論 文 の 内 容 の 要 旨

論文題目　High Accuracy Numerical Computational Methods for Fractional Differential Equations
（非整数階微分方程式に対する高精度数値計算法）

氏　　名　竹内　裕貴

多くの分野で非整数階微分と積分を含んだ公式が提案されている。”Fractional calculus ”とは非整数階の微積分を取り扱う分野である。この非整数階微積分は整数階微積分の拡張版となっており、非整数階微積分は整数階微積分が用いられている分野で活用されうる可能性がある。現在、非整数階微積分は整数階微積分で表現する事の出来ない多くのモデルに対し応用されており、例えば、粘弾性体や拡散過程、コントロールシステム、ファイナンス、フラクタルなどに応用されている。本論文は主に二つのモデルに対し貢献する。一つは非整数階偏微分方程式で定式化された拡散過程のシミュレーションである。この非整数階拡散過程は放射性物質の拡散現象に現れ、福島原子力発電所から放出された放射性物質の拡散の予測にも非整数階微積分は用いられている。そのため、高精度でどこに放射性物質が広がるのか予測するためには高精度な数値計算法が必要である。また、もう一つのモデルは制御系のシミュレーションである。制御系はロボティクスや電子システムを含み、非整数階微積分によって整数階微積分ではシミュレートできない振る舞いをするシステムのシミュレーションが可能となる。したがって、精度の良い手法があれば、非整数階微積分を使った制御系のシミュレーションが精確に行われ、より最適なモデリングのために多くの制御系システムが非整数階微積分を活用することになるだろう。

非整数階偏微分方程式に対しては、Mark M. Meerschaert とCharles Tadjeran によって一次精度と思われる有限差分法が提案されていたが、それが本当に一次精度かは証明されていなかった。彼らは二次精度の手法も提案しているが、それは一次精度の有限差分法を加速させるという手法であり、二次精度の公式を用いたものではない。また非整数階常微分方程式に対しては、Kai Diethelm によって予測修正子法を応用する陽的な数値計算法が提案されている。しかしながら、その手法の大域誤差は二次精度以下であり、また、初期点周りの局所誤差が終端点周りの局所誤差よりも低かった。陽的な手

法に加えガウス求積を用いた陰的な手法もSeyadahmad Beheshti らによって提案されている。しかしその手法は解の関数が初期点で微分不可能な関数で表現されなければいけないことを仮定している。この仮定は微分可能な解の関数を含んでおらず、微分可能な関数に対し精度を保証していない。

本論文で、著者は偏微分と常微分の両方について議論し、非整数階偏微分方程式と常微分方程式に対する高精度数値計算法を提案する。

初めに、著者は一次元非整数階偏微分方程式に対する二次精度有限差分法を提案し、その精度と安定性を解析する。また、提案する有限差分法の安定性はスキームに現れる係数であるパラメータに依存することを示し、安定性条件をGerschgorin の定理を用いて証明する。次に、提案する有限差分法の精度が条件付きで二次精度であることを示し、もし解析解の関数が境界で微分不可能な場合、境界の周りで精度が劣化することを示す。加えて、本論文は解析解によってどの程度精度が失われるについても議論する。また、安定性についてより詳細を調査し、解析解が精度劣化の条件となる性質を持つかどうか調べるため、非整数階拡散方程式に対する多項式展開の形の数値解を導出する。

次に著者は非整数階常微分方程式に対する二つの新しい数値計算法を提案する。一つは予測子修正子法のスキームを備えた陽的差分法である。この手法の精度は三次精度であり、既存手法よりも精度が高い。もう一つの数値計算法はガウス求積とラグランジュ多項式を用いた陰解法である。提案手法は解の関数が多項式で構成されており、初期点周りで展開されうることを仮定しているため、そのような微分方程式を少ないノードで既存の手法より高精度に計算できる。

実験結果より、非整数階偏微分方程式に対して提案する二次精度有限差分法は実際に二次精度で条件付きで安定であることが示され、精度劣化を引き起こす条件が判明した。加えて、非整数階拡散方程式に対する多項式展開の形での数値解を導出することで、解はフーリエ級数で表現不可能であり、精度劣化の条件を満たすことが示された。また、実験結果から非整数階常微分方程式に対する提案する陽的計算法はKai Diethelm によって提案された既存の手法よりも高精度であることが判明した。陰的計算法に対しては解析解が多項式で表現できる場合、Seyadahmad Beheshti らによって提案された既存手法よりも少ないノードでより精度良く計算できることが確認できた。