

## 論文審査の結果の要旨

氏名 周 茂林 (Zhou, Maolin)

論文提出者 周 茂林 は、自由境界をもつ非線形放物型方程式の解の漸近挙動を考察し、進行波の存在や自由境界の挙動について新しい結果を得た。

論文は2部に分かれており、前半では空間周期的な係数をもつ1次元の問題を扱った。後半では、空間一様な係数をもつ多次元の問題で解が球対称な場合を扱った。いずれも半線形拡散方程式に Stefan 型の自由境界条件を課した形の自由境界問題である。

具体的には、前半では次の問題を扱った。

$$(1) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, u), & t > 0, x \in (g(t), h(t)), \\ g'(t) = -\mu u_x(t, g(t)), u(t, g(t)) = 0, & t > 0, \\ h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)), u(t, h(t)) = 0, & t > 0, \\ -g(0) = h(0) = h_0, u(0, x) = u_0(x), & x \in (-h_0, h_0). \end{cases}$$

ここで  $\mu$  は正の定数であり、関数  $f$  については  $f(x, 0) = 0$  および空間周期性、すなわち  $f(x, u) \equiv f(x + L, u)$  を仮定する。上式の2行目と3行目が Stefan 条件を表す。後半では次の形の問題を扱った。

$$(2) \quad \begin{cases} u_t - u_{rr} - \frac{N-1}{r} u_r = f(u), & t > 0, r \in [0, h(t)], \\ h'(t) = -\mu u_r(t, h(t)), u(t, h(t)) = 0, & t > 0, \\ h(0) = h_0, u(0, r) = u_0(r), & r \in [0, h_0]. \end{cases}$$

自由境界がない通常の半線形拡散方程式の場合は、進行波 (traveling wave) や波面の広がり現象 (front spreading) について数多くの研究がなされてきた。まず、 $f$  が空間一様で単安定型の場合は、1937年に Fisher および Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov が集団遺伝学の観点から先駆的な研究を行い、また、1951年に Skellam が、生物侵入現象のモデルとしてこの問題を扱って以降、多くの研究が行われてきた。双安定型の場合の進行波については、1970年代後半の Fife-McLeod による優れた研究がある。一方、広がり波面の問題については、1970年代後半に Aronson-Weiberger によって、単安定型の場合も双安定型の場合も、広がり波面の形状がおおまかに球面で近似されることと、波面の広がり速度 (spreading speed) が空間1次元進行波の最小速度に

一致することが示された．さらに 1980 年代前半に Jones, Uchiyama, Gärtner らによって，広がり波面のプロファイルについてより詳しい評価が得られている．

2010 年に Du-Lin は，水氷融解問題の自由境界条件として知られている Stefan 条件を古典的な Fisher-KPP 方程式（すなわち  $f(u) = u(b-u)$  の場合）に加えたモデルを導入し，新しい研究を始めた．Stefan 条件の影響で，方程式の解には，自由境界がない場合に見られない様々な面白い性質が現れる．さらに 2014 年に Du-Matsuzawa-Zhou は，単安定型や双安定型や燃焼モデル型を含むより一般的な関数  $f = f(u)$  を考え，方程式 (1) の解の漸近挙動の分類や，自由境界の速度の精密な評価を与えた．

本論文では，上記の Du-Matsuzawa-Zhou よりもっと一般的な状況を考察した．まず前半では非線形項  $f$  が空間周期的で多重安定な場合を含む一般的な問題 (1) を扱い，解の長時間挙動を調べた．非線形項  $f$  が多重安定で自由境界がない問題の場合は，最近 Ducrot-Giletti-Matano (2014) により，解が次第に「進行テラス解」(propagating terrace) と呼ばれるものに近づくことが示されている．本論文では，自由境界がある (1) の場合にも解が進行テラス解に収束することを証明した．

次に本論文の後半では空間多次元の問題の球対称解を扱い，問題 (2) の自由境界の位置の詳しい評価を与えて，1 次元の場合と比べると  $\ln t$  のオーダーの位相のズレが生じることを示した．これは，上記の Du-Matsuzawa-Zhou (2014) の結果を拡張するものである．

論文提出者の研究は，自由境界をもつ半線形拡散方程式の解の漸近挙動に関する従前の研究を大幅に拡張するものであり，高く評価できる．

以上の諸点を考慮した結果，論文提出者 周 茂林 は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める．