論文の内容の要旨

論文題目 : Studies on the minimal log discrepancy
(極小ログ食い違い係数の研究)

氏　　名 : 中村 勇哉

本論文は極小ログ食い違い係数と呼ばれる代数多様体の特異点の不変量に関する研究をまとめたものである.

極小ログ食い違い係数は極小モデル理論を背景に定義された不変量である. 極小モデル理論の目的は, 双有理同値の意味で代数多様体を分類することである. 特に各双有理同値類の中で最も "単純" な多様体を見つけることを目的としている. そして 1980 年代に, 極小モデルプログラムと呼ばれる「"単純" な多様体を見つける」ための方法論が提起された. その方法論は, 「部分多様体をつぶすことを繰り返すことで, "単純" な多様体に到達するのではないか」というものである. そのプログラムのステップの一部としてフリップと呼ばれる操作があり, このプログラムがうまく働き, さらに有限回のステップで終わることを示すためには「フリップという操作の存在」と「フリップが無限に続かないこと」を証明する必要があった. 「フリップの存在」は 2000 年代に [4] によって証明された. 一方で, 「フリップの停止問題」は未だ解決されていない.

ログ対 (X, Δ) の極小ログ食い違い係数 (minimal log discrepancy, MLD) はフリップの停止問題を局所的な特異点の問題に帰着させるために Shokurov により導入された. ここで, ログ対 (X, Δ) とは正規な複素代数多様体 X と X 上の有効 $\mathbb{R}$-因子 $\Delta = \sum d_i D_i$ の組であって, $K_X + \Delta$ が $\mathbb{R}$-Cartier となるものを指す.

MLD はログ対 (X, Δ) と X の閉点 x に対し, 実数を返すような関数であり, x での特異点の「良さ/悪さ」を反映する. MLD に関して, Ambro が「MLD の下半連続性 (LSC) 予想」と呼ばれる予想を立て, Shokurov が「MLD の昇鎖律 (ACC) 予想」と呼ばれる予想を立てた.

予想 1 (LSC 予想, [2])**.** (X, Δ) をログ対とする. このとき関数

$$X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}; \qquad x \mapsto \mathrm{mld}_x(X, \Delta)$$

は下半連続性をみたす.

予想 2 (ACC 予想, [12, Conjecture 4.2])**.** d を正整数, $I \subset [0,1]$ を降鎖律をみたす部分集合とする. このとき, 集合

$$\{\mathrm{mld}_x(X,\Delta) \mid (X,\Delta) \text{ は } d \text{ 次元ログ対}, \ \Delta \in I, \ x \in X \ \}$$

は昇鎖律をみたす. ここで因子 $\Delta = \sum d_i D_i$ は $d_i \in I$ となるもの全てを動く (このことを $\Delta \in I$ と表す).

この二つの予想の意義は, この二つの予想がフリップの停止を導く点にある [13].

LSC 予想は (X,Δ) がトーリック対の場合と X が 3 次元以下の場合には Ambro によって証明されている [2]. また, X が非特異多様体の場合は, Ein 及び Mustaţă, 安田によって正しいことが示されている [6]. この結果は後に, Ein と Mustaţă によって X が局所完全交叉多様体である場合に拡張され [5], 中村により高々商特異点をもつ場合に拡張された [10].

ACC 予想はトーリック対の場合は Ambro によって正しいことが証明され [3], X が 2 次元以下である場合には Alexeev [1] と Shokurov [11] によって正しいことが確かめられた. また, 川北 [9] は, 3 次元非特異多様体に限定した場合に区間 $[1,3]$ において昇鎖律が成り立つことを示した. さらに, 川北 [8] は, 非特異多様体に限定し, さらに I が有限集合である場合に ACC 予想を証明した. より正確には次のことを証明した：X を $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規多様体, $I \subset [0,1]$ を有限部分集合とするとき, 集合

$$\Big\{ \mathrm{mld}_x\Big(X, \sum_i d_i D_i\Big) \ \Big| \ d_i \in I, \ x \in X, \text{ 各 } D_i \text{ は有効 Cartier 因子}\Big\}$$

は有限集合となる.

本論文の主内容は, この川北の結果を, 固定された Gorenstein 指数をもつ多様体族に拡張したことである.

定理 A. d, r を正整数, $I \subset [0,1]$ を有限部分集合とする. このとき集合

$$\Big\{ \mathrm{mld}_x\Big(X, \sum_i d_i D_i\Big) \ \Big| \ \Big(X, \sum_i d_i D_i\Big) \text{ は } d \text{ 次元ログ対}, \ d_i \in I, \ x \in X, \\ rK_X \text{ は Cartier 因子}, \text{ 各 } D_i \text{ は有効 Cartier 因子}\Big\}$$

は離散集合となる.

そしてこの系として, I が有限集合である場合に, 3 次元標準対に対して ACC 予想が正しいことを証明した.

定理 B. $I \subset [0,1]$ を有限部分集合とする．このとき集合

$$\{\mathrm{mld}_x(X,\Delta) \mid (X,\Delta) \text{ は 3 次元標準対}, \Delta \in I, x \in X\}$$

は昇鎖律をみたす．さらにこの集合の集積点は 1 のみである．

定理 A は $I \cup \{1\}$ により生成される $\mathbb{Q}$-線形空間の次元 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(I \cup \{1\})$ に関する帰納法で証明される．帰納法のステップにおいては, 無理数の係数を摂動させることで有理数の場合に帰着させるという議論を行う．この議論を正当化するために, ログ標準性を保つような摂動を, 多様体によらずその次元のみに依存するようにとれることを証明した．この理論は, Hacon, McKernan, Xu [7] によって証明されたログ標準閾値の集積点の有理性の応用として得られる．

参考文献

[1] V. Alexeev, *Two two-dimensional terminations*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 3, 527–545.

[2] F. Ambro, *On minimal log discrepancies*, Math. Res. Lett. **6** (1999), no. 5-6, 573–580.

[3] ———, *The set of toric minimal log discrepancies*, Cent. Eur. J. Math. **4** (2006), no. 3.

[4] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, and J. McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468.

[5] L. Ein and M. Mustaţă, *Inversion of adjunction for local complete intersection varieties*, Amer. J. Math. **126** (2004), no. 6, 1355–1365.

[6] L. Ein, M. Mustaţă, and T. Yasuda, *Jet schemes, log discrepancies and inversion of adjunction*, Invent. Math. **153** (2003), no. 3, 519–535.

[7] C. D. Hacon, J. McKernan, and C. Xu, *ACC for log canonical thresholds*, Ann. of Math. (2) **180** (2014), no. 2, 523–571.

[8] M. Kawakita, *Discreteness of log discrepancies over log canonical triples on a fixed pair*, available at `arXiv:1204.5248v1`.

[9] ———, *A connectedness theorem over the spectrum of a formal power series ring*, available at `arXiv:1403.7582v1`.

[10] Y. Nakamura, *On semi-continuity problems for minimal log discrepancies*, to appear in J. Reine Angew. Math.

[11] V. V. Shokurov, *A.c.c. in codimension 2* (1993, preprint).

[12] ———, 3-*fold log models*, J. Math. Sci. **81** (1996), no. 3, 2667–2699. Algebraic geometry, 4.

[13] ———, *Letters of a bi-rationalist. V. Minimal log discrepancies and termination of log flips*, Tr. Mat. Inst. Steklova **246** (2004), no. Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., 328–351; English transl., Proc. Steklov Inst. Math. (2004), no. 3 (246), 315–336.