逆問題の一意性を証明した．
第六章では，非整数階微分方程式の初期値・境界値問題の適切性および長時間での漸近挙動を考察した．第一に，方程式の厳密解はある特殊関数で記述されるので，その性質を調べ，解の存在，一意性，初期値及び拡散源に関する安定性を確立し，様々の評価を得た．特に，解の時刻 0 付近での特異性が、時間微分の最高階数に支配されることを証明した．第二に，Laplace 変換による関数論も用いた方法により，解の長時間での減衰率が最小の階数によって与えられることを証明し，更に収束率を求めた．
第七章では，前章の結果を踏まえ，非整数階微分方程式に対する数値手法の基礎となる半離散ならびに全離散の有限要素法（FEM）を構築した．前章で得られた評価の離散版を用いて，ほぼ最適な誤差評価を導き出した．最後に，証明した収束率を，空間 2 次元までの数値実験で確認した．
本研究では，相転移と特異拡散という二種類の重要な物理現象を出発点とし，既存の物理モデル或いは定式化に囚われず，それぞれの現象を記述する新規性の強い偏微分方程式を研究対象とした．したがって、本論文は先行研究がほとんどない独創的な成果である．すなわち、第一の方程式である多重双曲型方程式は，論文提出者により初めて導出されたものである．この導出によって，相転移現象を定量的に定式化しスムーズに議論することが可能となり，一連の難問をよりよく知られている問題に帰着することができた．第二の方程式である非整数階拡散方程式は，古典的な放物型方程式と関連しており，応用上の重要性にも関わらず数学解析や関連する数値解法がいまだ十分でない．論文提出者は初期値・境界値問題の適切性など今後の研究の礎石となる性質を調べ，実用的な有限要素法を開発した． これは近い将来に古典的な偏微分方程式を包含する非整数階偏微分方程式の数学理論と数値解析手法の構築につながり、極めて豊穣な発展が期待できる研究である．
よって、論文提出者 劉 逸侃は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。