論文審査の結果の要旨

氏名　中村　勇哉

中村勇哉氏の博士論文のタイトルは「Studies on the minimal log discrepancy（極小ログ食い違い係数の研究）」である。極小ログ食い違い係数（略して mld）は代数多様体とその上の $\mathbf{R}$-因子の組 $(X, B)$ に対して、各点 $x \in X$ において定まる数 $(\in \mathbf{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$ であり、式

$$\mathrm{mld}_x(X, B) = \min\{1 - a(X, B; E) \mid f^*(K_X + B) = K_Y + \sum_E a(X, B; E)E, f(E) = \{x\}\}$$

によって定義される。ここで、$f : Y \to X$ は $(X, B)$ のログ特異点解消であり、$E$ は $Y$ 上の素因子である。$f, E$ をともに動かしたときの最小値が存在し、それを mld と定義する。

Shokurov による以下の予想が重要である：

**Conjecture 1.**（1）*LSC* 予想：固定した組 $(X, B)$ に対して、$X$ 上の関数 $x \mapsto mld_x(X, B)$ は下半連続（*LSC*）である。

（2）*ACC* 予想：*DCC* (降鎖率) を満たす集合 $I \subset [0, 1]$ と自然数 $d$ を固定したとき、$d$ 次元の代数多様体と係数が $I$ に含まれるような $\mathbf{R}$-因子の組 $(X, B)$ すべてと、$X$ 上の点すべてを動かしたとの *mld* の値の集合

$$\{mld_x(X, B) \mid (X, B), x \in X, \dim X = d, B \text{ の係数} \in I\}$$

は昇鎖率（*ACC*）を満たす。

予想（2）では、すべての代数多様体などを考えるところが驚異的であり、とんでもない予想であるといえるが、2次元や3次元での詳細な結果から導かれたものである。Shokurov は二つの予想からフリップの終結予想が従うことを証明した。係数 $a(X, B; E)$ はフリップによって減少するので、この結果は論理的に自然な方向を向いていて、フリップの終結予想の背後にある原理を暗示している。なお、フリップの終結予想を示すためには、（2）において $I$ は有限集合であると仮定してもよい。

中村氏は、修士論文で LSC 予想を研究し、博士課程では ACC 予想を研究した。修士論文では特殊な場合に LSC 予想が成り立つことを証明した。この結果もなかなかよい結果で、「On semi-continuity problems for minimal log discrepancies」というタイトルの論文にまとめられ、J. reine angew. Math. (Crelle's journal) にアクセプトされている。博士論文において中村氏は以下のような ACC 予想の部分的解決を証明した：

**Theorem 2.** 有限集合 $I$ と自然数 $d, r$ を固定したとき、以下の集合

$$\{mld_x(X, \sum b_i B_i) \mid \dim X = d, x \in X, b_i \in I, B_i \text{は有効カルティエ因子}, rK_X \text{はカルティエ因子}\}$$

は離散集合になり、$ACC$ を満たす。ここで、$(X, \sum b_i B_i)$ および $x \in X$ は条件をみたすものすべてを動く。

京都大学の川北准教授による先行結果として、$X$ が固定した KLT 特異点である場合に同様の結果が成り立つことが証明されているが、$X$ を動かしてもよいという点において、それよりも遥かに一般的な結果であるといえる。

系として、以下の結果を得た：

**Corollary 3.** 有限集合 $I$ を固定したとき、以下の集合

$$\{mld_x(X, B) \mid \dim X = 3, x \in X, B \text{ の係数} \in I, (X, B) \text{ は標準特異点}\}$$

は $ACC$ を満たす。

この結果は「On minimal log discrepancies on varieties with fixed Gorenstein index」というタイトルの論文にまとめられ、Michigan Math. J. にアクセプトされている。

フリップの終結予想は、アバンダンス予想とともに極小モデル理論に残された最も重要な予想である。極小モデル理論に大変革をもたらした BCHM 論文 (Birkar-Cascini-Hacon-McKernan) においては、境界が豊富因子を含むという仮定の下に、フリップの終結が証明された。この論文では、次元に関する帰納法による大域的な議論を使って、mld の増大の様子に関する議論を回避する。このような都合の良い論法が成立するためには、境界が豊富因子を含むというある種の正値性の仮定が必要であった。一般の場合のフリップの終結を正面から扱うには、ACC 予想を経由することが正攻法であるといえる。なお、局所的な不変量であるところの mld を使ってフリップの終結を証明するというオーソドックスなアプローチは、３次元までしか成功していない。極小モデル理論が３次元までは完成しているが４次元以上では未完成である所以である。

mld と類似の不変量としてログ標準特異点閾値（lct）というものがある。lct は２乗可積分条件と結びついているので自然であり扱いやすい。最近、Hacon-McKernan-Xu は lct の ACC 予想を一般的に解決した。この論文は高く評価され、Annals of Math に掲載された。しかし本命は mld であり、遥かに困難である。lct は mld に近い不変量であるが、mld を実現する因子 $E$ が $X$ の奥深くに潜んでいる場合には、mld と lct の乖離が大きくなる。特異点解消定理も、特異点の奥深くに潜んでいる特異性の除去が問題なのであった。博士論文の完成後、中村氏は mld を実現する因子の深さを制限するという斬新なアイディアを考えだして研究中である。近い将来に更に大きな結果が期待できる。

さらに、参考論文として、Diletta Martinelli and Jakub Witaszek との共著「On base point free theorem for log canonical threefolds over the algebraic closure of a finite field」も一流雑誌 Algebra and Number Theory のアクセプトされている。

よって、論文提出者　中村　勇哉　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。