博士論文（要約）

制約充足問題に対する充足可能性保存割当ての解析とそのアルゴリズム設計への応用

木村　慧

Copyright © 2015, Kei Kimura.

論文要旨

本論文では制約充足問題に対する様々な充足可能性保存割当てを扱い，それらの関係を整理する．また，充足可能性保存割当てに対し，多面錐による近似を考え，その近似のよさを詳細に解析し，この近似を用いることで充足可能性保存割当てを求める効率的なアルゴリズムを設計する．また，制約充足問題の効率的に解ける部分クラスを統一的に説明する計算複雑さの指標を与える．

制約充足問題とは与えられた制約をみたす，有限個の値をとる離散的な変数への値の割当てを求める問題である．この問題は工学おける幅広い応用をもち，人工知能やオペレーションズ・リサーチ，理論計算機科学などの分野で盛んに研究が行われている．

制約充足問題は NP 困難であり，すべての問題を効率的に解くことは難しいと考えられている．そこで，発見的な解法により高速に解くこと，および，どのような部分クラスが効率的に解けるかを明らかにすることが盛んに行われている．

制約充足問題を解く際には，探索により解を求める手法が代表的な手法の一つであり，探索すべき領域を削減するための発見的な解法が様々考えられている．その中でも，充足可能性保存割当てを見つけることにより探索領域を削減する手法が幅広く用いられている．充足可能性保存割当てとは，部分割当て，すなわち，一部の変数への値の割当てであって，問題の解の存在性を保つような割当てである．充足可能性保存割当てを求めて代入することにより探索領域を削減することができる．

充足可能性保存割当ては有用であるものの，それを求めること自体が一般に NP 困難である．そこで，効率的に求められる特殊な充足可能性保存割当てが扱われてきた．代表的なものとしては，解集合においてではなく，各制約において充足可能性保存割当てとなることを要請する局所的な概念がある．また，その他の特殊な割当てとしては，線形計画問題を解くことにより効率的に求められる割当てが特殊な問題に対して考えられているが，制約充足問題一般に対しては考えられていない．

本論文では制約充足問題における様々な充足可能性保存割当ての関係を整理する．また，割当てを実ベクトル空間の元と同一視することにより，充足可能性保存割当ての集合を多面錐により近似することを考える．このような近似により得られるものを線形充足可能性保存割当てと呼ぶ．線形充足可能性保存割当ては割当ての集合としては一般に小さくなるものの，線形計画問題を解くことにより求めることが可能になる．そこで，どのような多面錐による近似がよい近似となるかについて詳細に解析する．ただし，多面錐の定義の仕方によっては，線形計画問題が入力の指数サイズになることに注意されたい．また，制約が線形不等式系で与えられる制約充足問題に対し，ある意味で極大な線形充足可能性保存割当てを効率的に求めるアルゴリズムを設計する．そして，特殊な入力に対しては線形時間アルゴリズムを開発する．

また，効率的に解ける部分クラスに関して，充足可能性問題においては，入力が 2 論理積形やホーン論理積形，改名ホーン論理積形などの場合には多項式時間で解けることが知られていた．しかしこれらの部分クラスは個別に与えられるのみという状況であった．その中で Boros らはこれらの多項式可解性を統一的に説明する計算複雑さの指標を提案した．制約が線形不等式系で与えられる制約充足問題は，不等式系を定義する行列が二次やホーンである場合には擬多項式時間で解けることが知られているが，このような指標は提案されていない．そこで，本論文ではこれらの部分クラスを統一する指標を与える．

目次

第 1 章

はじめに

与えられた制約を満たす変数への値の割当てを求める問題は，工学のありとあらゆる分野に現れる基本的かつ重要な問題である．変数は状況に応じて，実数などの連続的な値や，整数や真偽などの離散的な値を取り得る．以下に，平面グラフの彩色，すなわち，地図の塗り分け問題の例を挙げる．たとえば，図 1.1 のように地域 r_1, r_2, r_3, r_4 に分割される地図が与えられたとき「赤，青，緑」を用いて，隣り合う地域には相異なる色で塗ることを考える．このとき，各地域 r_i に彩色される色を表す変数 x_i があり，各変数 x_i は赤，青，緑のいずれかの値をとる．このとき制約は，隣り合う地域を異なる色で塗ることである．すなわち，$x_1 \neq x_2$，$x_1 \neq x_3$，$x_2 \neq x_3$，$x_2 \neq x_4$，$x_3 \neq x_4$ という 5 つの制約ををもつ．図 1.2 にこの問題に対する一つの解を示す．

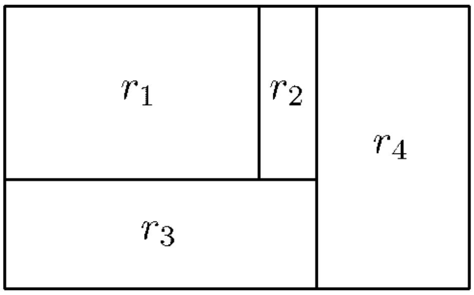

図 1.1. 地図の塗り分け問題

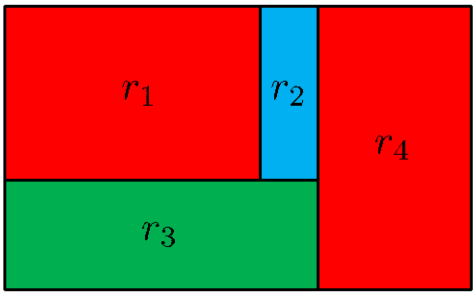

図 1.2. 一つの解

本論文では，地図塗り分け問題のような，与えられた制約をみたす，有限個の値をとる離散的な変数への値の割当てを求める問題を扱う．このような問題は様々な分野において応用がある．たとえば，オペレーションズ・リサーチなどの分野で扱われるスケジューリング問題の中には複数の仕事を複数の機械で行うことを考える問題がある．ここでの課題は，各仕事を複数

の機械の内のどの一つに割り振るかを考えることである．この際に，各機械によって処理できる仕事が異なり，ある仕事は他のある仕事よりも先に処理しなければいけないなどの制約があるので，それらの制約をみたすような仕事の機械への割り振り方を考える問題は，本論文の対象とする問題に含まれる．また，画像処理の分野における線画解釈問題も本論文の対象に含まれる．線画解釈問題とは，与えられた二次元平面上の線分 (線画) を三次元上の立体として解釈する問題である．線画解釈問題の入力例を図 1.3 に示す．この際，三次元上の立体としての解釈は各線分に対してラベルを割り付けることによって行われる．ラベルには $\{+, -, \leftarrow, \rightarrow\}$ の四つがあり，$+$ は線分の両側に立体の表面が見え，さらに，その線分が手前に凸になることを表し，$-$ は線分の両側に立体の表面が見え，さらに，その線分が手前に凹になることを表し，矢印 $\leftarrow, \rightarrow$ はその向きの右側にのみ立体の表面が見えることを表す．このラベルを，線分同士が交わる部分において三次元立体として矛盾のないように割り付けることが制約となる．たとえば，図 1.5 に示すラベル付は許されるが，図 1.6 に示すラベル付は許されない．ここで，地図塗り分け問題と異なり，三つの変数に関する制約もあることに注意されたい．図 1.4 にこの例題に対する一つの解を示す．

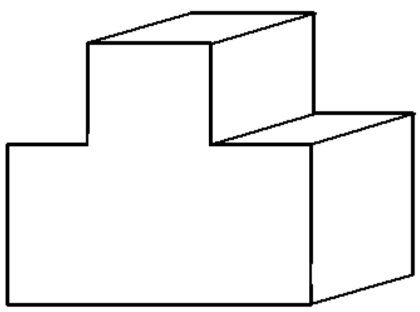

図 1.3. 線画解釈問題

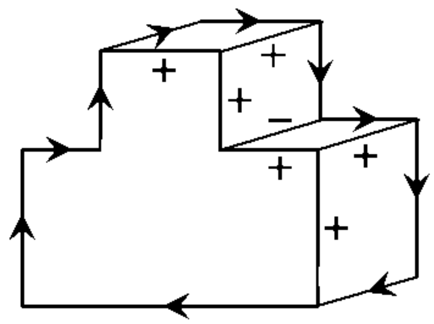

図 1.4. 一つの解

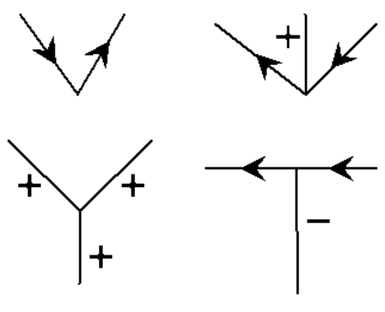

図 1.5. 許されるラベル付の例

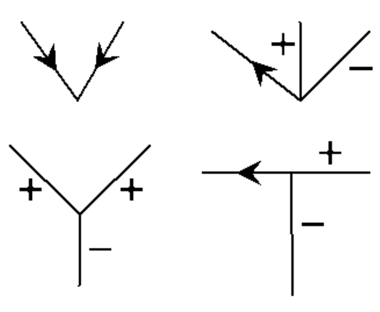

図 1.6. 許されないラベル付の例

本論文の対象とする問題は，そのほかの応用として大規模集積回路における部品の配置や配送計画，バイオインフォマティクスなど多数あり，近年の計算機の発達により，ますます重要性を増している [99, 100]．この問題は，主に人工知能やオペレーションズ・リサーチ，理論計算機科学の分野などで盛んに研究が行われている．また，この問題はプログラミング言語における宣言型言語と関係しており，高度なプログラミング技術を必要としない枠組みを提供することからも注目を浴びている [3, 28, 99]．さらに，商用のソフトウエアも多数開発されている [1, 2, 54, 94]．

上記のように重要であるものの，本論文の対象とする問題は一般に NP 困難であるため効率的に解くことは非常に難しいと考えられている．そこで入力を制限した問題を考えたときに，問題がいつ難しく，いつ簡単であるかを理解するための研究が盛んに行われている．たとえば，地図の塗り分け問題の一般化であるグラフ彩色問題，すなわち，与えられたグラフに対して隣接した異なる 2 頂点が同じ色にならないような頂点の塗り分け方を求める問題では，与えられた色が二色の場合には塗り分けることができるか否かの判定も含めて多項式時間で計算できる．一方で，三色の場合には NP 困難となる [66] ([40] も参照されたい)．また，充足可能性問題 (SAT) とは論理積形が与えられたときにそれが充足可能であるか否かを判定する問題であるが，入力が 2 論理積形 (すなわち，任意の節が高々二つのリテラルをもつ) [32] やホーン論理積形 (すなわち，任意の節が高々一つの正のリテラルをもつ) [50]，改名ホーン論理積形 (すなわち，変数の正負を適切に変えることでホーン論理積形にできる) [83] などである場合には多項式時間で解けることが知られているが，入力が 3 論理積形である場合には NP 困難であることが知られている [24]．また，整数線形不等式系の実行可能性問題では，制約が線形不等式系として与えられるが，この問題に対しては入力行列が二次 [52] やホーン [42] であるときには擬多項式時間で解けることが知られている．上記のように多項式時間で解ける場合は多く知られているもののそれらは個別に与えられており，いつ多項式時間であるかは一目では分かりづらい．そこで，Boros らは SAT に対して計算複雑さの指標を導入した．彼らの指標は 2SAT やホーン SAT などをひとまとめにする枠組みである．整数線形不等式系に対してはそのような枠組みは提案されていない．本論文の成果の一つに，整数線形不等式系に対して同様の枠組みを与える結果がある．

また，制約充足問題という一般的な枠組みにおいては，扱える制約を制限した際および，制約に現れる変数の組合せを制限した際の計算複雑さの解析が盛んに行われている．前者の研究では，Schaefer [102] が，変数の取り得る値が二つのみのときに，扱える制約をどのように制限しても，制約充足問題は多項式時間可解であるかまたは NP 完全であるという二分定理を示した．多項式時間可解問題と NP 問題が異なるという仮定の下では，多項式時間可解問題と NP

完全問題の間に，多項式時間帰着の意味で無限に多くの計算複雑さのクラスがあることが知られているが [79]，それにもかかわらず，多項式時間可解か NP 完全かの計算複雑さのみが現れるというのは驚くべきことであり，その後もこのような計算複雑さの分類の研究が盛んに行われている．特に，変数の取り得る値が任意のときにも，扱える制約をどのように制限しても制約充足問題は多項式時間可解であるかまたは NP 完全であるという予想が Feder–Vardi [34] により提唱されて以来，この予想を解くために多くの努力が割かれている．たとえば，変数の取り得る値が三つであるとき [16] や制約として一変数制約すべてが扱えるとき [15, 17] にはこのような二分定理が成立することが知られている．これらの研究においては普遍代数を用いたアプローチが Jeavons およびその共著者に始まり [57, 59, 60, 61]，それ以来盛んに行われている [6, 7, 18].

また後者の研究として，制約集合をハイパーグラフとみなし，その性質により計算複雑さを特徴付ける研究がある．ハイパーグラフとは，頂点集合 V とその部分集合族 $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ の元はハイパー枝と呼ばれる) で与えられる離散構造であり，たとえば $\mathcal{F}$ の元のサイズがすべて 2 であるときにはグラフとなる．制約充足問題に対しては頂点集合を変数集合とし，各ハイパー枝を各制約が含む変数集合としたハイパーグラフが考えられている．このとき，このハイパーグラフにおける木幅やその一般化であるハイパー木幅などが定数以下であれば制約充足問題は多項式時間で解けることが知られている [37, 44, 45, 87, 88].

また，制約充足問題はグラフ準同型問題 [48] とも深く関係する．ふたつの有向グラフ $G_i = (V_i, A_i)$ $(i = 1, 2)$ に対し，V_1 から V_2 への写像 $f : V_1 \to V_2$ が G_1 から G_2 への準同型であるとは，任意の枝 $(u, v) \in A_1$ に対して $(f(u), f(v)) \in A_2$ をみたすときにいう．二つの有向グラフ $G_i = (V_i, A_i)$ $(i = 1, 2)$ が与えられたとき，G_1 から G_2 への準同型が存在するか否かを判定する問題はグラフ準同型問題とよばれ，制約充足問題として記述することができる．たとえば，G_1, G_2 がともに無向グラフであり，G_2 が完全グラフ K_k (すなわち，k 個の頂点からなり，すべての異なる頂点間に枝があるグラフ) であるときには G_1 の k 彩色可能性を判定する問題となる．グラフ準同型問題において，G_2 を固定したときの計算複雑さが多項式時間可解であるか NP 完全であるかに二分されることは，制約充足問題において同様の主張が成り立つことと等価であることが示されており [34]，グラフ準同型問題の計算複雑さ自体もよく研究されている．たとえば，無向グラフにおけるグラフ準同型問題は，G_2 が二部グラフの場合には多項式時間可解でありそれ以外の場合は NP 完全となることが知られている [47]．また，グラフを他の方法で制限した場合や問題を一変数制約を扱えるように拡張した場合についても，計算複雑さに加えて領域計算量に関する多くの研究が行われている [7, 30, 31, 33, 49].

上記のように多項式時間で解ける問題を与える研究も数多く行われているが，応用上現れる

問題は多項式時間で解けないことも多い．このように問題が難しいときには，制約伝播，局所探索，分枝限定法 (バックトラック法) などの枠組みを用いた様々な発見的，すなわち，ヒューリスティクアルゴリズムが提案されている [3, 28, 99]．

探索により本研究の対象とする問題を解く際に最も基本的な手法は，あり得る解のパターンすべてを列挙しそれらが制約を満たすか否かを判定していく手法である．この手法は生成検査法と呼ばれる．しかし，あり得る解の数は一般に入力サイズに対して指数的に増大し，莫大な数になるので，それらすべてを一つ一つ検証していくことは現実的には不可能である．従って，一部の解のみを検証する探索手法であるバックトラック法が実用上，広く用いられている．バックトラック法とは，変数一つずつに順次，値を割当て，そこまでの部分割当てが制約に違反しないかを調べていき，制約に違反した時点で，その先を探索せず，変数の値割当てを見直す手法である．これは変数を頂点とし，値の割当てを枝とするグラフでの深さ優先探索とみなすこともできる．バックトラック法では，探索を途中で打ち切る可能性があるので，一般には生成検査法よりも探索範囲が削減される．そのため，探索の高速化が期待される．この際に，探索範囲をより多く削減するためのヒューリスティクスが多く提案されている．たとえば，探索する変数の順序や割当てる値の順序に対するヒューリスティクスや，制約伝播を組み込むことなどが考えられている [3, 28, 99, 100]．

探索範囲を削減する上で，充足可能性保存変換という概念は非常に重要である．充足可能性保存変換とは，解の存在性を保ちつつ，問題を別の問題に変換することをいう．たとえば，グラフ彩色において，ある一つの変数の色の取り得る値を固定しても，解の存在性に影響を与えない．これは，一つの解に対して色の置換を行ってもやはり解となるからである．従って，グラフ彩色においてある一つの変数の取り得る値を指定する制約を追加することは充足可能性保存変換となる．ほかの例としては，NP 問題の NP 完全問題への多対一帰着は充足可能性保存変換となる．これは，前者の解の存在性が後者の解の存在性と等価になるからである．また，詳しくは述べないが，論理学においても，一階述語論理をある標準形に変換する際に，充足可能性保存変換が用いられることがある．このように，充足可能性保存変換は計算機科学や数学の基礎的な部分においても重要な役割を果たす概念である．解の探索においては，解の存在性を保つように制約や変数の取り得る値の集合を変形（特に縮小）し，探索範囲を削減する方法が用いられる．たとえば，SAT における単位伝播や純リテラル消去，制約充足問題における対称性除去 [41, 110] は充足可能性保存変換の例となる．SAT ソルバにおいて現在も広く用いられている DPLL アルゴリズム [27] は，単位伝播および純リテラル消去を組み込んだバックトラック法といえる．

充足可能性保存変換の考え方自体は上記のように様々な場面で用いられる．解の探索においては，制約充足問題という統一的な枠組みが人工知能の分野において Montanari [91] およ

び Mackworth [84] により定式化され，その中で充足可能性保存変換による探索範囲の削減が提案された．彼らは局所無矛盾性 (局所整合性とも呼ばれる) の概念を導入した．その後，Freuder [38] は，変数の取り得る値を削減するために，交換可能性の概念を提唱した．変数 x への値 a の割当てが x への値 b の割当てと交換可能であるとは，x に a を割当てた解において x への割当てを b に変更した後にもまた解になり，またその逆も成立するときにいう．従って，解を一つ求める際には，x への割当てとしては a もしくは b のどちらかは考える必要がないことになり，どちらかを x の取り得る値の集合から削除することができる．なお，すべての解を求めたい際にも，削除後に得られた解からすべての解を復元できるので有用である．交換可能性を拡張および変形する形で，変数の取り得る値を削減する手法が現在まで盛んに開発されている [10, 65]．最も一般的な定義としては組代入可能性 [58] や完全動的代入可能性 [96] の概念が知られている．

充足可能性保存変換の考え方は探索範囲を削減する際に有用であるものの，そのような変換を求めること自体，多くの場合で NP 困難である．そこで，効率的に求めることのできる様々な充足可能性保存変換が提案されている．たとえば，それぞれの変換を局所的に定義することが考えられている．すなわち，解集合において充足可能性保存変換が成立することを要請するのでなく，それぞれの制約において充足可能性保存変換であることを要請する．制約一つ一つのサイズは一般に小さくなり易く，これにより効率的に充足可能性保存変換を求めることができる．Freuder [38] はこの考え方を交換可能性に適用した．Freuder はさらに，局所的な概念に幅を持たせることも行った．すなわち，k 個の変数に制限した問題における充足可能性保存変換性を提案した．このとき，局所的な概念は $k = 1$ のときに対応し，大域的，つまり解集合に対する概念は $k = n$ のときに対応する．ただし n は変数の個数とする．

このほかに効率的に求められる充足可能性保存変換として，線形な概念が SAT に対して考えられている．これは本論文とより深く関係しており，本章 1.2 項で詳しく述べる．

本論文の目的は大きくは以下の二つである．これまでに述べたように実用的なアルゴリズム開発の観点から部分割当ての解析は非常に重要である．そこで，一つ目の目的は充足可能性保存変換であるような部分割当て，つまり充足可能性保存割当てを考えることである．そして，それらとその局所的あるいは線形な概念を詳細に解析し，それらを求める効率的なアルゴリズムについて考察する．二つ目は，問題がいつ難しくなるかを測る指標を作ることである．たとえば SAT においては 2SAT やホーン SAT などが多項式時間可解であり 3SAT は NP 完全である．Boros らは SAT のこれまでの結果を一つの指標で統一的にみることを試みた．整数線形不等式系の実行可能性問題に対しては二次やホーン不等式系が擬多項式時間可解であることが知られているので，本論文では整数線形不等式系でそのような指標が作れないかを考察す

る．本論文で得られた成果の概要は本章 2 節にて述べる．

最後に，目的関数付きの制約充足問題に対する研究について述べる．ここまでは制約すべてをみたす解を求める問題について述べてきた．一方で，応用上に現れる制約充足問題においては，制約が多すぎる場合や観測誤差などの影響で，すべての制約をみたすような解は存在しないことも多い．そこで，なるべく多くの制約をみたす解を求めることも重要視され，多くの研究が行われている．これらの問題もやはり NP 困難なので，多項式時間で解けるクラスの研究 [23, 113] や近似アルゴリズムの研究 [78, 97, 111] が数多く行われている．また，線形目的関数付の整数線形不等式系は整数計画として知られ，オペレーションズ・リサーチの分野における中心的問題の一つである [63, 103].

1.1 先行研究

1.1.1 制約充足問題と充足可能性保存割当て

制約充足問題に対する充足可能性保存割当ての研究は，たとえば [10, 65] を参照して欲しい．以下の表 1.1 に，これまでに提案された充足可能性保存割当てを挙げる．

表 1.1. 制約充足問題に対する充足可能性保存割当て

年	著者	提案された概念
1974	Montanari [91]	矛盾割当て
1977	Macworth [84]	矛盾割当て
1991	Freuder [38]	交換可能，代入可能割当て
1999	Monasson ら [89]	含意割当て
2008	Bordeaux–Cadoli–Mancini [10]	固定可能，削除可能割当て

なお，含意割当てはバックボーン [89] や凍結変数 [62] の名前でも研究されている．また，矛盾性，交換可能性，代入可能性，削除可能性は実際には変数の取り得る値を削除する際に用いられる．一方で含意性，固定可能性は変数の値を一つ定めることに用いられるので，探索範囲の削減においてはこれらの概念の方が望ましい．従って，本論文では含意性，固定可能性について主に扱う．

これらの部分割当ては充足可能性保存割当てとして個別に提案されてきたが，これらの概念を包括的に扱い，その間の関係を調べ，計算複雑さを求めるという理論的な研究を行ったのは Bordeaux–Cadoli–Mancini [10] である．なお，彼らは部分割当てとして一つの変数への割当

てを考えた．これらの間の関係として，含意割当ては矛盾割当ておよび固定割当てを導き，交換可能割当て，固定可能割当て，矛盾割当ては代入可能割当てを導き，代入可能割当ては削除可能割当てを導くことが示された．従って，削除可能割当てがこの中で最も一般的な定義となる．また，計算複雑さに関しては，ある割当てが与えられたときに，それぞれの性質をみたすか否かの判定が coNP 完全であることが示された．そこで，効率的に判定するために，局所的な定義や問題を部分クラスに制限することが考えられた．

局所的な定義とは解集合でなく制約に対してされる定義を指す．それぞれの性質が局所的に成立するならば大域的，すなわち，解集合においても成立することが望ましい．そこで，大域的に同じ性質が成立するために，すべての制約においてその性質が成立することを要請する場合と，ある制約においてその性質が成立することを要請する場合の二種類が考えられている．たとえば，固定可能割当ての場合は，すべての制約において固定可能であれば，大域的に固定可能となる．また，含意割当ての場合は，ある一つの制約において含意割当てであれば，大域的にも含意割当てとなる．これらを以下の表 1.2 にまとめる．

表 1.2. 局所的な概念の定義

すべての制約で成立	交換可能，代入可能，固定可能割当て
ある制約で成立	矛盾割当て，含意割当て

局所的な概念は大域的な概念よりも狭まる，すなわち，大域的に成立していても局所的に成立するとは限らないが，多くの場合において効率的に求められるという利点がある．特に，各制約における許される値の組の集合が定数サイズであれば，各制約における充足可能性保存割当ての集合は定数時間で求めることができる．しかし，最も一般的な定義である削除可能割当てにおいては上記の二種類どちらにおいても局所的な性質が大域的な性質を導くとは限らないことが知られている [10].

部分クラスにおける計算複雑さに関して，制約充足問題では扱える制約の集合を制限した際の計算複雑さが盛んに研究されているのは前節で述べた通りである [16, 18, 34, 102]. Bordeaux–Cadoli–Mancini は多項式時間可解クラスとなる制限においてその制限がある性質を満たせば，上記の充足可能性保存割当ての判定がそれぞれ多項式時間でできることを示した．

1.1.2　SAT とオータークク割当て

SAT に対しては，オーターク割当てが充足可能性保存割当てとして導入された．オーターク割当てとは，部分割当てであって，値を割当てられた変数を含む節がすべてその部分割当て

によって充足されるような部分割当てのことである．従って，オータークー割当てはそれ自体が局所的な概念である．オーターク割当ては Monien-Speckenmeyer [90] により，k-SAT 問題 (k は自然数) に対する高速な指数時間アルゴリズムの開発のために導入された．その後，Kullmann [74] により導出反駁との関係が解析されている．

非自明なオーターク割当てを求めることは NP 困難であることが知られている．線形オーターク割当ては線形計画問題を解くことにより多項式時間で得られる特殊なオーターク割当てである [74]．2SAT [32] やホーン SAT [50]，q-ホーン SAT [11] などの良く知られた多項式時間可解クラスは単位伝播および線形オーターク割当てを求めることにより解けることが知られている [74, 108]．ここで単位伝播とは，単位節，すなわち，一つのリテラルのみを含む節が存在した際にはその節を満たすように値を割当てる操作のことである．

その後，線形オーターク割当ては重み付き線形オーターク割当てへと拡張された [75]．同時に，任意のオーターク割当てに対してある重みが存在して，そのオーターク割当てはその重みのもとでの重み付き線形オーターク割当てとなることが示された [75]．従って，オーターク割当てを含むような「良い」重みを求めること自体が難しいことがいえる．その後，「良い」重みを求めるヒューリスティクスが提案されている [51]．

このほかに，SAT の部分クラスにおけるオーターク割当てを解析する研究がある．Marek–Truszczyński [85] は，2 論理積形およびホーン論理積形を扱っている．特に，極小なオーターク割当ての解析が行われた．ここで，極小性は部分割当てに対応するリテラル集合の包含の意味での極小性である．Marek–Truszczyński は 2 論理積形に対して極小なオーターク割当てを求めるアルゴリズムを提案し，すべてのオーターク割当てが極小なオーターク割当ての和集合として書けることを示した．また，ホーン論理積形に対しては，極小なオーターク割当てが正かもしくは負であることを示した．ここで，部分割当てが正 (負) であるとは，割当てる値がすべて 1 (0) であるときにいう．彼らは極小な正のオーターク割当てすべてを与え，任意の正なオーターク割当てがこれらの和集合として書けることを示した．さらに，負なオーターク割当てで k 個以下の変数を用いるものが存在するか否かの判定が NP 完全であることを示した．

なお，本論文との関連は少ないが，オーターク割当ては極小な充足不能部分論理積形を求める際にも用いられている [19]．論理積形が極小充足不能であるとは，充足不能でありかつどの節を除いても充足可能になるときにいう．極小な充足不能部分論理積形は，論理積形が充足不能である原因を探る上で重要な概念である．オーターク割当てによって満たされる節は極小な充足不能部分論理積形に含まれないことが示せるので，オーターク割当てを求めることは極小な充足不能部分論理積形を求める上で有用である．またオーターク割当ての中でも特殊なものを考察する研究も行われている．特に，マッチングオーターク割当てはグラフ理論におけるマッチングと関係しており，節数と変数の数の差が小さいような論理積形の極小充足不能性を

判定するアルゴリズムを開発する際に利用されている [35, 73, 106].

最後に，オータークー割当ての拡張について述べる．SAT では変数の取り得る値が二値であるが，Kullmann [77] はオータークー割当てを多値の問題へと拡張した．そこでは，節を一般化した制約を考え，オータークー割当ての組合せ的な性質が保たれていることが示された．また，部分割当てを制約問題の問題例集合に対する作用とみなしてオータークー割当ての性質を一般化する研究も行われている [75, 76].

1.1.3 SAT に対する計算複雑さの指標

ここでは，SAT の計算複雑さを統一的に扱った Boros–Crama–Hammer–Saks [12] の研究について述べる．SAT とは，論理積形

$$\varphi(x) = \bigwedge_{i=1}^{m}\Big(\bigvee_{j\in J_i^+} x_j \vee \bigvee_{j\in J_i^-} \overline{x}_j\Big) \tag{1.1}$$

が与えられた際に，$\varphi(x)=1$ となる $x\in\{0,1\}^n$ が存在するか否かを判定する問題である．ここで $J_i^+, J_i^- \subseteq [n]$ であり $J_i^+ \cap J_i^- = \emptyset$ とする（$i=1,\ldots,m$）．SAT は一般に NP 完全であり，2SAT [32] やホーン SAT [50]，改名ホーン SAT [83] などの多項式時間可解クラスが提案された．しかしながらこれらの多項式時間可解クラスは個別に与えられるのみであった．そのような中で Boros–Crama–Hammer–Saks [12] は，これらの多項式時間可解クラスを統一的に捉える計算複雑さの指標を提案した．具体的には，以下の線形計画問題の最適値が計算複雑さの指標となることを示した．

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & Z & \\ \text{subject to} & \sum_{j\in J_i^+}\alpha_j + \sum_{j\in J_i^-}(1-\alpha_j) \le Z & (i=1,\ldots,m), \\ & 0\le \alpha_j \le 1 & (j=1,\ldots,n). \end{array} \tag{1.2}$$

すなわち，Boros–Crama–Hammer–Saks は，線形計画問題 (1.2) の最適値が 1 以下となる問題例の集合は線形時間可解であり，任意の定数 $\varepsilon > 0$ に対して最適値が $(1+\varepsilon)$ 以下となるような問題例の集合は NP 完全であることを示した．さらに，最適値が 1 以下となる問題例の集合が 2SAT やホーン SAT，改名ホーン SAT を含むことを示した．

なお，線形計画問題 (1.2) の最適値が 1 以下となる論理積形は q-ホーン論理積形と呼ばれ，Boros–Crama–Hammer [11] により導入されたものであり，q-ホーン SAT に対する線形時間アルゴリズムはこの時点で開発された．そして，このアルゴリズムにおいて固定可能割当てが用いられてることに言及しておく．すなわち，このアルゴリズムは，q-ホーン論理積形の節集合を二つに分割し，片方の部分集合に対する解で固定可能割当てになるものが存在することを

利用してこの固定可能割当てを代入してもう片方の部分集合を解くアルゴリズムである．より詳細には，片方の部分集合がホーン論理積形になり，ホーン論理積形に対する極小解が固定可能割当てとなる．そして，この極小解を代入するともう片方の部分集合は 2 論理積形となる．ホーン論理積形の極小解を求めること [29] および 2 論理積形を解くこと [32] は線形時間で行え，分割自体も線形時間で求められる [13] ので，全体として線形時間アルゴリズムとなる．

1.2　本論文における成果

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

1.3　論文の構成

本論文の構成は以下の通りである．第 2 章では扱う問題および充足可能性保存割当ての定義を与える．本論文の成果は第 3 章から第 7 章で示す．第 3 章では第 2 章で定義した充足可能性保存割当てとその局所的な概念との関係を明らかにする．第 4 章では線形充足可能性保存割当てを考え，極大性を解析する．これらの章の結果は [71] に基づく．第 5 章ではホーン論理積形を扱い，線形オータ―ク割当ての組合せ的な特徴付けを与える．第 6 章では整数線形不等式系に対する線形局所固定可能割当ての応用を与える．第 5 章の結果は [72] に，第 6 章の結果は [71] に基づく．第 7 章では整数線形不等式系に対する計算複雑さの指標を与える．ここでは，効率的なアルゴリズムの開発において固定可能割当てが重要となる．第 7 章の結果は [67, 68, 69, 70] に基づく．最後に第 8 章にて，本論文の成果をまとめ，今後の課題を記す．

第 2 章

準備

2.1 記号

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ はそれぞれ整数, 有理数, 実数全体の集合を表すとする．また, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Z}_+$ はそれぞれ非負実数, 非負有理数, 非負整数全体の集合を表すとし，$\mathbb{R}_{++}$，$\mathbb{Q}_{++}$，$\mathbb{Z}_{++}$ はそれぞれ正の実数, 正の有理数, 正の整数全体の集合を表すとする．正の整数 k に対して $[k] = \{1, \ldots, k\}$ とする．二つの実数 r，s で $r < s$ となるものに対し，$[r, s) = \{\gamma \in \mathbb{R} \mid r \leq \gamma < s\}$，$(r, s] = \{\gamma \in \mathbb{R} \mid r < \gamma \leq s\}$，$[r, s] = \{\gamma \in \mathbb{R} \mid r \leq \gamma \leq s\}$ と定義する．

二つのベクトル r，$s \in \mathbb{R}^n$ に対し，$r_j \geq s_j$ が任意の $j \in [n]$ に対して成立するとき，$r \geq s$ とかく．また，二つのベクトル r，$s \in \mathbb{R}^n$ に対し，$r_j > s_j$ が任意の $j \in [n]$ に対して成立するとき，$r \gg s$ とかく．ここで，$r > s$ は $r \gg s$ とは異なることに注意されたい．前者は $r \geq s$ かつ $r \neq s$ であることを意味する．

$R \subseteq \mathbb{R}^n$ が錐であるとは，任意の $\gamma > 0$ および $r \in R$ に対して $\gamma r \in R$ が成立するときにいう．錐 $R \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し，常に $0 \in R$ とは限らないことに注意されたい．$\mathbb{R}^n$ の部分集合 R が (閉) 多面錐，開多面錐であるとは，行列 $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ によりそれぞれ $R = \{r \in \mathbb{R}^n \mid Gr \geq 0\}$，$R = \{r \in \mathbb{R}^n \mid Gr \gg 0\}$ と書けるときにいう．また行列 $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対し，$\{r \in \mathbb{R}^n \mid Gr \geq 0\}$，$\{r \in \mathbb{R}^n \mid Gr \gg 0\}$ をそれぞれ G から導かれる (閉) 多面錐，開多面錐という．多面錐を線形錐とも呼ぶ．$\mathbb{R}^n$ の部分集合 R が多面体的凸集合もしくは多面体であるとは，行列 $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ およびベクトル $h \in \mathbb{R}^m$ により $R = \{r \in \mathbb{R}^n \mid Gr \geq h\}$ と書けるときにいう．

2.2 数学的準備

ここでは線形計画問題，ファルカスの補題，分離定理，ホーン不等式系における極小解の存在性，擬多項式時間可解性，弱・強 NP 困難性について説明する．

線形計画問題は多項式時間で解ける最適化問題の中でも最も基本的かつ重要な問題の一つである．線形計画問題とは，行列 $G \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ およびベクトル $h \in \mathbb{Q}^m, r \in \mathbb{Q}^n$ が与えられたときに，

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & rx \\ \text{subject to} & Gx \geq h, \end{array} \tag{2.1}$$

を解く問題である．より正確には，$Gx \geq h$ を達成する x の中で rx を最大にするものを求めるか，$\{x \in \mathbb{Q}^n \mid Gx \geq h\}$ が空であることを判定するか，もしくは $Gx \geq h$ を達成する x の中で rx がいくらでも大きくなるようなものが存在することを判定する問題である．この問題を解くアルゴリズムとしては単体法や楕円体法，内点法が有名である．特に，この問題は楕円体法や内点法により多項式時間で解けることが知られている．詳しくは [46, 103] などを参照されたい．

ここで，ファルカスの補題について述べる．詳しくは [112] などを参照されたい．ファルカスの補題は，線形不等式系の実行可能性に関する補題であり，不等式系の与えられ方に応じていくつかの変種が存在する．ここでは，後の章で直接的に用いられる形式で記述する．

補題 2.2.1 (ファルカスの補題)**.** 行列 $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ およびベクトル $h \in \mathbb{R}^m$ に対して以下のどちらか一方のみが必ず成立する．

1. $\exists r \in \mathbb{R}^n : Gr \geq h.$
2. $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m_+ : \lambda G = 0, \lambda h > 0.$

ここで，行列 G およびベクトル h が $G \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ および $h \in \mathbb{Q}^m$ をみたすならば，上記の補題において，ベクトルの存在範囲を有理数ベクトルに限定した主張が成立することに注意されたい．

ここでは，二つの凸集合を一つの超平面で分ける分離定理について説明する．$R \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し，$\mathrm{ri}(R)$ は R の相対的内点を表すとする．

定理 2.2.1 (定理 11.3 [98])**.** K_1，K_2 を非空な $\mathbb{R}^n$ 内の凸集合とする．このとき，$\mathrm{ri}(K_1) \cap$

$\mathrm{ri}(K_2) = \emptyset$ であればそのときのみ，ある超平面 $\{r \in \mathbb{R}^n \mid \alpha r = \beta\}$ が存在して $K_1 \subseteq \{r \in \mathbb{R}^n \mid \alpha r \geq \beta\}$ かつ $K_2 \subseteq \{r \in \mathbb{R}^n \mid \alpha r \leq \beta\}$ が成立し，さらに．K_1 もしくは K_2 のどちらかは $\{r \in \mathbb{R}^n \mid \alpha r = \beta\}$ と共通部分をもたない．

二つの集合 $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ のミンコフスキー和 $R_1 + R_2$ は

$$R_1 + R_2 = \{r_1 + r_2 \mid r_1 \in R_1, r_2 \in R_2\} \tag{2.2}$$

と定義される．集合 $R \subseteq \mathbb{R}^n$，実数 $\gamma \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma R = \{\gamma r \mid r \in R\}$ とする．

定理 2.2.2 (系 19.3.3 [98])**.** K_1，K_2 を非空で交わりをもたない多面体的凸集合とする．このとき，ある超平面 $\{r \in \mathbb{R}^n \mid \alpha r = \beta\}$ および $\varepsilon > 0$ が存在して $K_1 + \varepsilon B \subseteq \{r \in \mathbb{R}^n \mid \alpha r > \beta\}$ かつ $K_2 + \varepsilon B \subseteq \{r \in \mathbb{R}^n \mid \alpha r < \beta\}$ が成立する．

ここでホーン不等式系が解をもつならば，それは唯一の極小解をもつことを示す．ここで，$Gx \geq h$ がホーン不等式系であるとは，G がホーン，すなわち，G の各行の正の成分が高々一つであるときにいう．また，x^* が不等式系に対する唯一の極小解であるとは，それが解であり，さらに任意の解 x に対して $x^* \leq x$ をみたすときにいう．整数線形不等式系

$$Gx \geq h,\ x \in \{0, 1, \ldots, d\}^n \tag{2.3}$$

を考える．二つのベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\min(x, y) = (\min(x_1, y_1), \ldots, \min(x_n, y_n))$ とする．

補題 2.2.2. ベクトル x, y をホーン行列 G に対する不等式系 (2.3) の実行可能解とする．このとき，$\min(x, y)$ もまた (2.3) の実行可能解となる．

証明．一つの不等式 $gx \geq \zeta$ に対して示せば十分である．一般性を失うことなく，$g_1 \geq 0$ かつ $g_j \leq 0$ $(j = 2, \ldots, n)$ とし，さらに $\min(x_1, y_1) = x_1$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} g \min(x, y) &= \textstyle\sum_{j=1}^n g_j \min(x_j, y_j) \\ &\geq g_1 x_1 + \textstyle\sum_{j=2}^n g_j \min(x_j, y_j) \\ &\geq g_1 x_1 + \textstyle\sum_{j=2}^n g_j x_j \\ &\geq \zeta, \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる．従って，$\min(x, y)$ も $gx \geq \zeta$ をみたす． □

上記の補題より，(2.3) におけるすべての (有限個の) 実行可能解 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$ について min を施して施してできたベクトル $\min(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)})$ は，また (2.3) に含まれてお

り，これは明らかに唯一の極小解である．

ここでは，計算複雑さに関する定義を簡単に復習する．多項式時間可解性や NP 困難性については既知のものとし，擬多項式時間可解性および弱・強 NP 困難性について説明する．これらの概念は，問題の数値情報のサイズに関する計算複雑さを考慮している．従って，以下では，考える問題は入力に数値を含むものとする．

ある問題が擬多項式時間可解であるとは，その問題を解くアルゴリズムで，計算時間が入力サイズおよび入力の数値自体の多項式オーダーで抑えられるものが存在するときにいう．ある問題が弱 NP 困難であるとは，単に NP 困難であることを意味する．一方で，ある問題が強 NP 困難であるとは，その入力数値を入力の多項式オーダーに制限した問題が NP 困難であるときにいう．

たとえば，整数線形不等式の実行可能性問題は入力として数値を含む．そしてこの問題は強 NP 困難である．これは，整数線形不等式の入力の数値を入力の多項式オーダーに制限した問題に SAT が含まれること，および SAT が NP 困難であることに従う．実際，論理積形 $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j\in J_i^+} x_j \vee \bigvee_{j\in J_i^-} \overline{x}_j\right)$ が与えられたとき，整数線形不等式が以下のように構成できる．

$$\begin{array}{rcll}\sum_{j\in J_i^+} x_j + \sum_{j\in J_i^-}(1-x_j) & \geq & 1 & (i=1,\ldots,m),\\ x & \in & \{0,1\}^n. & \end{array} \tag{2.5}$$

つまり，G は行列で

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & (j\in J_i^+)\\ -1 & (j\in J_i^-)\\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{2.6}$$

と定義され，h はベクトルで

$$h_i = 1 - |J_i^-| \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{2.7}$$

と定義され，$d=2$ である．従って，数値情報のサイズは n, m の多項式オーダーで抑えられる．さらに，φ が充足可能であれば，そのときのみ $Gx \geq h$ をみたす $x \in \{0,1\}^n$ が存在する．なお，この整数線形不等式系による SAT の定式化は後の章でも幾度か用いられる．

2.3 扱う問題

2.3.1 制約充足問題

制約充足問題とは，変数集合 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$，変数の定義域 D，制約集合 $F = \{C_1, \ldots, C_m\}$ が入力として与えられる．ここで，D は有限集合であり，各制約 C_i は $D^{V(C_i)}$ の部分集合である．ここで，$V(C) \subseteq V$ は制約 C に付随する変数の部分集合である．このとき，変数への値の割当て $A \in D^V$ が，全ての制約 $C \in F$ に対して A を $V(C)$ に制限したものが C に含まれるとき，A を制約充足問題の問題例 (V, D, F) に対する解もしくは充足割当てという．ここで，A を $X \subseteq V$ へ制限した部分割当とは，D^X の元であり，各成分 $x \in X$ において A と値が一致するものである．A の $X \subseteq V$ への制限を $\pi_X(A)$ と記す．制約充足問題とは，与えられた問題例 (V, D, F) に対する解を求める問題である．なお，制約充足問題の一つの問題例に対する解集合は D^V の部分集合 S となる．従って，ある部分集合 $S \subseteq D^V$ に対して，(V, D, F) の解集合が S と一致するとき，(V, D, F) を S の表現と呼ぶ．

解集合 $S \subseteq D^n$ が単調であるとは，任意の $x, y \in D^n$ に対し，$x \in S$ かつ $x \leq y$ であれば $y \in S$ が成立するときにいう．二つのベクトル $x, y \in D^n$ に対し，大小関係を成分ごとに区別して定義することを考える．大小の方向を定めるベクトル $o \in \{0,1\}^n$ に対し，$o_j = 0$ ならば $x_j \leq y_j$ かつ $o_j = 1$ ならば $x_j \geq y_j$ が成り立つとき $x \leq_o y$ とかく．解集合 $S \subseteq D^n$ がユネイトであるとは，あるベクトル $o \in \{0,1\}^n$ が存在して，任意の $x, y \in D^n$ に対し，$x \in S$ かつ $x \leq_0 y$ であれば $y \in S$ が成立するときにいう．このとき，S は o に関して単調であるともいう．

2.3.2 充足可能性問題

制約充足問題の問題例 (V, D, F) において，$D = \{0, 1\}$ であり，各制約 C_i が $C_i = \bigvee_{j \in J_i^+} x_j \vee \bigvee_{j \in J_i^-} \overline{x}_j$ で与えられるときに，この問題を特に充足可能性問題 (SAT) と呼ぶ．ここで $i = 1, \ldots, m$ に対し $J_i^+, J_i^- \subseteq [n]$ であり $J_i^+ \cap J_i^- = \emptyset$ とする．また，制約 C_i に現れる変数 x およびその否定 $\overline{x}$ をそれぞれ正および負のリテラルと呼ぶ．SAT の問題例を特に φ で記す．φ は論理積形もしくは論理積標準形と呼ばれる．SAT の問題例 φ に対して解が存在するとき，その問題例ないし論理積形 φ は充足可能であるという．各制約 C_i は節と呼ばれ，c_i とも書く．節 c は，$|V(c)| = 1$ のとき単位節と呼ばれる．φ を $\{0,1\}^n$ から $\{0,1\}$ への関数であり，$x \in \{0,1\}^n$ に対して $x \in \varphi$ ならばそのときのみ $\varphi(x) = 1$ となる (従って，$x \notin \varphi$ ならばそのときのみ $\varphi(x) = 0$ となる) 関数とみなすこともある．節に関しても同様で

ある．$V^+(c)$ および $V^-(c)$ はそれぞれ節 c に正のリテラルおよび負のリテラルとして現れる変数の集合を表すとする．従って，$V(c) = V^+(c) \cup V^-(c)$ が成立する．論理積形 φ は節の集合としても扱われ，節 c はリテラルの集合としても扱われる．

論理積形 φ が，φ に含まれる任意の節 c を真部分節 c' $(\subsetneq c)$ に置き換えると表現する解集合が変わるとき，φ を主論理積形と呼ぶ．また，論理積形 φ に対して，節 c が，任意の $x \in \{0,1\}^n$ に対して $\varphi(x) = 1$ ならば $c(x) = 1$ をみたすとき，c を φ の外節という．定義より，論理積形 φ の外節を φ に新たに加えた論理積形は φ と同じ解集合をもつことがいえる．

ここで，導出と呼ばれる，二つの節から新たな節を生成する操作について説明する．節 c に対して $\overline{c} = \{\overline{\ell} \mid \ell \in c\}$ とする．導出とは，節 c_1，c_2 で $c_1 \cap \overline{c}_2 = \{\ell\}$ をみたすものから，節 $c_1 \diamond c_2 = (c_1 \setminus \{\ell\}) \cup (c_2 \setminus \{\overline{\ell}\})$ を生成する操作である．さらに $|c_1| = 1$ もしくは $|c_2| = 1$ が成り立つとき，この操作は単位導出と呼ばれる．

例 2.3.1. $c_1 = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3, c_2 = \overline{x}_1 \vee x_3 \vee x_4$ とする．このとき，$c_1 \cap \overline{c}_2 = \{x_1\}$ であり，$c_1 \diamond c_2 = \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4$ である．

なお，論理積形 φ および節 c に対し，ある導出の列 $\{(c_{11} \diamond c_{12}), (c_{21} \diamond c_{22}), \ldots, (c_{k1} \diamond c_{k2})\}$ が存在し，各 c_{ij} が $c_{ij} \in \varphi$ もしくはある $i' < i$ に対し $c_{ij} = c_{i'1} \diamond c_{i'2}$ をみたし，さらに $c = (c_{k1} \diamond c_{k2})$ となるならば，c は φ から導出の列により生成されるという．c が φ から導出の列により生成されるのであれば，c は φ の外節であることが帰納的に示せる．従って，導出により生成された節を φ に新たに加えた論理積形は φ と同じ解集合をもつことがいえる．

ここで，本論文と密接に関係する SAT の部分クラスを導入する．論理積形 φ は $|J_i^+ \cup J_i^-| \leq 2$ がすべての $i = 1, \ldots, m$ に対して成り立つとき，2 論理積形という．また，$|J_i^+| \leq 1$ がすべての $i = 1, \ldots, m$ に対して成り立つとき，ホーン論理積形という．変数の正負を適切に変えることでホーン論理積形にできるとき，改名ホーン論理積形という．さらに，以下の線形計画問題の最適値が 1 以下であるときには q-ホーン論理積形という．

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & Z & \\ \text{subject to} & \sum_{j \in J_i^+} \alpha_j + \sum_{j \in J_i^-} (1 - \alpha_j) \leq Z & (i = 1, \ldots, m), \\ & 0 \leq \alpha_j \leq 1 & (j = 1, \ldots, n). \end{array} \tag{2.8}$$

例 2.3.2. 論理積形 $\varphi = (x_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)$ に対し，線形計画問

題 (2.8) は

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & Z & \\
\text{subject to} & \alpha_1 + (1-\alpha_2) & \leq Z, \\
 & (1-\alpha_1) + (1-\alpha_2) + \alpha_3 + (1-\alpha_4) & \leq Z, \\
 & (1-\alpha_1) + (1-\alpha_2) + (1-\alpha_3) + \alpha_4 & \leq Z, \\
 & 0 \leq \alpha_j \leq 1 \quad (j = 1, \ldots, n) &
\end{array}
\tag{2.9}
$$

となり，一つの最適解として $Z = 1$，$\alpha_1 = 1$，$\alpha_2 = 1$，$\alpha_3 = 1/2$，$\alpha_4 = 1/2$ をもつ．

SAT は，入力が 2 論理積形 [32]，ホーン論理積形 [50]，改名ホーン論理積形 [83]，もしくは q-ホーン論理積形 [11] で与えられたときには，多項式時間可解であることが知られている．また，2 論理積形，ホーン論理積形，改名ホーン論理積形は q-ホーン論理積形であることも知られている [11].

2.3.3 整数線形不等式系の実行可能性問題

本論文で扱う最後の問題は整数線形不等式系の実行可能性問題である．制約充足問題の問題例 (V, D, F) において，$D = \{0, 1, \ldots, d\}$ であり，各制約 C_i が線形不等式 $g_i x \geq h_i$ で与えられるときに，この問題を特に整数線形不等式系の実行可能性問題と呼ぶ．すなわち，入力として行列 G およびベクトル h，正整数 d が与えられた際に，$Gx \geq h$ を満たす整数ベクトル $x \in \{0, 1, \ldots, d\}^n$ を求める問題である．

整数線形不等式系の実行可能性問題は一般には強 NP 完全であることが知られている．一方で，問題をうまく制限した際には効率的に解けることも知られている．たとえば，n が定数であるとき [82] や G が完全単模行列であるとき [53] には多項式時間で解けることが知られている．また，m が定数であるとき [95] は擬多項式時間可解であることが知られている．m が定数のときには弱 NP 完全であることも知られている．

本論文と関係する部分クラスとしては以下がある．行列 G は各行の非ゼロ成分が高々二つのとき二次であるといい，各行の正の成分が高々一つのときホーンであるという．整数線形不等式系の実行可能性問題は入力行列が二次のとき [5, 52]，もしくはホーンのとき [42, 109] には擬多項式時間可解であることが知られている．現在，最速の計算複雑さとしては，二次の場合は $\mathrm{O}(md)$ 時間 [5, 52]，ホーンの場合は $\mathrm{O}(n^2 md)$ 時間 [42] で解けることが知られている．なお， [5, 52] のアルゴリズムは両方とも [32] に基づいている．また，入力行列が二次ホーン（単調二次）であっても弱 NP 完全であることが知られている [80].

また，単位整数線形不等式系の実行可能性問題，すなわち，入力行列 G の各成分が $-1, 0, 1$ のいずれかの値を取るとき，この問題は依然として強 NP 困難であるが，多項式時間可解部

分クラスも多く知られている．この場合は，入力行列が二次のとき [56]，もしくはホーンのとき [21] に多項式時間可解であることが知られている．現在，最速の計算複雑さとしては，二次の場合は $\mathrm{O}(nm)$ [81] もしくは $\mathrm{O}(n \log n + m)$ [104]，ホーンの場合は $\mathrm{O}(n^2 m)$ [21, 105] で解けることが知られている．また，二次ホーン不等式系に対しては，この問題はネットワーク理論における負閉路検出と等価な問題であることが知られており，$\mathrm{O}(nm)$ [8, 36, 92] もしくは $\mathrm{O}(\sqrt{n}m \log \zeta)$ [43] で解けることが知られいてる．ここで，ζ は h の負の成分の絶対値の最大値を表す.

2.4　充足可能性保存割当て

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

第 3 章

様々な充足可能性保存割当ての間の関係

3.1 概説

本章では第 2 章で定義した充足可能性保存割当てに対し，それらの関係を局所的な概念をも含めて示す．一般の制約においては，局所充足，充足，オーターク，局所固定可能，固定可能，充足可能性保存割当ての順で部分割当ての集合として大きくなっていくことを示す．また，局所充足割当てと充足割当てが一致することを示す．さらに，制約が論理積形で与えられる場合にはオーターク割当てと局所固定可能割当てが一致し，主論理積形で与えられる場合には局所固定可能割当てと固定可能が一致することを示す．

まず準備として，先行研究において知られている結果を示し，その後に，本論文の成果を示す．先行研究では一般の制約において，固定可能，含意，削除可能，矛盾，代入可能，交換可能割当ての関係について示された．また，与えられた部分割当てがこれらの性質をみたすか否かの判定が coNP 完全であることも示された．先行研究においては，一変数に対する割当てのみが考えられていることに注意されたい．

3.2 先行研究

本節では，Bordeux–Cadoli–Mancini [10] による結果を述べる．彼らは，固定可能，含意，削除可能，矛盾，代入可能，交換可能割当ての関係について調査した．固定可能割当ては第 2 章で定義したので，ここでは含意，削除可能，矛盾，代入可能，交換可能割当てを定義する．なお，充足可能性保存変換としては，固定可能・含意割当ては変数への割当てを一つ定めることに，削除可能・矛盾割当ては変数への割当てを一つ削除することに用いることができる．ま

た，代入可能・交換可能割当ては二つの割当ての間の関係であり，これらも変数への割当てを一つ削除することに用いることができる．本論文では，変数への割当てを一つ定めることに焦点を当てるので，後の節や章では固定可能割当ておよび含意割当て，特に，より一般的な定義である固定可能割当てに関して解析を行う．

定義 3.2.1. (D, V, F) を解集合 S をもつ制約充足問題の問題例とする．このとき，部分割当て $x = a$ は $\bigcup_{b \neq a} S[x = b] = \emptyset$，$S[x = a] \subseteq \bigcup_{b \neq a} S[x = b]$，$S[x = a] = \emptyset$ をみたすときそれぞれ，(D, V, F) に対する含意，削除可能，矛盾割当てという．

　また，二つの部分割当て $x = a, x = b$ に対し，$S[x = a] \subseteq S[x = b]$ および $S[x = a] = S[x = b]$ をみたすとき $x = a$ は $x = b$ にそれぞれ代入可能および交換可能であるという．

例 3.2.1. $(D = \{0, 1, 2\}, V = \{x_1, x_2, x_3\}, F)$ を解集合 S が以下で与えられる制約充足問題の問題例とする．

$$S = \{(0, 0, 0), (0, 0, 2), (1, 0, 0), (1, 0, 2), (2, 0, 0)\}. \tag{3.1}$$

このとき，$x_2 = 0$，$x_1 = 1$，$x_2 = 1$ はそれぞれ (D, V, F) に対する含意，削除可能，矛盾割当てである．実際，$S[x_2 = 1] = S[x_2 = 2] = \emptyset$，$S[x_3 = 2] = \{(0, 0), (1, 0)\} \neq \emptyset$，$S[x_3 = 1] = \emptyset$ である．

　また，$x_1 = 2$ は $x_1 = 0$ に代入可能であり，$x_1 = 0$ は $x_1 = 1$ に交換可能である．実際，$S[x_1 = 0] = \{(0, 0), (0, 2)\}$，$S[x_1 = 1] = \{(0, 0), (0, 2)\}$，$S[x_1 = 2] = \{(0, 0)\}$ なので，$S[x_1 = 2] \subseteq S[x_1 = 0]$ かつ $S[x_1 = 0] = S[x_1 = 1]$ が成立する．

定理 3.2.1 ([10])**.** 制約充足問題の問題例 (D, V, F) に対し，$x = a$ が含意割当てならば固定可能割当てである．$x = a$ が含意割当てならばそのときのみ任意の $b \neq a$ に対して $x = b$ は矛盾割当てである．$x = a$ が固定可能割当てならばそのときのみ任意の $b \neq a$ に対して $x = b$ は $x = a$ に代入可能である．$x = a$ が矛盾割当てならば任意の $b \neq a$ に対して $x = a$ は $x = b$ に代入可能である．$x = a$ がある $x = b$ $(b \neq a)$ に対して代入可能ならば $x = a$ は削除可能割当てである．

　$x = a$ と $x = b$ が互いに代入可能であればそのときのみ $x = a$ と $x = b$ は交換可能である．

証明．それぞれ，定義から従う．　□

　次に，これらの割当てを求める計算複雑さに関する結果を示す．まず，部分割当て $x = a$ が与えられたときにそれぞれの性質が成立するか否かの判定が coNP 完全であることを示す．

定理 3.2.2 ([10])**.** (D, V, F) を制約充足問題の問題例とし，$x \in V$ かつ $a \in D$ とする．この

とき，部分割当て $x = a$ がそれぞれ固定可能，矛盾，削除可能，含意割当てであるか否かの判定は coNP 完全である．

また，$x \in V$ および $a \neq b \in D$ に対し，$x = a$ が $x = b$ にそれぞれ代入可能，交換可能であるか否かの判定は coNP 完全である．

証明．それぞれ，coNP に含まれることは明らかであるので，coNP 困難であることを示す．制約充足問題が SAT として与えられる場合に示す．すなわち，$D = \{0, 1\}$ とし F が論理積形 φ で与えられるとする．

まず，$\psi = \varphi \wedge y$ を考える．ここで，y は新たな変数である．φ および ψ の解集合をそれぞれ S_φ および S_ψ とする．このとき，φ が充足可能であればそのときのみ ψ も充足可能である，すなわち，$S_\varphi \neq \emptyset$ ならばそのときのみ $S_\psi \neq \emptyset$ が成立する．また，$S_\varphi = \emptyset$ ならばそのときのみ $S_\psi[y = 0] = S_\psi[y = 1] = \emptyset$ であり，$S_\varphi \neq \emptyset$ ならばそのときのみ $S_\psi[y = 0] = \emptyset$ かつ $S_\psi[y = 1] \neq \emptyset$ であり，従って $S_\psi[y = 0] \subsetneq S_\psi[y = 1]$ であることに注意されたい．

以上の観察より，φ が充足可能であることはそれぞれ $y = 0$ が ψ に対して固定可能でないこと，$y = 0$ が ψ に対して含意でないこと，$y = 1$ が ψ に対して削除可能でないこと，$y = 1$ が ψ に対して矛盾でないことと等価である．

また，φ が充足可能であればそのときのみ $y = 1$ が $y = 0$ に代入可能でなく，$y = 0$ が $y = 1$ に交換可能でない． □

また，Bordeux–Cadoli–Mancini [10] はそれぞれの割当てに対して局所的な定義も与えている．このとき，すべての制約においてその性質をみたすべきかもしくはある制約においてその性質をみたすべきかの二通りの局所的な定義が存在する．

定理 3.2.3 ([10])**.** (D, V, F) を解集合 S をもつ制約充足問題の問題例とする．このとき，部分割当て $x = a$ は各制約 $C \in F$ に対して固定可能であるとき，(D, V, F) に対して固定可能である．また，$x = a$ はある制約 $C \in F$ に対する含意および矛盾割当てであるとき，それぞれ (D, V, F) に対する含意および矛盾割当てである．

また，二つの部分割当て $x = a, x = b$ $(a \neq b)$ に対し，各制約 $C \in F$ に対して $x = a$ が $x = b$ に代入可能および交換可能であるとき，それぞれ (D, V, F) に対して $x = a$ が $x = b$ に代入可能および交換可能である．

証明．まず，各制約 $C \in F$ に対して $C[x = a]$ は部分集合 $S_{C[x=a]} \subseteq D^{V \setminus \{x\}}$ を定める，すなわち，$S_{C[x=a]} = \{\pi_{V \setminus \{x\}}(A) \mid A \in D^V, \pi_{V(C)}(A) \in C, \pi_{\{x\}}(A) = a\}$ であることに注意されたい．従って，$S[x = a] = \bigcap_C S_{C[x=a]}$ である．

固定可能割当てに関してはより一般に多変数に対する割当てについて次節で示すのでここで

は省略する．

含意割当てに関して，$x = a$ がある制約 $C \in F$ に対して含意割当てであるとする．このとき $S_{C[x=b]} = \emptyset$ が各 $b \neq a$ に対して成り立つ．従って $S[x = b] = \bigcap_C S_{C[x=b]} = \emptyset$ となるので，$x = a$ は (D, V, F) に対する含意割当てである．また，$x = a$ がある制約 $C \in F$ に対して矛盾割当てであるとすると，$S_{C[x=a]} = \emptyset$ となるので $S[x = a] = \bigcap_C S_{C[x=a]} = \emptyset$ となり，従って $x = a$ は (D, V, F) に対する矛盾割当てである．

代入可能割当てに関して，各制約 $C \in F$ に対して $x = a$ が $x = b$ に代入可能であるとする．すると各制約 $C \in F$ に対して $S_{C[x=a]} \subseteq S_{C[x=b]}$ となる．よって，$\bigcap_C S_{C[x=a]} \subseteq \bigcap_C S_{C[x=b]}$ となり，(D, V, F) に対して $x = a$ は $x = b$ に代入可能となる．交換可能割当てに関しては，$x = a$ が $x = b$ に交換可能であることは $x = a$ が $x = b$ に代入可能でありかつ $x = b$ が $x = a$ 代入可能であることと等価なので代入可能割当てに対する結果から従う．　□

なお，以下で示すように，削除可能割当てに関しては，局所的な定義を上記の二通りどちらでしても大域的な削除可能性を導かない場合があることに注意されたい．

定理 3.2.4 ([10])**.** (D, V, F) を解集合 S をもつ制約充足問題の問題例とする．このとき，部分割当て $x = a$ は各制約 $C \in F$ に対して削除可能であっても，(D, V, F) に対して削除可能であるとは限らない．

証明．$(D = \{1, 2, 3\}, V = \{x_1, x_2\}, F)$ を F が以下の線形不等式系で与えられる制約充足問題の問題例とする．

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 0, \\ -x_1 + x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

すると，解集合 S は $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ となる．このとき，$x_1 = 2$ は各不等式に対しては削除可能であるが, S に対しては削除可能ではない．実際, $S[x = 1] = \{1\}$, $S[x = 2] = \{2\}$, $S[x = 3] = \{3\}$ となるので，$S[x = 2] \not\subseteq \bigcup_{b \neq 2} S[x = b]$ である．　□

3.3　主結果

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

第 4 章

線形充足可能性保存割当て

4.1 概説

本章では，ブール制約充足問題，すなわち，$D = \{0, 1\}$ の場合に焦点を当て，線形充足可能性保存割当てを扱う．ブールとは限らない一般の制約充足問題に対する線形充足可能性保存割当てについては第 6 章で言及する．

ここでは，n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を考え，実ベクトルを部分割当てと同一視する．そして，充足可能性保存割当てに対応する実ベクトルの集合に対する多面錐による内側近似，すなわち，そのような実ベクトルの集合に含まれる多面錐を考察する．Kullmann [74] における単純線形オータークク割当ては実際に特殊な多面錐による内側近似であることに注意されたい．そして，どのような多面錐が良い近似となるかについて解析する．特に，SAT，すなわち，論理積形 $\varphi = \wedge c_i$ に対して以下の主張を示す．

(1) φ の充足割当ての内側近似となる任意の開多面錐 K に対して，ある行列 M で c_i が x_j $(\overline{x}_j)$ を含むときのみ $M_{ij} > 0$ (< 0) となるものが存在して, M から導かれる開多面錐は K を含む内側近似となる．

(2) φ のオータークク割当ての内側近似となる任意の閉多面錐 K に対して，ある行列 M で c_i が x_j $(\overline{x}_j)$ を含むならばそのときのみ $M_{ij} > 0$ (< 0) となるものが存在して，M から導かれる閉多面錐は K を含む内側近似となる．

(3) φ が単調であるとき，c_i が x_j $(\overline{x}_j)$ を含むときのみ $M_{ij} > 0$ (< 0) となり，各行が非ゼロ成分を少なくとも一つ含む任意の行列 M に対して，M から導かれる開多面錐はすべての充足割当てを含む内側近似となる．

(4) φ が単調であるとき，c_i が x_j $(\overline{x}_j)$ を含むならばそのときのみ $M_{ij} > 0$ (< 0) となる任意の行列 M に対して，M から導かれる閉多面錐はすべてのオータークク割当てを含む内

側近似となる．

(5) φ が主単調であるとき，c_i が x_j $(\overline{x}_j)$ を含むならばそのときのみ $M_{ij} > 0$ (< 0) となる任意の行列 M に対して，M から導かれる閉多面錐はすべてのオータータク割当てを含む，凸集合の中で極大な内側近似となる．

4.2 準備

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

4.3 極大性の解析

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

第 5 章

ホーン論理積形に対する線形オーターク割当ての特徴付け

5.1 概説

本章ではホーン論理積形を考え，その非自明な線形オーターク割当てに対する組合せ的な特徴付けを与える．この特徴付けにより，非自明な線形オーターク割当てが存在するならばそれは線形時間で求められることを示す．線形オーターク割当ては線形計画問題を解くことにより多項式時間で求めることができるオーターク割当てであるものの，一般に線形計画問題を解くことは少なくない計算複雑さを要する．従って，組合せ的な特徴付けを与えて高速なアルゴリズムを開発することは有意義である．

また，線形オーターク割当ての解析の過程において，線形でない一般のオーターク割当ての解析も行う．そのためにまず，ホーン論理積形の極小なオーターク割当てを解析した先行研究 [85] を紹介する．ここで，極小性はリテラル集合の意味での極小性である．そして，ホーン論理積形に対する変数集合の意味での最大のオーターク割当てを与える．探索範囲を削減する上では，より大きなオーターク割当てを求めることが望ましいので，この結果は先行研究よりも有用な結果といえる．

5.2 準備

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

5.3　極小オータークー割当て

本節では，ホーン論理積形に対するオータークー割当てにおける先行研究の結果を記述する．本節の内容は Marek [86] に載っている内容である．

まず，部分割当をリテラル集合と同一視することを考える．部分割当 $X = A$ に対し，対応するリテラル集合を $\{x \mid x \in X, A_x = 1\} \cup \{\overline{x} \mid x \in X, A_x = 0\}$ として定義する．

Marek は，ホーン論理積形のオータークー割当てで，対応するリテラル集合の意味で極小なオータークー割当てに対する結果を与えた．一方で，本論文では線形オータークー割当てを解析するために，変数集合の意味での最大オータークー割当ての解析を行う．そして，最大オータークー割当てを陽に与える．多くの場合で，より大きなオータークー割当てを求めることが望ましいので，本論文の結果はこの意味でも興味深い結果であるといえる．

補題 5.3.1 ([86])**.** φ をホーン論理積形とし，$X = A$ を φ に対するオータークー割当てとする．このとき，$X' = \{x_j \in X \mid A_j = 0\}$，$A' = \pi_{X'}(A)$ とすると，$X' = A'$ も φ に対するオータークー割当てとなる．

証明．節 $c \in \varphi$ に対し，$V(c) \cap X' \neq \emptyset$ とする．従って，$(V^+(c) \cup V^-(c)) \cap X' \neq \emptyset$ である．$V^-(c) \cap X' \neq \emptyset$ であれば，$X' = A'$ は c を充足する．$V^+(c) \cap X' \neq \emptyset$ であれば，$X = A$ がオータークー割当てであることにより，やはり $V^-(c) \cap X' \neq \emptyset$ となるので，$X' = A'$ は c を充足する．よって $X' = A'$ は φ に対するオータークー割当てである．　□

上記の補題より，ホーン論理積形のオータークー割当てに関して以下の補題が成り立つ．すべての値が 1 (0) である部分割当てを正 (負) の部分割当てと呼ぶ．

補題 5.3.2 ([86])**.** ホーン論理積形が非自明なオータークー割当てをもつならば，それは正か負の非自明なオータークー割当てをもつ．

証明．$X = A$ を非自明なオータークー割当てとする．もしすべての $x_j \in X$ に対して $A_j = 1$ ならば主張は成り立つ．ある $x_j \in X$ に対して $A_j = 0$ であれば，補題 5.3.1 において定義された $X' = A'$ が，負の非自明なオータークー割当てとなる．　□

補題 5.3.2 の証明より，ホーン論理積形における非自明なオータークー割当てで，対応するリテラル集合の意味で極小なものの中には必ず正か負の非自明なオータークー割当てが存在することがいえる．

また，補題 5.3.2 より，ホーン論理積形に対して非自明なオータークー割当てを求めるアルゴ

リズムが以下のように設計できる．

アルゴリズム FIND-PA

$[X = A] = [V = \mathbf{1}]$ とする
while $V(c) \cap X \neq \emptyset$ かつ $X = A$ により充足されない節 $c \in \varphi$ が存在する **do**
  $X := X \setminus V(c)$
  $A := \pi_X(A)$
end while
部分割当て $X = A$ を出力し，停止する

アルゴリズム FIND-PA は, 正の非自明なオータークス割当ての中で, 変数集合の意味で最大のものを出力する．さらに，アルゴリズム FIND-PA において，初期条件を $[X = A] = [V = \mathbf{0}]$ とすれば，負の非自明なオータークス割当ての中で，変数集合の意味で最大のものを出力する．よって，これらのアルゴリズムにより，ホーン論理積形に対して非自明なオータークス割当てが存在するならば，そのような割当てを一つ求めることができる．

5.4　最大オータークス割当て

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

5.5　線形オータークス割当ての特徴付け

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

第 6 章

整数線形不等式系に対する線形局所固定可能割当て

6.1　概説

本章では，整数線形不等式系

$$Gx \geq h,\, x \in \{0, 1, \ldots, d\}^n \tag{6.1}$$

に対する線形局所固定可能割当てを考察する．ここで，G は $\mathbb{Z}^{m\times n}$ に含まれる行列であり，h は $\mathbb{Z}^m$ のベクトル，d は正整数である．まず，変数の取り得る値が二値，すなわち，$D = \{0, 1\}$ の場合を扱う．その後に，任意の $d \geq 2$ に対して $D = \{0, 1, \ldots, d\}$ の場合を扱う．

本章での主結果は，整数線形不等式系に対し，線形局所固定可能割当てを求める擬多項式時間を開発することである．第 4 章で述べたように線形な割当ての取り方は色々あるが，ここでは，第 4 章の結果を用いて，性質の良い線形割当てを定義する．ここで，整数線形不等式系の各制約がユネイトであることが重要である．

6.2　準備

ここでは，単調な解集合に関する事実を述べる．解集合 $S \subseteq D^n$ が単調であるとは，任意の $x, y \in D^n$ に対し，$x \in S$ かつ $x \leq y$ であれば $y \in S$ が成立するときにいうのであった．以下，$D = \{0, 1\}$ の場合における，単調な解集合 $S \subseteq \{0, 1\}^n$ と S を表現する論理積形との関係を示す．

$J \subseteq [n]$ に対し，節 $c_J = \bigvee_{j\in J} x_j$ とし，ベクトル $e_J \in \{0, 1\}^n$ を $j \in J$ ならば $e_J(j) = 1$，$j \notin J$ ならば $e_J(j) = 0$ として定義する．

論理積形 φ に対し，節 c が，任意の $x \in \{0,1\}^n$ に対して $\varphi(x) = 1$ ならば $c(x) = 1$ をみたすとき，c を φ の外節というのであった．ここで，論理積形 φ が表す解集合 S に対しても同様の定義をする．すなわち，解集合 S に対し，節 c が，任意の $x \in \{0,1\}^n$ に対して $x \in S$ ならば $x \in c$ をみたすとき，c を S の外節と呼ぶ．そしてさらに，c の任意の真部分節 $c' \subsetneq c$ が S の外節とはならないときには，c を主節と呼ぶ．主論理積形はすべての節が主節であるような論理積形と一致することに注意されたい．

補題 6.2.1 ([25])**.** S を単調な解集合とし，$J \subseteq [n]$ とする．このとき，以下が成立する．

(i) c_J が S の外節であるための必要十分条件は $e_{[n]\setminus J}$ が S の実行不能解となることである．

(ii) c_J が S の主節であるための必要十分条件は $e_{[n]\setminus J}$ が S の極大実行不能解となることである．

証明．(i): c_J が外節であれば，$e_{[n]\setminus J}$ は c_J を充足しないので，$e_{[n]\setminus J} \notin S$ となる．逆に，$e_{[n]\setminus J}$ が S の実行不能解であれば，S の単調性より，$x \leq e_{[n]\setminus J}$ となる x はすべて実行不能である．すなわち，ベクトル $x \in \{0,1\}^n$ であり，すべての $j \in J$ に対して $x_j = 0$ となるようなものは必ず S の実行不能解となる．従って，c_J は S の外節となる．

(ii): $e_{[n]\setminus J}$ が S の極大実行不能解となることは，$e_{[n]\setminus J} \in S$ でありかつ任意の $J' \subsetneq J$ に対して $e_{[n]\setminus J'} \in S$ となることと等価である．これは，(i) より，さらに c_J が外節でありかつ任意の $J' \subsetneq J$ に対して $c_{J'}$ が外節とはならないことと等価である．これは，まさに c_J が主節であることを意味する．□

補題 6.2.2 ([25])**.** 解集合 $S \subseteq \{0,1\}^n$ に対し，S の主節すべてを集めて作った論理積形は S を表現する．

証明．まず，S に対し，論理積形 $\psi = \bigwedge_{u \notin S}(\bigvee_{j:u_j=0} x_j \vee \bigvee_{j:u_j=1} \overline{x}_j)$ は S を表現する．なぜならば，$x \in \{0,1\}^n$ に対して $\psi(x) = 0$ となることはある $u \notin S$ が存在して $(\bigvee_{j:u_j=0} x_j \vee \bigvee_{j:u_j=1} \overline{x}_j)(x) = 0$ となること，すなわち，$u = x$ となることと等価であるからである．

S の主節すべてを集めて作った論理積形を φ とすると，$\psi \vee \varphi$ はやはり S を表現する．さらに，ψ の任意の節に対して，その節を導くような S の主節が存在する．従って，$\psi \vee \varphi = \varphi$ となり，φ は S を表現する．□

補題 6.2.3 ([25])**.** 単調な解集合 $S \subseteq \{0,1\}^n$ を表現する主論理積形 φ は一意に定まり，U を S の極大実行不能解の集合としたときに $\varphi = \bigwedge_{u \in U} \bigvee_{j:u_j=0} x_j$ となる．

Proof. 補題 6.2.1，6.2.2 より $\bigwedge_{u \in U} \bigvee_{j:u_j=0} x_j$ は S を表現する主論理積形となる．従って，これが一意であることをみれば良い．

補題 6.2.1 より $\bigwedge_{u \in U} \bigvee_{j:u_j=0} x_j$ は S のすべての主節を集めて作った論理積形である．論理積形が主論理積形である必要十分条件はすべての節が主節であることなので，部分集合 $U' \subsetneq U$ に対して $\varphi' = \bigwedge_{u \in U'} \bigvee_{j:u_j=0} x_j$ が S を表現しないことをみれば良い．これは，$u \in U \setminus U'$ に対して $\varphi'(u) = 1$ となることから従う．従って，φ は S を表現する唯一の主論理積形である． □

これまでの単調な解集合に対する結果はユネイトな解集合へと拡張することができる．ベクトル $o \in \{0,1\}^n$ に関して単調な集合 S に対し，S の $\geq_o$ に関する極大実行不能解を単に極大実行不能解と呼ぶ．ただし，方向ベクトル o は文脈により常に明らかであるとする．

補題 6.2.4. $S \subseteq \{0,1\}^n$ をユネイトな解集合とし，ベクトル $o \in \{0,1\}^n$ に関して単調であるとする．このとき，S を表現する主論理積形 φ は一意に定まり，U を S の極大実行不能解の集合としたときに $\varphi = \bigwedge_{u \in U} (\bigvee_{j:o_j=0, u_j=0} x_j \vee \bigvee_{j:o_j=1, u_j=1} \overline{x}_j)$ となる．

証明. 単調な解集合 S に対する証明と同様の流れで示せるのでここでは省略する． □

6.3　$D = \{0,1\}$ の場合

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

6.4　一般の D の場合

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

第 7 章

整数線形不等式系に対する計算複雑さの指標

7.1 概説

本章では，整数線形不等式

$$Gx \geq h,\ x \in \{0, 1, \ldots, d\}^n \tag{7.1}$$

に対する計算複雑さの指標を構成する．本節で主結果を述べ，次節で先行研究の結果を述べる．その後，主結果の内容を詳細に述べる．なお，本章 4 節の結果および 3，5 節の結果の一部は [67] に基づくが，構成の都合上，本論文の成果と同時に述べる．

ここで，整数線形不等式系に対して計算複雑さの指標 η を導入する．この指標により，整数線形不等式系の難しさが三分される．この指標のアイディアは Boros ら [12] の研究に端を発する．彼らは SAT に対する計算複雑さの指標を導入した．彼らの指標は SAT の問題例を二つのクラスに区別する．われわれの指標 η は彼らの指標を整数線形不等式系へと一般化したものである．なぜならば，第 2 章 2 節で述べたように，SAT は $G \in \{0, -1, +1\}^{m \times n}$ を用いて整数線形不等式系で表すことができるからである．これは次節で議論する．

実数 g に対し，その符号は

$$\mathrm{sgn}(g) = \begin{cases} + & (g > 0) \\ 0 & (g = 0) \\ - & (g < 0) \end{cases} \tag{7.2}$$

として定義され，実行列 $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ の符号は G の各成分をその符号で置き換えた行列 $\mathrm{sgn}(G) \in \{0, -, +\}^{m \times n}$ として定義される．

たとえば，行列

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

に対し，

$$\mathrm{sgn}(G) = \begin{pmatrix} + & - & 0 \\ + & + & - \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

となる．

整数線形不等式系の問題例 $I = (G, h, d)$ が与えられた際に，その指標 $\eta(I)$ は以下の線形計画問題の最適値として定義される．

$$\begin{array}{lllll} \text{minimize} & Z & & & \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j:\mathrm{sgn}(g_{ij})=+} \alpha_j + \sum_{j:\mathrm{sgn}(g_{ij})=-} (1-\alpha_j) & \leq & Z & (i = 1, \ldots, m), \\ & 0 \leq \alpha_j \leq 1 & & & (j = 1, \ldots, n). \end{array} \tag{7.5}$$

ここで，行列 G の数値情報および，b および d の情報は指標 $\eta(I)$ に用いられておらず，指標 $\eta(I)$ は $\mathrm{sgn}(G)$ のみに依存することに注意されたい．従って，二つの問題例 I および I' に対し，対応する行列が同じ符号パターンをもつのであれば，$\eta(I) = \eta(I')$ が従う．従って，$\eta(I)$ を行列 G の指標と呼ぶこともある．

ここで，簡潔な記述のために行列 G に対して仮定をおく．G の第 j 列が非負 (非正) であるとする．このとき，線形計画問題 (7.5) の最適値を増やすことなく $\alpha_j = 0$ ($\alpha_j = 1$) とすることができる．さらには，不等式系が実行可能であるならばそのときのみ $x_j = d$ ($x_j = 0$) と固定して得られた不等式系が実行可能である．従って，以下の節においては，3 節における最後の議論以外では G は一般性を失うことなく非負もしくは非正の列を含まないものとする．なお，3 節の最後では，指標 η が 1/2 以下であるときの行列 G および (7.5) の最適解の性質を考察する．なお，G の各列が少なくとも一つの非ゼロ成分をもつことは本章を通じて仮定する．

主定理

非負実数 γ に対し，$\mathrm{ILS}(\gamma)$ を $\eta(I) = \gamma$ となるような整数線形不等式系の問題例 I の集合を表すとする．単位整数線形不等式系，すなわち，$G \in \{0, -1, +1\}^{m \times n}$ のときにも $\mathrm{UILS}(\gamma)$ を同様に定義する．このとき，以下の結果を得る．

定理 7.1.1. $\mathrm{ILS}(\gamma) \neq \emptyset$ (これは $\mathrm{UILS}(\gamma) \neq \emptyset$ と等価である) となる非負実数 γ に対し，以下の三つが成立する．

(1) $\gamma < 1$ ならば $\mathrm{ILS}(\gamma)$ は線形時間で解ける．

(2) $\gamma = 1$ ならば ILS(γ) は弱 NP 困難であり，擬多項式時間で解ける．

(3) $\gamma > 1$ ならば ILS(γ) は強 NP 困難である．

さらに，以下が成立する．

(4) $\gamma \leq 1$ ならば UILS(γ) は多項式時間で解ける．

(5) $\gamma > 1$ ならば UILS(γ) は強 NP 困難である．

また，$\eta(I) < 1$ か $= 1$ か > 1 であるかは線形時間で判定できることを示す．二次不等式系およびホーン不等式系は次節で示すように $\gamma \leq 1$ である ILS(γ) に含まれるので [12]，定理 7.1.1 は二次不等式系 [5, 52] やホーン不等式系 [42, 109] が擬多項式時間で解けるという先行研究の結果を含んでいる．さらに定理 7.1.1 は二次単位不等式系 [4, 56, 81, 104] およびホーン単位不等式系 [20, 21, 105]，そして SAT において 2SAT [32]，ホーン SAT [50]，改名ホーン SAT [83]，q-ホーン SAT [11] が多項式時間で解けることを含んでいる．なお，$\eta(I) \leq 1$ となる不等式系を，q-ホーン不等式系と呼ぶ．

UILS(γ) が簡単な (すなわち，$\gamma \leq 1$ である) 問題例および難しい (すなわち，$\gamma > 1$ である) 問題例という二つのクラスに分かれ，これは SAT に対する Boros ら [12] の結果に対応する．一方で，ILS(γ) は簡単，中程度に難しい，難しいの三種類の問題例に分かれることに注意されたい．

さらに，上記の結果を定数でない γ を考えることで一般化する．より正確には，γ を n および d の関数とみなす．それに伴い，$\gamma(n, d)$ と書くこととする．そのような指標 $\gamma(n, d)$ に対し，$\mathrm{ILS}_{\leq}(\gamma(n, d))$ を $\eta(I) \leq \gamma(n, d)$ となるような問題例 I の集合とする．単位線形不等式系に対しても同様に $\mathrm{UILS}_{\leq}(\gamma(n, d))$ を定義する．このとき，以下の結果を得る．

定理 7.1.2. 整数線形不等式系に対し，以下の三つが成立する．

(1) $0 \leq \gamma(n, d) < 1$ ならば $\mathrm{ILS}_{\leq}(\gamma(n, d))$ は線形時間で解ける．

(2) ある定数 $c \geq 0$ に対して $1 \leq \gamma(n, d) \leq 1 + (c \log_d n)/n$ ならば $\mathrm{ILS}_{\leq}(\gamma(n, d))$ は弱 NP 困難であり擬多項式時間で解ける．

(3) ある定数 $\delta < 1$ に対して $\gamma(n, d) \geq 1 + 1/n^{\delta}$ ならば $\mathrm{ILS}_{\leq}(\gamma(n, d))$ は強 NP 困難である．

さらに，以下が成立する．

(4) ある定数 $c \geq 0$ に対して $\gamma(n, d) \leq 1 + (c \log_d n)/n$ ならば UILS(γ) は多項式時間で解ける．

(5) ある定数 $\delta < 1$ に対して $\gamma(n, d) \geq 1 + 1/n^{\delta}$ ならば UILS(γ) は強 NP 困難である．

なお，指標 η による多項式時間可解クラスは完全単模行列による多項式時間可解クラスとは比較不能であることを後の節でみる．

最後に，数理計画問題 (連立線形方程式 [14, 101]，線形計画問題 [55]，線形相補性問題 [64]) の符号可解性に対する一連の研究について言及する．これらの研究の狙いは入力の符号パターンと解の符号パターンの関係を調査することである．その背景には，実際の入力データは不確かなものであり，構造的な性質のみが保たれることが多いという事実がある．これらおよび本章の研究は両方とも入力の符号パターンについて議論しているが，これらの研究では解の符号パターンについて議論するのに対し，本章では整数解について議論するという違いがある．

7.2　SAT に対する計算複雑さの指標

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

7.3　最適値が 1 未満の場合

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

7.4　最適値が 1 以上の場合

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

7.5　議論

本節は，共著者の同意が得られないため，全文非公開とする．

第 8 章

まとめと今後の課題

本論文では制約充足問題に対する様々な充足可能性保存割当てを扱い，それらの関係を整理した．また，充足可能性保存割当てに対して多面錐による近似を考え，その近似のよさを詳細に解析し，この近似を用いることでそれらの割当てを求める効率的なアルゴリズムを設計した．また，整数線形不等式系の実行可能性問題に対し，効率的に解ける部分クラスを統一的に説明する計算複雑さの指標を与えた．より具体的には以下のことを行った．

- 様々な充足可能性保存割当てを定義し，それらとその局所的な概念との関係を明らかにした．先行研究と異なり，制約の形を制限した場合の関係についても明らかにした．特に，部分割当てが固定可能割当てであることと主論理積形に対する局所固定可能割当てであることが等価であることを示した．
- 求めやすい充足可能性保存割当てを得るために，多面錐による近似を考えることで線形な概念を導入した．そして，その極大性について詳細に議論した．特に，以下を示した．
  (1) φ の充足割当ての内側近似となる任意の開多面錐 K に対して，ある行列 M で c_i が x_j ($\overline{x}_j$) を含むときのみ $M_{ij} > 0$ (< 0) となるものが存在して, M から導かれる開多面錐は K を含む内側近似となる．
  (2) φ のオータークク割当ての内側近似となる任意の閉多面錐 K に対して，ある行列 M で c_i が x_j ($\overline{x}_j$) を含むならばそのときのみ $M_{ij} > 0$ (< 0) となるものが存在して，M から導かれる閉多面錐は K を含む内側近似となる．
  (3) φ が単調であるとき，c_i が x_j ($\overline{x}_j$) を含むときのみ $M_{ij} > 0$ (< 0) となり，各行が非ゼロ成分を少なくとも一つ含む任意の行列 M に対して，M から導かれる開多面錐はすべての充足割当てを含む内側近似となる．
  (4) φ が単調であるとき，c_i が x_j ($\overline{x}_j$) を含むならばそのときのみ $M_{ij} > 0$ (< 0) となる任意の行列 M に対して，M から導かれる閉多面錐はすべてのオータークク割当て

を含む内側近似となる．

(5) φ が主単調であるとき，c_i が x_j ($\overline{x}_j$) を含むならばそのときのみ $M_{ij} > 0$ (< 0) となる任意の行列 M に対して，M から導かれる閉多面錐はすべてのオーターク割当てを含む，凸集合の中で極大な内側近似となる．

- ホーン論理積形に対し，線形オーターク割当てを線形時間で求めるアルゴリズムを開発した．また，変数集合の意味で最大なオーターク割当てを与えた．
- 整数線形不等式系に対し，線形局所固定可能割当てを効率的に求めるアルゴリズムを開発した．さらに，二次，ホーン，q-ホーン不等式系が線形局所固定可能割当てを繰り返し求めることで解けることを示した．
- 整数線形不等式系に対する計算複雑さの指標を提案した．これにより，先行研究における二次やホーン不等式系に対する結果を統一的に説明した．

今後の課題

本論文では，第 5 章において，ホーン論理積形に対してその線形オーターク割当てを求める効率的なアルゴリズムを開発した．この結果を拡張し，一般の論理積形に対して線形オーターク割当てを，線形計画問題を解かずに効率的に解くアルゴリズムを与えることが課題の一つである．

第 7 章において，整数線形不等式系の実行可能性問題に対する計算複雑さの指標を構成した．この指標により，二次，ホーン不等式系の擬多項式時間可解性を統一的に説明することができる．このような指標を一般の制約充足問題に対して構成することは今後の課題の一つである．一般の制約充足問題においては，効率的に解ける部分クラスを求める際に，代数的アプローチを用いるのが主流の一つである．このような代数的に与えられるクラスを捉える指標を与えることが課題の一つである．

第 7 章で述べたように，整数線形不等式系の実行可能性問題において各変数が非有界である場合に二次，ホーン不等式系が擬多項式時間で解けるか否かはわかっていない．このことを明らかにすることは今後の課題である．特に，q-ホーン不等式系が擬多項式時間で解けるか否かを明らかにすることで，各変数が非有界である場合に対して本論文の結果を拡張することができるかが明らかとなる．

謝辞

本論文の完成にあたっては多くの方々にお世話になりました．

指導教員である室田一雄教授には研究における多くのご忠告を頂きました．また多くの励ましを頂きました．それは研究を進める上で多大なる助けとなりました．また，人生における考え方そのものについても多くのことを学ばせて頂きました．誠にありがとうございました．

京都大学数理解析研究所の牧野和久准教授は修士課程および博士課程のほぼ二年間，指導教員として指導して下さいました．また，その後，京都大学に移られた後も研究指導を続けて下さいました．そして，研究上の肝心な事柄について多くのことを教えて頂きました．大変ご多忙な身でありながら，お時間を割いて頂いたことも含めまして，心より感謝いたします．

数理 2 研の平井広志准教授には研究室の輪講などにおいて有益なコメントを頂きました．ありがとうございました．東京大学の垣村尚徳講師と数理 2 研の小林佑輔助教には研究以外にも生活面などで様々なご忠告を頂きました．ありがとうございました．東京工業大学の河瀬康志助教は定理を証明するときに協力して下さいました．ありがとうございました．数理 2 研の澄田範奈氏は議論して下さいました．ありがとうございました．

数理 2 研の皆様とは楽しい研究室生活を過ごさせて頂きました．ありがとうございました．

私はグローバル COE プログラム「数学新展開の研究活動拠点」のリサーチ・アシスタントを 2011 年度から 2012 年度まで務めていました．また，日本学術振興会の特別研究員 (DC2) を 2013 年度から務めており，本研究はこれらの支援を受けました．これらのプロジェクトに関わった方々に感謝いたします．

最後に，支えてくれた家族に心から感謝いたします．

参考文献

[1] AMPL Home Page. http://ampl.com (accessed November 30, 2014).

[2] AIMMS Home Page. http://www.aimms.com (accessed November 30, 2014).

[3] K. R. Apt. *Principles of Constraint Programming.* Cambridge University Press, New York, 2003.

[4] R. Bagnara, P. M. Hill, and E. Zaffanella. An improved tight closure algorithm for integer octagonal constraints. *Proceedings of the 9th International Conference on Verification, Model Checking and Abstract Interpretation*, 2008, pp. 8–21.

[5] R. Bar-Yehuda and D. Rawitz. Efficient algorithms for integer programs with two variables per constraint. *Algorithmica*, **29** (2001), pp. 595–609.

[6] L. Barto. The dichotomy for conservative constraint satisfaction problems revisited. *Proceedings of the 26th IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, 2011, pp. 301–310.

[7] L. Barto, M. Kozik, and T. Niven. The CSP dichotomy holds for digraphs with no sources and no sinks (a positive answer to a conjecture of Bang-Jensen and Hell). *Siam Journal on Computing*, **38** (2009), pp. 1782–1802.

[8] R. E. Bellman. On a routing problem. *Quarterly Applied Mathematics*, **16** (1958), pp. 87–90.

[9] C. Blair, R. Jeroslow, and J. Lowe. Some results and experiments in programming techniques for propositional logic. *Computers and Operations Research*, **13** (1986), pp. 633–645.

[10] L. Bordeaux, M. Cadoli, and T. Mancini. A unifying framework for structural properties of CSPs: Definitions, complexity, tractability. *Journal of Artificial Intelligence Research*, **32** (2008), pp. 607–629.

[11] E. Boros, Y. Crama, and P. L. Hammer. Polynomial-time inference of all valid implications for Horn and related formulae. *Annals of Mathematics and Artificial*

Intelligence, **1** (1990), pp. 21–32.

[12] E. Boros, Y. Crama, P. L. Hammer, and M. E. Saks. A complexity index for satisfiability problems. *SIAM Journal on Computing*, **23** (1994), pp. 45–49.

[13] E. Boros, P. L. Hammer, and X. Sun. Recognition of q-Horn formulae in linear time. *Discrete Applied Mathematics*, **55** (1994), pp. 1–13.

[14] R. A. Brualdi and B. L. Shader. *Matrices of Sign-Solvable Linear Systems.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[15] A. A. Bulatov. Tractable conservative constraint satisfaction problems. *Proceedings of the 18th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, 2003, pp. 321–330.

[16] A. A. Bulatov. A dichotomy theorem for constraint satisfaction problems on a 3-element set. *Journal of the ACM*, **53** (2006), pp. 66–120.

[17] A. A. Bulatov. Complexity of conservative constraint satisfaction problems. *ACM Transactions on Computational Logic*, **12** (2011), pp. 1–66.

[18] A. A. Bulatov, P. G. Jeavons, and A. Krokhin. Classifying the complexity of constraints using finite algebras. *Siam Journal on Computing*, **34** (2005), pp. 720–742.

[19] H. K. Büning and O. Kullmann. Minimal unsatisfiability and autarkies. *Handbook of Satisfiability*, (A. Biere, M. Heule, H. van Maaren, T. Walsh, eds.), IOS Press, Amsterdam, 2009, Chapter 11, pp. 339–402.

[20] R. Chandrasekaran. Integer programming problems for which a simple rounding type algorithm works. *Progress in Combinatorial Optimization*, **8** (1984), pp. 101–106.

[21] R. Chandrasekaran and K. Subramani. A combinatorial algorithm for Horn programs. *Proceedings of the 20th International Symposium on Algorithms and Computation*, 2009, pp. 1114–1123.

[22] V. Chandru and J. Hooker. *Optimization Methods for Logical Inference.* Wiley-Interscience, New York, 1999.

[23] D. A. Cohen, M. C. Cooper, P. Creed, P. G. Jeavons, and S. Zivny. An algebraic theory of complexity for discrete optimization. *Siam Journal on Computing*, **42** (2013), pp. 1915–1939.

[24] S. Cook. The complexity of theorem proving procedures. *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 1971, pp. 151–158.

[25] Y. Crama and P. L. Hammer. *Boolean Functions: Theory, Algorithms, and Appli-*

cations. Cambridge University Press, New York, 2011.

[26] N. Creignou, S. Khanna, and M. Sudan. *Complexity classifications of Boolean constraint satisfaction problems.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Pennsylvania, 2001.

[27] M. Davis, G. Logemann, and D. Loveland. A machine program for theorem-proving. *Communications of the ACM*, **5** (1962), pp. 394–397.

[28] R. Dechter. *Constraint Processing.* Morgan Kaufmann, California, 2003.

[29] W. F. Dowling and J. H. Gallier. Linear-time algorithms for testing the satisfiability of propositional Horn formulae. *The Journal of Logic Programming*, **1** (1984), pp. 267–284.

[30] L. Egri, P. Hell, B. Larose, and A. Rafiey. Space complexity of list H-colouring: a dichotomy. *Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 2014, pp. 349–365.

[31] L. Egri, A. Krokhin, B. Larose, and P. Tesson. The complexity of the list homomorphism problem for graphs. *Theory of Computing Systems*, **51** (2012), pp. 143–178.

[32] S. Even, A. Itai, and A. Shamir. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM Journal on Computing*, **5** (1976), pp. 691–703.

[33] T. Feder, P. Hell, and J. Huang. Bi-arc graphs and the complexity of list homomorphisms. *Journal of Graph Theory*, **42** (2003), pp. 61–80.

[34] T. Feder and M. Y. Vardi. The computational structure of monotone monadic SNP and constraint satisfaction: A study through datalog and group theory. *SIAM Journal on Computing*, **28** (1998), pp. 57–104.

[35] H. Fleischner, O. Kullmann, and S. Szeider. Polynomial-time recognition of minimal unsatisfiable formulas with fixed clause-variable difference. *Theoretical Computer Science*, **289** (2002), pp. 503–516.

[36] L. R. Ford. Network flow theory. Technical report, The Rand Corporation, 1956.

[37] E. C. Freuder. Complexity of K-tree structured constraint satisfaction problems. *Proceedings of the 8th National Conference on Artificial Intelligence*, 1990, pp. 4–9.

[38] E. C. Freuder. Eliminating interchangeable values in constraint satisfaction problems. *Proceedings of the 9th National Conference on Artificial Intelligence*, 1991, pp. 227–233.

[39] G. Gallo, G. Longo, and S. Pallottino. Directed hypergraphs and applications. *Discrete Applied Mathematics*, **42** (1993), pp. 177–201.

[40] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman, New York, 1979.

[41] I. P. Gent, K. E. Petrie, and J.-F. Puget. Symmetry in constraint programming. *Handbook of Constraint Programming*, (F. Rossi, P. van Beek, T. Walsh, eds.), Elsevier Science, New York, 2006, Chapter 10, pp. 329–376.

[42] F. Glover. A bound escalation method for the solution of integer linear programs. *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationelle*, **6** (1964), pp. 131–168.

[43] A. V. Goldberg. Scaling algorithms for the shortest paths problem. *SIAM Journal on Computing*, **24** (1995), pp. 494–504.

[44] G. Gottlob, N. Leone, and F. Scarcello. Hypertree decompositions and tractable queries. *Journal of Computer and System Sciences*, **64** (2002), pp. 579–627.

[45] M. Grohe and D. Marx. Constraint solving via fractional edge covers. *ACM Transactions on Algorithms*, **11** (2014), pp. 1–20.

[46] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization Second Corrected Edition.* Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.

[47] P. Hell and J. Nešetřil. On the complexity of H-coloring. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **48** (1990), pp. 92–110.

[48] P. Hell and J. Nešetřil. *Graphs and Homomorphisms.* Oxford University Press, New York, 2004.

[49] P. Hell and A. Rafiey. The dichotomy of list homomorphisms for digraphs. *Proceedings of the twenty-second annual ACM-SIAM symposium on Discrete Algorithms*, 2011, pp. 1703–1713.

[50] L. J. Henschen and L. A. Wos. Unit refutations and Horn sets. *Journal of the ACM*, **21** (1974), pp. 590–605.

[51] M. Heule and H. van Maaren. Observed lower bounds for random 3-SAT phase transition density using linear programming. *Theory and Applications of Satisfiability Testing*, 2005, pp. 122–134.

[52] D. S. Hochbaum, N. Megiddo, J. Naor, and A. Tamir. Tight bounds and 2-approximation algorithms for integer programs with two variables per inequality. *Mathematical Programming*, **62** (1993), pp. 69–83.

[53] A. J. Hoffman and J. B. Kruskal. Integral boundary points of convex polyhedra. *Linear Inequalities and Related Systems*, (H. Kuhn and A. Tucker, eds.), Princeton University Press, London, 1956, pp. 223–246.

[54] IBM ILOG CP Optimizer Home Page.
http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-cp-optimizer/
(accessed November 30, 2014).

[55] S. Iwata and N. Kakimura. Solving linear programs from sign patterns. *Mathematical Programming*, **114** (2008), pp. 393–418.

[56] J. Jaffar, M. J. Maher, P. J. Stuckey, and R. H. C. Yap. Beyond finite domains. *Principles and Practice of Constraint Programming*, **874** (1994), pp. 86–94.

[57] P. G. Jeavons, D. A. Cohen, and M. Gyssens. Closure properties of constraints. *Journal of the ACM*, **44** (1997), pp. 527–548.

[58] P. G. Jeavons, D. A. Cohen, and M. C. Cooper. A substitution operation for constraints. *Proceedings of the 2nd International Workshop on Principles and Practice of Constraint Programming*, 1994, pp. 1–9.

[59] P. G. Jeavons, D. A. Cohen, and M. C. Cooper. Constraints, consistency and closure. *Artificial Intelligence*, **101** (1998), pp. 251–265.

[60] P. G. Jeavons, D. A. Cohen, and M. Gyssens. A unifying framework for tractable constraints. *Proceedings of the 1st International Conference on Constraint Programming*, 1995, pp. 276–291.

[61] P. G. Jeavons and M. C. Cooper. Tractable constraints on ordered domains. *Artificial Intelligence*, **79** (1995), pp. 327–339.

[62] P. Jonsson and A. Krokhin. Recognizing frozen variables in constraint satisfaction problems. *Theoretical Computer Science*, **329** (2004), pp. 93–113.

[63] M. Jünger, T. M. Liebling, D. Naddef, G. L. Nemhauser, W. R. Pulleyblank, G. Reinelt, G. Rinaldi, L. A. Wolsey, eds. *50 Years of Integer Programming 1958-2008: From the Early Years to the State-of-the-Art*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 2010.

[64] N. Kakimura. Sign-solvable linear complementarity problems. *Linear Algebra and Its Applications*, **429** (2008), pp. 606–616.

[65] S. Karakashian, R. Woodward, B. Y. Choueiry, S. D. Prestwich, and E. C. Freuder. A partial taxonomy of substitutability and interchangeability. arXiv preprint arXiv:1010.4609, 2010.

[66] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations*, 1972, pp. 85–103.

[67] 木村慧．q-ホーンシステムの実行可能性を判定する組合せ的アルゴリズム．東京大学 大

学院情報理工学系研究科 数理情報学専攻 修士論文, 2011.

[68] K. Kimura and K. Makino. Trichotomy for integer linear systems based on their sign patterns. METR 2012-2, Department of Mathematical Informatics, University of Tokyo, 2012.

[69] K. Kimura and K. Makino. Trichotomy for integer linear systems based on their sign patterns. *Proceedings of the 29th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, 2012, pp. 613–623.

[70] K. Kimura and K. Makino. A complexity index for integer linear systems based on their sign patterns, *Proceedings of 8th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, 2013, pp. 333–337.

[71] K. Kimura and K. Makino. Satisfiability preserving assignments and their local and linear forms. METR 2014-34, Department of Mathematical Informatics, University of Tokyo, 2014.

[72] K. Kimura and K. Makino. A combinatorial characterization of linear autark assignments for Horn CNFs. in preparation.

[73] O. Kullmann. An application of matroid theory to the SAT problem. *Proceedings of 15th Annual IEEE Conference on Computational Complexity*, 2000, pp. 116–124.

[74] O. Kullmann. Investigations on autark assignments. *Discrete Applied Mathematics*, **107** (2000), pp. 99–137.

[75] O. Kullmann. Lean clause-sets: Generalizations of minimally unsatisfiable clause-sets. *Discrete Applied Mathematics*, **130** (2003), pp. 209–249.

[76] O. Kullmann. Upper and lower bounds on the complexity of generalised resolution and generalised constraint satisfaction problems. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **40** (2004), pp. 303–352.

[77] O. Kullmann. Constraint satisfaction problems in clausal form I: Autarkies and deficiency. *Fundamenta Informaticae*, **109** (2011), pp. 27–81.

[78] G. Kun, R. O’Donnell, S. Tamaki, Y. Yoshida, and Y. Zhou. Linear programming, width-1 CSPs, and robust satisfaction. *Proceedings of 3rd Innovations in Theoretical Computer Science*, 2012, pp. 484–495.

[79] R. E. Ladner. On the structure of polynomial time reducibility. *Journal of the ACM*, **22** (1975), pp. 155–171.

[80] J. C. Lagarias. The computational complexity of simultaneous Diophantine approximation problems. *SIAM Journal on Computing*, **14** (1985), pp. 196–209.

[81] S. K. Lahiri and M. Musuvathi. An efficient decision procedure for UTVPI constraints. *Proceedings of the 5th International Workshop on Frontiers of Combining Systems*, 2005, pp. 168–183.

[82] H. W. Lenstra, Jr. Integer programming with a fixed number of variables. *Mathematics of Operations Research*, **8** (1983), pp. 538–548.

[83] H. R. Lewis. Renaming a set of clauses as a Horn set. *Journal of the ACM*, **25** (1978), pp. 134–135.

[84] A. K. Mackworth. Consistency in networks of relations. *Artificial Intelligence*, **8** (1977), pp. 99–118.

[85] V. Marek and M. Truszczyński. Algorithmic properties of autarkies. 2006, unpublished.

[86] V. W. Marek. *Introduction to Mathematics of Satisfiability.* Chapman and Hall/CRC, 2009.

[87] D. Marx. Approximating fractional hypertree width. *ACM Transactions on Algorithms*, **6** (2010), pp. 1–17.

[88] D. Marx. Tractable hypergraph properties for constraint satisfaction and conjunctive queries. *Journal of the ACM*, **60** (2013), pp. 1–51.

[89] R. Monasson, R. Zecchina, S. Kirkpatrick, B. Selman, and L. Troyansky. Determining computational complexity from characteristic 'phase transitions'. *Nature*, **400** (1999), pp. 133–137.

[90] B. Monien and E. Speckenmeyer. Solving satisfaiability in less than 2^n steps. *Discrete Applied Mathematics*, **10** (1985), pp. 287–295.

[91] U. Montanari. Networks of constraints: Fundamental properties and applications to picture processing. *Information Science*, **7** (1974), pp. 95–132.

[92] E. F. Moore. The shortest path through a maze. *Proceedings of an International Symposium on the Theory of Switching*, 1959, pp. 285–292.

[93] F. Okushi. Parallel cooperative propositional theorem proving. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **26** (1999), pp. 59–85.

[94] Opturion Home Page. http://opturion.com (accessed November 30, 2014).

[95] C. H. Papadimitriou. On the complexity of integer programming. *Journal of the ACM*, **28** (1981), pp. 765–768.

[96] S. Prestwich. Full dynamic substitutability by SAT encoding. *Principles and Practice of Constraint Programming*, 2004, pp. 512–526.

[97] P. Raghavendra. *Approximating NP-hard Problems: Efficient Algorithms and their Limits*. Ph.D. thesis, University of Washington, 2009.

[98] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1970.

[99] F. Rossi, P. van Beek, and T. Walsh, eds. *Handbook of Constraint Programming*. Elsevier Science, New York, 2006.

[100] S. Russell and P. Norvig. *Artificial Intelligence: A Modern Approach Third Edition*. Prentice Hall, New Jersey, 2009.

[101] P. A. Samuelson. *Foundations of Economic Analysis*. Harvard University Press, Cambridge, 1947.

[102] T. J. Schaefer. The complexity of satisfiability problems. *Proceedings of the 10th annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 1978, pp. 216–226.

[103] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1986.

[104] A. Schutt and P. J. Stuckey. Incremental satisfiability and implication for UTVPI constraints. *INFORMS Journal of Computing*, **22** (2010), pp. 514–527.

[105] K. Subramani and J. Worthington. A new algorithm for linear and integer feasibility in Horn constraints. *Proceedings of the 8th International Conference on Integration of Artificial Intelligence and Operations Research techniques in Constraint Programming*, 2011, pp. 215–229.

[106] S. Szeider. Minimal unsatisfiable formulas with bounded clause-variable difference are fixed-parameter tractable. *Journal of Computer and System Sciences*, **69** (2004), pp. 656–674.

[107] W.-J. van Hoeve and I. Katriel. Global constraints. *Handbook of Constraint Programming*, (F. Rossi, P. van Beek, T. Walsh, eds.), Elsevier Science, New York, 2006, Chapter 6, pp. 169–208.

[108] H. van Maaren. A short note on some tractable cases of the satisfiability problem. *Information and Computation*, **158** (2000), pp. 125–130.

[109] H. van Maaren and C. Dang. Simplicial pivoting algorithms for a tractable class of integer programs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **6** (2002), pp. 133–142.

[110] T. Walsh. Symmetry breaking constraints: Recent results. *Proceedings of the Twenty-Sixth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2012, pp. 2192–2198.

[111] Y. Yoshida. Optimal constant-time approximation algorithms and (unconditional) inapproximability results for every bounded-degree CSP. *Proceedings of the 43rd*

ACM Symposium on Theory of Computing, 2011, pp. 665–674.

[112] G. M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[113] S. Živný. *The Complexity of Valued Constraint Satisfaction Problems*. Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 2012.