# 論文内容の要旨

## 博士論文題目

## On the study of front propagation in nonlinear free boundary problems

## ( 非線形自由境界問題における波面の伝播の研究 )

## 氏名　周茂林

本論文では, 自由境界をもつ非線形放物型方程式

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), & t > 0, x \in (g(t), h(t)), \\ g'(t) = -\mu u_x(t, g(t)), u(t, g(t)) = 0, & t > 0, \\ h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)), u(t, h(t)) = 0, & t > 0, \\ -g(0) = h(0) = h_0, u(0, x) = u_0(x), & x \in (-h_0, h_0) \end{cases} \tag{1}$$

の解の漸近挙動について考察する．ここで, $\mu$ を正の定数, $u_0$ を正の $C^2$ 級連続関数, $f$ を $C^1$ 級連続関数とする．

まず $f(u) = u(a - bu)$ の場合は, 方程式 (1) の第一列は Fisher-KPP 方程式と呼ばれている．1937 年の Fisher[4] と Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov[5] による先駆的な仕事以来, Fisher-KPP 方程式の研究は長足の進歩を遂げた．この方程式は, 環境学における生物侵入現象のモデルとして重要な意味がある．2010 年に, Du-Lin[1] が水氷融解問題の境界条件として使われている Stefan 条件を古典的な Fisher-KPP 方程式に加えた上記のモデルを導入し, 新しい研究を始めた．Stefan 条件の影響で, 方程式 (1) に様々な面白い性質が現れる．例えば, $h_0$ と $u_0$ を十分に小さくすると, 方程式 (1) の解 $u$ は空間一様に 0 に収束する．元のコーシー問題の Fisher-KPP 方程式においては, 初期値がどれだけ小さくても解が正値定常解に収束する．この, いわゆる hair-trigger 効果のため, 上のような現象は起きない.

2014 年に, Du-Matsuzawa-Zhou[2] はより一般的な関数 $f$ に対して, 方程式 (1) の解の漸近挙動を精確に評価した. 関数 $f$ には主に三つタイプがある.

- 単安定型:
$$f(0) = f(1) = 0,\ f'(0) > 0,\ f'(1) < 0, \quad f(u) \begin{cases} > 0 \ \text{ in } (0,1), \\ < 0 \ \text{ in } (1,\infty); \end{cases} \tag{2}$$
- 双安定型: ある $\theta \in (0,1)$ に対して,
$$f(0) = f(\theta) = f(1) = 0,\ f'(0) < 0,\ f'(1) < 0, \quad f(u) \begin{cases} < 0 \ \text{ in } (0,\theta), \\ > 0 \ \text{ in } (\theta,1), \\ < 0 \ \text{ in } (1,\infty) \end{cases} \tag{3}$$
かつ $\int_0^1 f(s)ds > 0$;
- 燃焼型: ある $\theta \in (0,1)$ に対して,
$$f(u) = 0 \ \text{ in } [0,\theta], \quad f(u) > 0 \text{ in } (\theta,1), \quad f'(1) < 0, \quad f(u) < 0 \text{ in } (1,\infty) \tag{4}$$
かつ $\theta$ の近傍で $f$ が単調増加.

[2] の結果によって,$f$ が上記の三つタイプの一つだとすると, 伝播が発生する時 (ここで伝播とは、$u$ は空間局所一様に正の定常解 1 に収束すること) は, 時間を無限大に飛ばすときの $(u, g, h)$ の漸近挙動について, 下記

のことが分かる:

$$|h(t) - c^*t - c_1| \to 0, \quad |g(t) + c^*t + c_2| \to 0, \quad h'(t) \to c^*, \ g'(t) \to -c^*$$

かつ

$$\max_{0 \le x \le h(t)} |u(t,x) - q_{c^*}(h(t) - x)| \to 0, \ \max_{g(t) \le x \le 0} |u(t,x) - q_{c^*}(x - g(t))| \to 0.$$

ここで, $c_1$ と $c_2$ は定数, $(c^*, q_{c^*})$ は方程式

$$\begin{cases} q_{zz} - cq_z + f(q) = 0 \quad \text{for } z \in (0,\infty), \\ q(0) = 0, \ \mu q_z(0) = c, \ q(\infty) = 1, \ q(z) > 0 \text{ for } z > 0. \end{cases} \tag{5}$$

の唯一の解である. しかも, $c^*$ は正の定数, $q_{c^*}$ は方程式 (1) の唯一の進行波である.

本論文では, [2] の研究に基づき, さらに一般的なケースを考えたい: $(A)$ 空間的に非一様なケース; $(B)$ 多次元空間の伝播速度の評価.

前半では, 次の方程式

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,u), & t > 0, x \in (g(t), h(t)), \\ g'(t) = -\mu u_x(t, g(t)), u(t, g(t)) = 0, & t > 0, \\ h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)), u(t, h(t)) = 0, & t > 0, \\ -g(0) = h(0) = h_0, u(0,x) = u_0(x), & x \in (-h_0, h_0) \end{cases} \tag{6}$$

を考える. ここで, $f$ は $f(x,u) \equiv f(x+L,u)$ を満たす ($L$ はある正の定数). 空間的に非一様な場合は, 進行波の存在を示すことは大切である. 本論文では, Ducrot-Giletti-Matano[3] が提唱した「steepness」の概念を借り, rearrangement の方法を用いて, 下記の条件

$$\begin{cases} U(t, x-L) = U(t+T, x), & t \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, H(t+T)), \\ H(t) + L = H(t+T), & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

を満たす周期進行波の存在と一意性を示した. ここで, $(U, H)$ は方程式

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = f(x, u(t,x)), & t > 0, \ -\infty < x < h(t), \\ u(t, h(t)) = 0, & t > 0, \\ h'(t) = -\mu \partial_x u(t, h(t)), & t > 0, \end{cases}$$

の解である. 周期進行波が存在し, 伝播が発生する時は, 方程式 (6) の解 $u$ のフロントは周期進行波に収束することも示された.

後半では, 多次元空間の伝播を考察する. ここで, $f$ は空間一様とし, 球対称な解を考える. このとき, 自由境界は半径 $h(t)$ の球面になる. よって, 多次元の方程式 (1) は次の方程式に帰着する

$$\begin{cases} u_t - u_{rr} - \frac{N-1}{r} u_r = f(u), & t > 0, r \in [0, h(t)), \\ h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)), u(t, h(t)) = 0, & t > 0, \\ h(0) = h_0, u(0,r) = u_0(r), & r \in [0, h_0). \end{cases} \tag{7}$$

もし $f$ は単安定型, 双安定型あるいは燃焼型とすると, 伝播が発生する時は, $h(t) - \{c^* t - (N-1)c_* \ln t + M\}$ は $t \to \infty$ の時 0 に収束することが分かる (ここで, $M$ は初期値に依存する定数). つまり, 多次元の場合は, 伝播には $\ln t$ の位相ドリフト (phase drift) が発生する. ここで, $M$ は定数, $N$ は空間次元, $c_*$ は $N$ によらない係数である. これは, 上記の Du-Matsuzawa-Zhou[2] の結果を多次元空間に拡張するものである.

第 0 章は全体的な序文である.

第 1 章は空間的に非一様なケースである.

第 1.1 節で, この問題の背景と先行研究と主結果を紹介した.

第 1.2 節で, 必要な定義と準備知識を述べた.

第 1.3 節で, 周期進行波の存在を示した. 実は, 進行波の存在だけではなく, 自由境界問題の「propagating terrace」の存在も示した. 「propagating terrace」は Ducrot-Giletti-Matano[3] が提唱した, 進行波よりもっと一般的な概念である. またこの節では, 自由境界問題 (6) の propagating terrace とコーシー問題の propagating terrace ([3] に参照) の違いについて比較した.

第 1.4 節で, 単調力学系を用い, 方程式 (6) の漸近挙動を示した. つまり, 伝播が発生する場合は, 時間を無限大に飛ばすと,

$$|h(t) - H(t+T_r)| \to 0, \quad |h'(t) - H'(t+T_r)| \to 0$$

と

$$\|u(t,\cdot) - U(t+T_r,\cdot)\|_{L^\infty([0,\min\{h(t),H(t+T_r)\}])} \to 0$$

が分かる. ここで, $T_r$ は定数, $u$ は方程式 (6) の解である.

第 2 章は多次元空間の伝播の研究である.

第 2.1 節で, この問題の背景と先行研究を紹介した.

第 2.2 節で, 上記のドリフトの係数 $c_*$ を計算した.

第 2.3 節で, 精密な優解劣解を構成し, $h(t) - c^*t + (N-1)c_* \ln t$ は一様有界であることを示した.

第 2.4 節で, さらに精確な評価を与えた: $t \to \infty$ の時は, $h(t) - \{c^*t - (N-1)c_* \ln t + M\} \to 0$ と $\max_{0\le x\le h(t)} |u(t,x) - q_{c^*}(h(t)-x)| \to 0$. ここで, $u$ は方程式 (7) の解である.

第 2.5 節で, Lemma 2.4.6 の証明を与えた.

## 参考文献


[1] Y. Du and Z. Lin, Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary, SIAM J. Math. Anal., 42(2010), 377–405.

[2] Y. Du, H. Matsuzawa and M. Zhou, Sharp estimate of the spreading speed determined by nonlinear free boundary problems, SIAM J. Math. Anal., 46(2014), 375-396.

[3] A. Ducrot, T. Giletti and H. Matano, Existence and convergence to a propagating terrace in one-dimensional reaction-diffusion equations, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[4] R. A. Fisher, The wave of advance of advantageous genes, Ann Eugenics, 7(1937), 335–369.

[5] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovski and N. S. Piskunov, A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem, Bull. Moscow Univ. Math. Mech., 1 (1937), 1-25.