論文の内容の要旨

論文題目　:　Studies on singular Hermitian metrics with minimal singularities on numerically effective line bundles
(数値的半正な正則直線束の極小特異エルミート計量に関する研究)

氏　　名　:　小池 貴之

本論文は複素代数多様体上の正則直線束の極小特異エルミート計量に関するものである．正則直線束 L の極小特異エルミート計量とは, L の特異エルミート計量で半正曲率を持つものの中で最も特異性が小さいもののことである．L の極小特異エルミート計量がどこでどのような特異性を持つかという情報は, 例えば乗数イデアル層を通じて高次のコホモロジーの消滅定理などに応用があり, L の複素幾何学的な正値性を研究する上で非常に重要であるといえる．その一方で極小特異エルミート計量は一般的な存在証明がなされているのみであり, その証明からは具体的にどこでどのような特異性を持つのかは一切分からない．本論文の目標は, 代数幾何学的に重要ないくつかの状況に於いて, 極小特異エルミート計量を具体的に決定し, その特異性についての情報を調べることである．

以下, X を滑らかな複素代数多様体, L を X 上の正則直線束とする．まず L が半正である, つまり L に滑らかで半正曲率を持つ計量が存在する場合には, 極小特異エルミート計量は特に滑らかなものとしてとれるので, 極小特異エルミート計量に一切の特異性は存在しないことに注意する．このことから L の極小特異エルミート計量の特異性は L が半正となるための障害の情報と見做せる．この種の情報は代数幾何学的には, Zariski 分解と呼ばれる直線束の分解を通じて考察される．そこで, まず 2 章では, Zariski 分解に関連して病的な振る舞いをする中山による例 (X, L) [8, IV] の極小特異エルミート計量を具体的に構成する．またこの具体例について用いた手法を一般化し, より一般に X が複素トーラス上のトーリック束の構造を持つときに, この上の直線束 L の極小特異エルミート計量の具体的な構成法, 及びその特異性の情報を, 組み合わせ論的に記述する [4].

3 章以降では主に, L が数値的半正であるとき, つまり X の任意の閉曲線 C に対して交点数 $(L.C)$ が非負であるときを考える．まず初めに, Zariski による例についての考察を行う．この例は複素射影平面 $\mathbb{P}^2$ の適切な 12 点での爆発 X 上の数値的半正な直線束 L であって, 半豊富と呼ばれる代数幾何学的な半正値性を満たさない例である．この Zariski

の例 (X, L) は特に, 切断環 $\bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(X, L^{\otimes m})$ が非有限生成であるという意味でも病的であり, 重要な例である. 一方で本論文の 3 章では, この例に於ける L に滑らかで半正曲率を持つ計量を構成し, 従ってこの L が半正であることを示す. 実際にはより一般に, 次が示せる:

定理 1 ([5]). X を滑らかな代数曲面, D を X の滑らかな部分代数曲線, L を X 上の数値的半正直線束であって $(L.D) = 0$ なるものとする. $L \otimes \mathcal{O}_X(-D)$ が半正で, かつ D の種数 g と D の自己交点数 (D^2) が $(D^2) < \min\{0, 4 - 4g\}$ を満たすならば, L は半正である.

上記の定理では, 線形系 $|L|$ の固定点集合 D が正則な管状近傍を持つ滑らかな超曲面であるという事実が重要であり, 計量の構成にはこのことを本質的に用いている. この構成法を一般化し, 数値的半正な直線束 L が半正となるための一つの十分条件を, D の近傍の情報を用いて記述することができる. さらに同じ手法を応用することで, L の極小特異エルミート計量を D に制限したものが $L|_D$ の極小特異エルミート計量と一致するための十分条件も, 次のように記述することができる.

定理 2 ([5]). X を滑らかな射影複素多様体, D をその滑らかな超曲面, L を X 上の擬有効直線束とする. ここで D が X の中で複素管状近傍を持つことと, 直線束 $L \otimes \mathcal{O}_X(-D)$ が滑らかなエルミート計量で曲率が半正なるものを持つことを仮定する. このとき L の極小特異エルミート計量 $h_{L,\min}$ は, $L|_D$ が擬有効であるときとそのときに限り $h_{L,\min}|_D \not\equiv \infty$ であり, このとき $h_{L,\min}|_D$ は $L|_D$ の極小特異エルミート計量である.

次に, 数値的半正だが半正でない直線束の極小特異エルミート計量を考察する. 研究当初知られていた数値的半正だが半正でなく, かつその極小特異エルミート計量が具体的に記述されていた例は, Demailly, Peternell, Schneider [1] による例のみであった. この例は滑らかな楕円曲線上のある線織面 X 上のものであり, その切断 $C \subset X$ に対応する数値的半正直線束 $\mathcal{O}_X(C)$ の極小特異エルミート計量が C に沿って特異部分を持つという例である. しかしその証明は, この具体例の特殊事情を用いた具体的かつ詳細な複素解析に基づくものであり, 同じ方針では他の例についての考察は望めない状態にあった. そこで 4 章では, この例における C の X 中での近傍が非自明な複素構造を持つことに着目した考察を行う. 複素曲面に埋め込まれた滑らかな閉曲線の近傍の複素構造を理解するために, 上田による理論 [10] の応用を考える. 上田は, 一般の複素曲面 X と, X に埋め込まれた滑らかな閉曲線 C として法線束 $N_{C/X}$ が平坦束であるものの組 (C, X) を, C が X 中に有

限次のジェットの段階で複雑な複素構造を持つ場合である "有限型" と, そうでない場合である "無限型" とに分類した. さらに上田は組 (C, X) が有限型であるときに, C 近傍における多重劣調和関数の増大度に制限があることを示した. 4 章ではこの定理を応用することで, 組 (C, X) が有限型であるときに, 直線束 $\mathcal{O}_X(C)$ の極小特異エルミート計量を特定する. より詳しく述べると, この場合の極小特異エルミート計量は C に沿って特異性を持ち, 特に数値的半正直線束 $\mathcal{O}_X(C)$ は半正ではないことが分かる:

定理 3 ([6]). 組 (C, X) が有限型であるとする. このとき, $f_C \in H^0(X, \mathcal{O}_X(C))$ をその零点が C となる標準切断として, $|f_C|^{-2}$ は直線束 $\mathcal{O}_X(C)$ の極小特異エルミート計量である. 特にこのとき, $\mathcal{O}_X(C)$ はネフだが半正でない.

この結果と Neeman [9] による $u_n(C, X)$ の計算とを組み合わせることで, 上記の Demailly, Peternell, Schneider による結果の一般化を得, また線織面でない X 上にもネフだが半正でない L の例を得る [6, 1.2], [6, 3.6].

またこの結果の別の応用として, ネフよりより強い条件である強ネフという条件 (X のどの部分代数曲線上に制限しても L の次数が正であるという条件) に関する結果を得る. L が強ネフであっても半豊富とは限らないことは知られていた [3] が, 強ネフな L が半正であるかについては, 藤野 [2] によって強ネフだが半正でない例の候補が挙げられているのみで, まだ分かってはいなかった. 上記の結果を応用することで, 藤野による例が確かに強ネフだが半正でない例となっていることが示される [6, 1.4].

最後に 5 章では, 上田理論の高余次元化についての考察を行う [7]. 上田 [10] は X を複素多様体, C をその滑らかでケーラーなコンパクト超曲面で $c_1(N_{C/X}) = 0$ なるものとして, 直線束 $\mathcal{O}_X(C)$ が C の近傍でも平坦直線束となるための十分条件を記述した. 5 章ではこの高余次元版として, X を複素多様体, S をその滑らかな超曲面, C を S の滑らかでケーラーなコンパクト超曲面で $c_1(N_{S/X}|_C) = 0$ なるものとして, 直線束 $\mathcal{O}_X(S)$ が C の近傍でも平坦直線束となるための十分条件を記述する. またその応用として, 3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ の一般の位置にある 8 点での爆発 X の反標準直線束 K_X^{-1} が半正なるための十分条件を, 次のような形で得る:

定理 4 ([7]). $C_0 \subset \mathbb{P}^3$ を, 2 つの二次曲面の完全交差となっているような滑らかな楕円曲線として, その上の相異なる 8 点 $p_1, p_2, \dots, p_8 \in C_0$ を, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1 + p_2 + \dots + p_8)$ が $\mathrm{Pic}^0(C_0)$ のねじれ元であるか, 又は集合

$$\mathcal{E}_1 := \{E \in \mathrm{Pic}^0(C_0) \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{Z}_{>0},\ d(\mathcal{O}_{C_0}, E^n) \geq (2n)^{-\alpha}\}$$

の元であるようなものとする (d は $\mathrm{Pic}^0(C_0)$ のユークリッド距離). このとき $\mathbb{P}^3$ の $\{p_j\}_{j=1}^8$ での爆発 X の反標準直線束 K_X^{-1} は半正である.

尚, 上記の集合 $\mathcal{E}_1$ は $\mathrm{Pic}^0(C_0)$ のユークリッド位相での疎な閉集合の可算和として記述できる. その一方で, $\mathrm{Pic}^0(C_0) \setminus \mathcal{E}_1$ のルベーグ測度は 0 である.

参考文献

[1] J-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider, Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles, J. Algebraic Geom., **3** (1994), 295-345.

[2] O. Fujino, A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem II, J. Reine Angew. Math. **681** (2013), 149–174.

[3] R. Hartshorne, Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture Notes in Math. **156**, Springer-Verlag, Heidelberg (1970).

[4] T. Koike, Minimal singular metrics of a line bundle admitting no Zariski-decomposition, to appear in Tôhoku Math. J. (2).

[5] T. Koike, On minimal singular metrics of certain class of line bundles whose section ring is not finitely generated, to appear in Ann. Inst. Fourier (Grenoble).

[6] T. Koike, On the minimality of canonically attached singular Hermitian metrics on certain nef line bundles, to appear in Kyoto J. Math.

[7] T. Koike, Toward a higher codimensional Ueda theory, arXiv:1412.2354, preprint, 2014, 投稿中.

[8] N. Nakayama, Zariski decomposition and abundance, MSJ Mem. 14, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[9] A. Neeman, Ueda theory: theorems and problems., Mem. Amer. Math. Soc. **81** (1989), no. 415.

[10] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.