論文審査の結果の要旨

氏名　江　辰

江辰氏の博士論文のタイトルは「On boundedness of volumes and birationality in brational geometry （双有理幾何学における体積と双有理性の有界性について）」である。双有理幾何学においては、各種の有界性を示すことが重要な課題である。一つの多様体に関する有界性、例えば標準環の有限生成定理は重要な前進であったが、多様体のクラスを一つ固定したとき、そのクラスに含まれる多様体全体の有界性を論じることも重要である。江氏はファノ多様体の有界性について研究した。

代数多様体とその上の $\mathbf{R}$-因子の組 (X, B) は $-(K_X + B)$ が豊富であるときファノ組であるという。正の曲率を持つ代数多様体を一般化したものであるといえる。正の実数 ϵ を固定したとき、組 (X, B) のログ特異点解消 $f : Y \to X$ において、Y 上の任意の素因子に対するログ食い違い係数が ϵ より大きいとき、組 (X, B) の特異点は ϵ-KLT であるという。代数多様体 X は、その上に $\mathbf{R}$-因子 B が存在して、(X, B) が ϵ-KLT 特異点を持つファノ組になるとき、ϵ-ファノ型であるという。

ファノ多様体のクラスに対しては各種の有界性が証明されているが、次の予想が最強であると思われる：

Conjecture 1 (BAB (Borisov-Alexeev-Borisov) 予想)**.** 固定した自然数 d と正の実数 ϵ に対して、*ϵ-KLT* ファノ型であるような d-次元の代数多様体全体は、有界な族をなす。

BAB 予想は $d = 2$ ならば正しいことが知られている。

d-次元のファノ組 (X, B) に対して、$(-(K_X + B))^d$ をその体積とよぶ。この量は、反多重種数 $H^0(X, \llcorner -m(K_X + B) \lrcorner)$ の増大度としてとらえることができる。ファノ型多様体 X の族の有界性を示すためには、体積の有界性とともに、$K_X + B$ のカルティエ指数をおさえることが必要になる。

江氏は博士論文の前半において、$d = 3$ の場合に体積の有界性を証明した：

Theorem 2 (3 次元の弱 BAB 予想)**.** 正の数 ϵ を固定するとき、定数 $V(3, \epsilon)$ が存在して、以下のことが成り立つ:任意の 3 次元 *ϵ-KLT* ファノ対 (X, B) に対して、$(-(K_X+B))^3 \leq V(3, \epsilon)$ が成り立つ。

この結果は論文「Boundedness of anti-canonical volumes of singular log Fano threefolds」にまとめ、投稿中である。なお、江氏は修士課程では 2 次元のファノ組（弱 Del Pezzo 組）の体積の有界性を扱い、最適に近い評価式を証明した。その結果は論文「Bounding the volumes of singular weak log del Pezzo surfaces」にまとめ、Int. J. Math. 13 (2013) に既に出版済みである。

博士論文の後半においては、豊富因子を与えたとき、それを何倍すれば双有理射を与えるかという問題を研究した。まず、ファノ多様体の場合を考えた：

Theorem 3. X は $\mathbf{Q}$-分解的で末端特異点のみを持つ３次元代数多様体で、ピカール数 $\rho(X)=1$ であり、$-K_X$ は豊富であると仮定する。このとき、以下の主張が成り立つ：

（１）$m \geq 39$ となるような任意の自然数 m に対して、多重標準線形系 $|-mK_X|$ は X からの双有理写像を与える。

（２）$h^0(X,-K_X)=2$ ならば、$m \geq 21$ で十分である。

（３）$h^0(X,-K_X) \geq 3$ ならば、$m \geq 6$ で十分である。

重み付き射影空間内の一般の超曲面 $X_{33} \subset \mathbf{P}(1,5,6,22,33)$ を見れば、m の最小値は 33 以下にはできないことがわかるので、定理の主張（１）は最適解に近い。$X_{22} \subset \mathbf{P}(1,1,6,14,21)$ および $X_{12} \subset \mathbf{P}(1,1,1,4,6)$ を見れば、主張（２）と（３）は最適解であることがわかる。この結果は上海の Fudan 大学の Meng Chen 教授との共同研究であり、論文「On the anti-canonical geometry of $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds」にまとめられ、すでに J. Diff. Geom. にアクセプトされている。

次に、江氏はカラビヤウ多様体の場合を考えた：

Theorem 4. X は $\mathbf{Q}$-分解的で末端特異点のみを持つ３次元代数多様体で、$-K_X$ は数値的に 0 であると仮定する。L と T は X 上の *Weil* 因子で、L はネフかつ巨大であり、T は数値的に 0 であると仮定する。このとき、$m \geq 17$ であるような任意の自然数 m に対して、線形系 $|K_X+mL+T|$ は X からの双有理写像を与える。

この結果は論文「On birational geometry of minimal threefolds with numerically trivial canonical divisors」にまとめ、投稿中である。

よって、論文提出者　江　辰　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。