論文の内容の要旨*
論文題目: On Boundedness of Volumes and Birationality in Birational Geometry
(双有理幾何学における体積と双有理性の有界性について)

氏名: Chen JIANG (江 辰)†

1 はじめに

この論文を通して, 全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える.

双有理幾何学の目標は, 全ての代数多様体を双有理同値によって分類することである. 極小モデル理論によると, マイルドな特異点を持った極小多様体と Fano 多様体が双有理幾何学で基本的なクラスを成す. これら特別なクラスの多様体の理解に向けて, 有界性の証明は非常に自然で興味深い問題である. この論文の目標は, 有界性問題を中心とした双有理幾何学における著者の近年の業績を集約することである.

Chapter 3 は特異点を許した対数的 Fano 対の反標準的体積の有界性に焦点を当てる. Chapter 4 と 5 は, 双有理射を定める線形系の有界性に費やされる. Chapter 4 において, 3 次元 弱 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体の多重反標準因子の線形系を調べる. Chapter 5 において, 3 次元極小多様体 X であって数値的自明な標準因子とネフで巨大な Weil 因子 L を持つものを調べる.

Chapter 3 と 5 は著者のプレプリント [Jiang14b, Jiang14a] を基盤とする. Chapter 4 は Meng Chen [CJ14] との共同研究を基盤とする.

2 特異的 Fano 3 次元多様体の反標準的体積の有界性

代数多様体 X が ϵ-*Fano* **型**であるとは, ある境界 Δ が存在して (X, Δ) が ϵ-klt 対数的 Fano 対であることを言う.

我々は主に ϵ-Fano 型の多様体の有界性について調べたい. 研究の動機は次の A. Borisov, L. Borisov, V. Alexeev による BAB 予想である.

予想 2.1 (BAB 予想)**.** $0 < \epsilon < 1$ と整数 $n > 0$ を固定すると, 全ての n 次元 ϵ-Fano 型の多様体の集合は有界である.

BAB 予想は双有理幾何学における最も重要な予想の 1 つで, フリップの終結に関連している. 我々はこの予想へのアプローチとして, 次の反標準的体積についてのより弱い予想について調べたい. この予想は BAB 予想の帰結である.

予想 2.2 (弱 BAB 予想)**.** $0 < \epsilon < 1$ と整数 $n > 0$ を固定する.

* 鈴木文顕はこの要旨を翻訳してくれ, ありがとございました. 中村勇哉からのコメントをいただきありがとうございました.

† cjiang@ms.u-tokyo.ac.jp

このとき n と ϵ のみに依存した数 $M(n,\epsilon)$ であって次の性質を満たすものが存在する:
もし (X,Δ) が n 次元 ϵ-klt 対数的 Fano 対ならば,

$$\mathrm{Vol}(-(K_X+\Delta)) = (-(K_X+\Delta))^n \leq M(n,\epsilon)$$

が成り立つ. さらに, もし K_X が $\mathbb{Q}$-Cartier ならば,

$$\mathrm{Vol}(-K_X) \leq M(n,\epsilon)$$

が成り立つ.

BAB 予想は 2 次元の場合に Alexeev [Ale94] により示され, Alexeev–Mori [AM04] によって議論が単純化された. 3 次元以上の高次元において, BAB 予想は未だ未解決であり, 部分的な結果しか存在しない.

2 次元の弱 BAB 予想は Alexeev [Ale94], Alexeev–Mori [AM04] と Lai [Lai12] によって扱われた. 最近, 著者 [Jiang13] は数 $M(2,\epsilon)$ に対して最適値を与えた. 3 次元以上の高次元において, 弱 BAB 予想は未解決であった.

Chapter 3 の主定理として, 3 次元における弱 BAB 予想を証明する.

定理 2.3. 弱 BAB 予想は $n=3$ で成立する.

系として, ある既存の結果の 3 次元における別証明を得る. この結果は固定された指数をもつ Fano 多様体の有界性に関するもので, Batyrev によって予想され, 3 次元では A. Borisov [Bor01] によって, 任意の次元では Hacon-M^{c}Kernan-Xu [HMX14] によって証明された.

系 2.4. 正の整数 r を固定する. $\mathcal{D}$ を 3 次元正規射影的多様体 X であって, K_X が $\mathbb{Q}$-Cartier であり, ある $\mathbb{Q}$-因子 Δ に対して (X,Δ) が klt で $-r(K_X+\Delta)$ が Cartier かつ豊富であるようなもの全体の集合とする.
このとき $\mathcal{D}$ は有界族を成す.

3　3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体の反標準的幾何について

正規射影的多様体 X は高々 $\mathbb{Q}$-分解的な端末特異点を持ち反標準因子 $-K_X$ がネフかつ巨大であるとき, **弱 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体**と呼ばれる. 弱 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体は $-K_X$ が $\mathbb{Q}$-豊富で Picard 数が $\rho(X)=1$ を満たすとき, **$\mathbb{Q}$-Fano 多様体**と呼ばれる. 極小モデルプログラムによると, $\mathbb{Q}$-Fano 多様体は双有理幾何学において基本的なクラスを成す.

与えられた n 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体 X(同様に n 次元弱 $\mathbb{Q}$-Fano 次元多様体 X) に対して, φ_{-m} を線形系 $|-mK_X|$ によって定義された有理写像とする. 定義より, φ_{-m} は m が十分大きいときその像の上への双有理写像である. 次の問題が興味深い.

問題 3.1. φ_{-m} が全ての $m \geq c$ と全ての 3 次元 (弱)$\mathbb{Q}$-Fano 多様体に対して像の上へ双有理写像になるような, 最適な定数 c を求めよ.

問題 3.1 は M. Chen によって [Chen11] で扱われ, X の Gorenstein 指数を変数とする関数によって c の上界が与えられた (cf. [Chen11, Theorem 1.1]). 問題 3.1 は次の問題に密接に関係していることが判明した (cf. [Chen11, Theorem 4.5]).

問題 3.2. 与えられた 3 次元 (弱)$\mathbb{Q}$-Fano 多様体 X に対して, 最小の正の整数 $\delta_1=\delta_1(X)$ であって $\dim \overline{\varphi_{-\delta_1}(X)} > 1$ を満たすものを求めよ.

Chapter 4 の動機は 3 次元 (弱)$\mathbb{Q}$-Fano 多様体上の φ_{-m} の系統的研究である.

まず, 次の定理を証明する.

定理 3.3. X を 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体とする. このときある整数 $n_1 \le 10$ であって $\dim \overline{\varphi_{-n_1}(X)} > 1$ を満たすものが存在する.

定理 3.3 により, 次の結果が証明できる.

定理 3.4. X を 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体とする. このとき φ_{-m} は全ての $m \ge 39$ に対して像の上への双有理写像である.

T. Sano から φ_{-m} が generically finite 射となる場合に同様の定理が得られる可能性を指摘された. このことがきっかけとなり, 次の結果を得た.

定理 3.5. X を 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体とする. このとき φ_{-m} は全ての $m \ge 28$ に対して像の上への generically finite 射である.

定理 3.3 の証明の鍵は, $\rho(X) = 1$ という条件が使えることであり, これは任意の 3 次元弱 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体では必ずしも成立しない. よって 3 次元弱 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体の研究には, 別の方法を用いる必要がある. 以下の結果を示した.

定理 3.6. X を 3 次元弱 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体とする. このとき全ての $n_2 \ge 71$ に対して $\dim \overline{\varphi_{-n_2}(X)} > 1$ となる.

定理 3.6 を用いて, 双有理性について以下を示した.

定理 3.7. X を 3 次元弱 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体とする. このとき φ_{-m} は全ての $m \ge 97$ に対して像の上への双有理写像である.

4 $K \equiv 0$ を満たす 3 次元極小多様体の双有理幾何学について

正規射影的多様体 X は, X が高々 $\mathbb{Q}$-分解的な端末的特異点を持ち標準因子 K_X がネフであるとき, **極小**と呼ばれる. 極小モデルプログラムによると, 極小多様体は双有理幾何学において基本的なクラスを成す.

Chapter 5 の動機は $K \equiv 0$ を満たす 3 次元極小多様体の系統的研究である. X 上の任意のネフかつ巨大な Weil 因子 L に対して, 線形系 $|mL|$ の双有理性を調べる. 特別な興味として, 同伴線形系 $|K_X + mL|$ の双有理性も調べる.

以下の定理を示した.

定理 4.1. X を $K_X \equiv 0$ を満たしネフかつ巨大な因子 L を持つ 3 次元極小多様体とする. このとき $|mL|$ と $|K_X + mL|$ は全ての $m \ge 17$ に対して双有理写像を与える.

実際は, 次のより一般的な定理を示した.

定理 4.2. X を $K_X \equiv 0$ でありネフかつ巨大な Weil 因子 L と Weil 因子 $T \equiv 0$ を持つ 3 次元極小多様体とする. このとき全ての $m \ge 17$ に対して $|K_X + mL + T|$ は双有理写像を与える.

さらに, 対数的極小モデル理論により, L がネフという仮定を弱めることができる. 因子 D は, 十分可分な m に対し $|mD|$ が固定成分を持たなければ, **安定な固定成分を持たない**という.

定理 4.3. X を $K_X \equiv 0$ で安定な固定成分を持たない巨大な Weil 因子 L と Weil 因子 $T \equiv 0$ を持つ 3 次元極小多様体とする. このとき全ての $m \ge 17$ に対して $|K_X + mL + T|$ は双有理写像を与える. 特に全ての $m \ge 17$

に対して $|mL|$ と $|K_X + mL|$ は双有理写像を与える.

副次的な成果として, Fukuda [Fuk91] と Oguiso–Peternell [OP95] の結果の直接的な一般化を示した. また, 一般の重み付き超曲面 $X_{10} \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,5)$ が最適値を与えることが分かった.

定理 4.4. X を $K_X \equiv 0$ でありネフかつ巨大な Weil 因子 L と Weil 因子 $T \equiv 0$ をもつ 3 次元極小 Gorenstein 多様体とする. このとき $|K_X + mL + T|$ は全ての $m \geq 5$ に対して双有理写像を与える.

参考文献

[Ale94] V. Alexeev, *Boundedness and K^2 for log surfaces*, Int. J. Math. **5** (1994), 779–810.

[AM04] V. Alexeev, S. Mori, *Bounding singular surfaces of general type*, in: Algebra, arithmetic and geometry with applications, Springer, Berlin, 2004, pp. 143–174.

[Bor01] A. Borisov, *Boundedness of Fano threefolds with log-terminal singularities of given index*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **8** (2001), 329–342.

[Chen11] M. Chen, *On anti-pluricanonical systems of $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds*, Sci. China Math. **54** (2011), 1547–1560.

[CJ14] M. Chen, C. Jiang, *On the anti-canonical geometry of $\mathbb{Q}$-Fano threefolds*, arXiv:1408.6349, submitted.

[Fuk91] S. Fukuda, *A note on Ando's paper "Pluricanonical systems of algebraic varieties of general type of dimension ≤ 5"*, Tokyo J. of Math. **14** (1991), 479–487.

[HMX14] C. Hacon, J. M^{c}Kernan, C. Xu, *ACC for log canonical thresholds*, Ann. of Math. **180** (2014), 523–571.

[Jiang13] C. Jiang, *Bounding the volumes of singular weak log del Pezzo surfaces*, Int. J. Math. **13** (2013), 1350110.

[Jiang14a] C. Jiang, *On birational geometry of minimal threefolds with numerically trivial canonical divisors*, preprint, 2014.

[Jiang14b] C. Jiang, *Boundedness of anti-canonical volumes of singular log Fano threefolds*, arXiv:1411.6728, submitted.

[Lai12] C-J. Lai, *Bounding the volumes of singular Fano threefolds*, arXiv:1204.2593v1.

[OP95] K. Oguiso, T. Peternell, *On polarized canonical Calabi–Yau threefolds*, Math. Ann. **301** (1995), 237–248.