



電 子 362-2

共振器内第二高調波発生システムの
量子雑音特性に関する研究

前田 讓治

父へ

もくじ

第 1 章 序論	1
1.1 歴史的経緯	1
1.1.1 光技術の発達と量子現象	1
1.1.2 光電ショット雑音の起源とスクイーミング	2
1.1.3 第二高調波発生の量子光学的特性	3
1.2 本論文の概要	6
1.3 論文の構成	7
第 2 章 第二高調波発生と光の量子雑音	9
2.1 二次の非線型光学現象	9
2.2 第二高調波発生システムの分類	10
2.3 光の量子雑音	13
2.3.1 コヒーレント状態	13
2.3.2 直交振幅スクイズド状態	14
2.3.3 第二高調波発生による振幅スクイーミング	15
2.3.4 実験上のスクイーミング	16
2.4 開放場と共振器場の相互作用	17
2.4.1 熱浴近似と入出力理論	18
2.4.2 光検出時の雑音	21
2.4.3 共振器場-開放場の結合によるスクイーミングの原理	23
2.5 まとめ	27
第 3 章 二光子損失モデルによる基本波閉じ込め型システムの解析	28
3.1 二光子損失モデルの物理的背景	28
3.2 二光子損失モデルによる定式化	30
3.3 基本波閉じ込め・外部共振器型システムの出力雑音特性	36

3.3.1	雑音特性の導出	36
3.3.2	高効率変換時のスクイーミング量	41
3.4	パラメトリック同時発振によるスクイーミング特性の劣化	42
3.4.1	周波数非縮退パラメトリック発振の可能性	42
3.4.2	直交偏波モードのパラメトリック発振	45
3.5	基本波閉じ込め・レーザ内部型システムの出力雑音特性	58
3.6	まとめ	63
第 4 章	非線型光学結晶内の発展と基本波閉じ込め型システムの出力雑音特性	64
4.1	フーリエ変換による定式化と観測される物理量	65
4.1.1	定義	65
4.1.2	光子計数 (直接検波)	66
4.1.3	バランス型ホモダイン受信器	68
4.2	自己無撞着法による揺らぎの算出法	70
4.3	第二高調波発生過程の進行波解析	73
4.4	基本波閉じ込め・外部共振器型システムの出力雑音特性	83
4.4.1	動作点	84
4.4.2	雑音特性の導出	84
4.4.3	二光子損失モデルとの比較	89
4.4.4	スペクトルの最小値	90
4.4.5	最大スクイーミング量	91
4.5	パラメトリック同時発振によるスクイーミング特性の劣化	93
4.5.1	周波数非縮退パラメトリック発振の可能性	93
4.5.2	直交偏波モードのパラメトリック発振と最大スクイーミング量	94
4.6	基本波閉じ込め・レーザ内部型システムの出力雑音特性	100
4.6.1	レーザ内部型システムの解析方法	100
4.6.2	数値例	103
4.7	まとめ	106
第 5 章	パラメトリック同時発振による二重閉じ込め型システムの雑音特性劣化	107
5.1	二重閉じ込め型システムのスクイーミング特性	108
5.1.1	自励振動現象とスクイーミング特性	110
5.1.2	側波モードのパラメトリック発振とスクイーミング	112
5.2	高調波の側波モードを考慮したモデルによる閾値の導出	113

5.2.1	側波モードのパラメトリック発振	115
5.2.2	自励振動との関係	116
5.3	閾値の変化と雑音特性	117
5.3.1	スクイーミング特性の変化	117
5.3.2	発振可能な側波モードと発振閾値との関係	119
5.4	まとめ	120
第 6 章	結言	121
付録 A	非縮退非線形相互作用のマルコフ近似	124
A.1	非縮退パラメトリック過程の定式化	124
A.2	第二高調波発生/非縮退パラメトリック相互作用の同時発生現象の定式化 . .	125
付録 B	光増幅過程における振幅および雑音の空間発展	128
付録 C	定常動作点解析によるパラメトリック発振閾値の導出	136
参考文献		139
研究公表		I
謝辞		III

第 1 章

序論

1.1 歴史的経緯

1.1.1 光技術の発達と量子現象

近年の急速な光エレクトロニクス技術の発達、特に、光半導体技術やレーザの制御技術の進歩は、利用可能なコヒーレント光の強度を飛躍的に引き上げた。高出力半導体レーザや、これを励起光源とする固体レーザの発達、さらに、駆動回路の効率化・温度制御の徹底などによって熟成された、気体レーザやフラッシュランプ励起固体レーザなど、高強度かつ安定なコヒーレント光を供給できるレーザが、数多く実用化されている。

これらの優れたコヒーレント光源の出現は、非線型光学現象を身近なものとし、その応用範囲を拡大した。非線型光学効果の歴史は 1960 年代にまで遡り、爾来広く応用されている。電気光学効果や、波長変換作用、ラマン散乱などを利用したデバイスやシステムが、今日の光通信技術、光計測技術を支えていることは周知の通りである。

ところが、高い効率で発生する非線型光学効果は、光の量子相関特性を顕在化するという、新たな側面を見せるようになった。非線型結合によって量子場間の様々の形態の結合が可能となり、この結果、古典理論的描像では説明できない、興味深い相関特性が実験的に得られるようになったのである。

これらの研究が活性化した背景には、高強度の光源や非線型結晶の進歩はもちろん、光検出の雑音限界を低下させ、微弱な量子効果まで検出可能とした技術の発達が重要な役割を果たして来た。光領域の電磁場が示す量子効果で最も顕著なものは、光検出器で発生する光電ショット雑音である。一昔前までは、負荷抵抗の熱雑音や増幅回路の雑音、検出器の暗電流が発生するショット雑音などが光検出器の雑音を支配していたが、これらの雑音が低減された今日、光電ショット雑音は比較的容易に検出されるようになった。上述の現象が実験的側

面から脚光を浴びはじめたのは 1980 年代後半からであるが、この時期は光半導体デバイスが急速な進歩を遂げ、熟成し始めた時期と一致する。光応用技術のダイナミックレンジが拡大されたことによって初めて、量子現象の応用研究が可能となったとすることができる。

1.1.2 光電ショット雑音の起源とスクイーミング

光の量子相関特性が示す現象の一つに、光電ショット雑音の統計変化がある。この雑音は、受光器における光電流パルスの発生が、確率的に生じることに起因する雑音であり、特に、パルスの発生が Poisson 統計に従う場合にはその電力スペクトルの大きさは光電流の定数倍になる。この統計によって与えられる雑音限界はショット雑音限界、または標準量子雑音限界と呼ばれ、理想的な光干渉計の感度限界を与えるとされていた。

ところが、光の量子論に基づいて議論すれば、ショット雑音限界は必ずしも究極の限界ではないことが導かれる。光を低雑音化し、ショット雑音限界を超える特性を実現することを、スクイーミングと呼ぶ。

数式を用いた詳しい説明は本文で行うとして、ここでは簡単に概念の説明を行う。

適当な境界条件を満たす、ある一つの電磁場のモードについて考えると、その基底準位では、電場あるいは磁場の平均値が零であるにもかかわらず、エネルギーは零にならないことが知られている。この非零のエネルギーは、電場あるいは磁場の、いわば雑音エネルギーである。基底状態にある電磁場のことを真空場、また、この時に発生している雑音のことを真空揺らぎと呼ぶ。

いま、ある周波数 ω_0 だけが励振されており、その他の周波数の成分は全て真空であるような光の検出を考える。光検出器は、到来する光エネルギー流に対応して電流を発生するから、光電場の情報を得るという点では「自乗検波器」の性質を有している。従って、一定の振幅を持つある周波数の光と、他の周波数の真空場が、同時に受光器に入射されれば、これらの積で決まるうなりが光電流の雑音で支配的になる。これが光電ショット雑音の量子論的解釈である。

うなりによる雑音は果して低減することができるだろうか？ 少なくとも、単一の周波数 ω_0 を励振するだけでは不可能である。もし何らかの低減が可能だとすれば、それは真空の性質を変化させることが必要である。

励起した周波数 ω_0 から $\delta\omega$ だけ離れた真空について考える。これが光電流に与える雑音は、電気帯域では周波数 $\delta\omega$ の成分となって現れる。ところがこの雑音成分には、映像周波数に当たる $\omega_0 - \delta\omega$ の真空の成分も含まれる。即ち、 $\omega_0 + \delta\omega$ と $\omega_0 - \delta\omega$ という両者の真空成分が相乗して、一つの電気周波数帯 $\delta\omega$ の雑音成分を構成している。

そこで、これらの両真空成分に量子力学的な相関を持たせることができれば、当該雑音

成分の抑圧も可能である。これが光のスケーリングであり、このような光の場をスクイズド光と呼ぶ。

光のスケーリングは、縮退パラメトリック増幅や第二高調波発生、縮退四光波混合、高励起状態の半導体レーザー発振など、様々の光非線型現象によって発生することが知られており、実験的にも検証されている。しかし実験は未だ現象の確認の域を出ず、また理論についても、満足のゆく結論の得られていない問題が少なくない。

実験上の問題は、量子効果が顕在化する条件が、現実的になったとは云え依然として厳しいことである。一方、理論上の問題は、解析法がいまだに確立していない点にある。

量子論では、相互作用を行う全系に関するエネルギー関数を必要とする。光の実験系に厳密に量子理論を適用しようとするれば、光源とそれを駆動する回路、光の場、受光器とこれを動作させる回路や記録装置、あらゆる損失機構を全て一つの系とみなし、全系を記述する波動関数が必要である。即ち、量子論による実験系の厳密なモデル化は極めて難しく、システムに応じた適切な近似が不可欠になる。

一例として、二つ以上の共振器場が非線型結合する場合を考える。一般に用いられる近似は、共振器場の空間的変動は極めて小さいものと仮定し、ある一つの場の演算子で記述しようとするものである。これを「平均場近似」という。結晶内部での光の発展が無視できる程小さければ、非線型作用にあずかる結晶の部分部分は全て同一とみなすことができ、これらの和として全体の効果を記述することもできる。ところが実際には、非線型光学結晶は有限の長さを持っている。共振器場が強く結合する場合、即ち光の強度が極めて強い場合には、もはやこの近似は適用し得ない。相互作用中に大きく場の振幅が変動するためである。

測定システムの理論的限界を明らかにするためには、近似の範囲を明確にしてこれを正しく取扱う必要がある。しかし現実には、近似の範囲を無視した予見で留まっている例が多く見受けられる。その幾例かは以下に述べる通りであり、本論文の主目的はその是正にある。

1.1.3 第二高調波発生の量子光学的特性

光の非線型相互作用の中でも最古の部類に入り、また実用化技術も成熟している第二高調波発生でさえ、その量子力学特性、およびこれを制限する力学的性質に関して、いまだ議論が尽きていない。本節では、量子光学的特性に関して、第二高調波発生の研究が経て来た変遷について述べる。

スケーリング特性

第二高調波発生によるスケーリングの特長は、いわゆる「明るいスクイズド光」が発生できる点にある。パラメトリック増幅で発生されるスクイズド光 [1-8] は、「スクイズド

真空」と呼ばれる、平均値 0 の光である。これに対し、第二高調波発生で実現されるスクイーミング [9-12] は、ある一定の量子数を持った光の、しかも振幅方向の揺らぎが低減される。このような性質を持った光を発生できるのは、この他には半導体レーザが知られているのみである。[13-18] 可視スクイズド光源としては、ほとんど唯一といってよい。

第二高調波発生によるスクイーミングを最初に予言したのは、1970 年代中頃に始まる二光子吸収体の理論であった。ミュンスター大学の Tornau ら、ドイツ民主共和国科学アカデミーの Paul, Bandilla らは、[19-21] 共振器内に二光子吸収体、即ち同時に 2 つの光子を吸収するような吸収媒質が存在する場合について、Langevin 方程式、または量子マスター方程式を構築し、基本波に関する光子統計を導出した。これは、基本波のみを閉じ込め、第二高調波を閉じ込めない、いわゆる「基本波閉じ込め型」第二高調波発生に相当する。その後、1982 年にはロチェスター大学の Mandel [22] によって、「進行波型」、即ち自由空間内を伝播する基本波を結晶に導入する場合について摂動論による理論検討が行われた。次いで 1983 年にはミラノ物理大学の Lugiato ら [23] によって、第二高調波をも共振器に閉じ込める、「二重閉じ込め型」が検討された。この後しばらく共振器型デバイスの研究が続いていたが、1994 年になって再び「進行波型」デバイスの特性が議論された。インディアナポリス大学の Ou は、揺らぎの伝播方程式を導出し、位相整合条件が完全に満たされている場合の解析解を導いた。[24] この解はノースウェスタン大学の Li らによっても確認されている。[25]

ところで、共振器型デバイスの特性評価に欠かせないのが、共振器場と自由空間を伝播する開放場との相互作用の問題である。我々が情報として取り出すのは、ミラーから洩れ出てきた共振器場の一部、即ち共振器場の損失分が自由空間を伝播してきたものであり、一方、共振器損失を誘起したのは相互作用以前の開放場、即ち、観測にかかわる場の相互作用前の姿に他ならない。つまり、自由空間を伝播していた開放場が、相互作用によって変形されたものを観測していると考えるのが妥当である。

この議論の起源は、1976 年に当時アリゾナ州立大学に在籍していた Lang らが発表した論文に見ることができる [26]。彼らは、自由空間内の光を長さ無限大の理想的共振器のモードで展開し、これとレーザ共振器モードとの結合によって、レーザの線幅を議論したのである。この議論は、1984 年に AT&T ベル研究所の Yurke が発表した論文をきっかけとして、量子光学の分野で脚光を浴び始めた。[27] この論文では、共振器を用いた非線型デバイスの出力雑音特性が、共振器内部の統計だけでは議論できないことを明らかにしている。即ち、共振器内部では有限の雑音低減しか達成していなくとも、出力では 100% のスクイーミングが可能であることなどを示している。以後、ワイカト大学のグループによる理論整備が進み、1984 年には Collett が、共振器ミラーにおける境界条件から導き [28]、1985

年には Gardiner が一般論としてまとめた。[29] この他に、1986 年には NTT 基礎研究所の Yamamoto ら [13]、1987 年にはアーカンサス州立大学の Carmichael [30]、1990 年には同じアーカンサス州立大学の Banacloche ら [31] などによって多数のバリエーションが提示され、「入出力理論」として定説化された。

共振器場とミラー出力との関係が明らかになったため、基本波と第二高調波の両者を閉じ込める「二重閉じ込め型」の特性がほぼ明らかになった。Collett らは、「二重閉じ込め型」第二高調波システムを、縮退パラメトリック発振システム、二光子吸収体を含む共振器などと並列して扱い、そのスキューニング特性を算出している。[32] 一方、基本波だけを閉じ込める「基本波閉じ込め型」の出力に同じ手法を用いようとする、共振器場が直接第二高調波の開放場と相互作用しているため、二次の非線型結合そのものを摂動展開する必要がある。この方法は、入出力理論の発表から 7 年後の 1991 年になって、Collett らによって提案され、レーザ内部・単一共振型システムの出力解析が行なわれた。[33] 続いて 1994 年には、外部共振器型の解析が同様の手法によって行われ、コンスタンツ大学の Paschotta らによって実験との対比がなされている。[10] 以来、急激に実験が活性化しており、オーストラリア国立大学の Ralph ら、[11] 電子技術総合研究所の Tsuchida [12] などによってスクイズド光発生への報告がなされている。

この理論によって出射された光の性質が完全に記述され、出力第二高調波の雑音特性は予測可能になったかのように見えた。しかし、入出力理論の暗黙の了解として、共振器場と開放場の相互作用が極めて小さいとする仮定が設けられている。これは、入出力理論、およびこれを支える Langevin 的な運動解析が、低次の摂動を基礎に置くからである。従って、極めて大きい共振器損失を必要とする場合には、この理論は使えない。

共振器内部の光子密度が高くなる領域では、当然非線型性が大きくなり、この結果、低次の摂動に基づく入出力理論の適用範囲外になる。非線型性の大きさはスキューニング量の大きさと正の相関を持つので、単一共振型第二高調波発生システムの最大スキューニング量の導出には、入出力理論は不適當であり、新たな理論による再検討が不可欠である。

側波モードのパラメトリック発振

1993 年、スタンフォード大学の Schiller と Byer は、ニオブ酸リチウム結晶の内部で基本波と第二高調波の両者を全反射させるモノリシック共振器 (monolithic total-internal-reflection resonator: MOTIRR) を構築し、これを用いて第二高調波発生を試みたところ、基本波について対称な二つの周波数で、コヒーレントな発振が生じているのを観測した。[34] これは発生した第二高調波をポンプとして、空の共振器モードがパラメトリック発振したものである。

通常の光共振器は、波長の数千万倍以上の長さを有しており、共振器モード間隔は MHz から GHz のオーダーになるのが普通である。この程度の周波数差では、結晶の位相整合条件や、共振器ミラーの反射率は、基本波モードのそれと大差ない。このため、基本波以外の共振器モードが、発生した第二高調波や、基本波モードとの間で非線型相互作用する可能性が生じるのである。

結晶の位相整合条件を Type-II で満足する、すなわち、基本波に直交する二つの直線偏波を必要とする場合には、更に複雑な結合が生じることになる。この結晶に基本波を入射する時には、位相整合に必要な直交 2 偏波に同量のエネルギーを分配するため、これらに対して 45° に傾けた直線偏波状態で入射するのが普通である。このため、基本波の実質的な共振器モードは、この傾いた偏波状態と見なすことができる。ところが、上記の傾いた偏波状態の他に、 -45° だけ傾けた偏波状態、すなわち、基本波の実質的な共振器モードとは直交する偏波状態のモードが、やはり非線型結合にあずかることになる。O_{II} は、この空いている偏波モードにもパラメトリック発振が生じ得ることを予見している [35]。

これらのパラメトリック発振は、非線型結晶と共振器を用いている以上、避けることのできない現象である。一般に、パラメトリック発振は、発振モードの安定化が難しく、極めて大きなカオス的強度変動が生じる。また安定化し得たとしても、雑音特性には大きな変化が予測される。量子雑音の低減というデリケートな現象にとって、この発振現象は致命的な劣化の原因となり得る。従って、その閾値の評価は、スキューニング量の限界を論じる上で極めて重要である。ところが、スキューニング評価の項で述べた理論的な不具合やモデルの不完全性により、パラメトリック発振閾値の正しい評価が行われていない。

1.2 本論文の概要

筆者は、以上に述べた理論上の不具合を解決するため、従来用いられてきた解析手法の問題点を指摘し、これに変わる新しい手法を提案して、第二高調波発生システムの量子雑音特性に関する知見を整理し、その体系化に努めた。

基本波閉じ込め型システムの雑音特性解析

基本波閉じ込め型システムでは、第二高調波への変換効率が共振器内を周回する基本波パワーの函数となっており、供給する基本波を強めるほど、共振器場の損失が大きくなってしまう。更に、結晶中におけるパワーの変化も顕著になる。このため、供給する基本波入力が多い場合には、共振器内で電磁場の強度はほぼ一定とする「平均場近似」や、それに基づく摂動論が成立しなくなる。

筆者は、結晶内での平均値および揺らぎの発展を考慮した新しい解析法を提案し、これに基づいて最大スクイーピング量の計算を行った。この結果、従来の摂動論に基づく計算とは異なる結論を導いた。摂動論によると、第二高調波出力ではショット雑音レベルの 1/9 までしか低減できないとされていたが、結晶内での発展まで考慮すると、基本波入力ミラーの透過率によって最大量が規定され、透過率が 0 に近づくほど、最大スクイーピング量も 100% に近づくことが示される。また基本波出力については、従来 13% 程度しか減少しないとされていたが、本解析では、入力ミラーが全透過、即ち、進行波型デバイスとして動作した時に最大スクイーピング量 100% が得られることを導いた。この結果は進行波型デバイスについて得られている知見と整合するものである。

筆者は更に、レーザの内部に非線型光学結晶を含む、「レーザ内部型」の解析を行った。この結果明らかになったのは、非線型変換効率の飽和と自然放出雑音の飽和との関係から、達成可能なスクイーピング量が決定されることである。特に、過大な非線型性は雑音特性を劣化させ得るといふ、これまで知られていなかった現象を予見した。

パラメトリック発振の閾値解析

本項目については、まず、基本波のみを閉じ込めるシステムについて解析を行い、基本波と同一の偏波状態を持つ空のモードについては、基本波との和周波発生の影響によって発振は生じないことを明らかにした。すなわち、基本波についてただ一つの偏波状態しか使用しない Type-I 位相整合を採用したシステムでは、パラメトリック発振は発生せず、最大スクイーピング量 100% が達成されることが示された。一方、基本波について 2 つの偏波状態を使用する Type-II 位相整合を採用したシステムでは、入射する基本波と直交する、空の偏波モードの発振が避けられず、最大スクイーピング量は 50% に留まることが分かった。

次に、基本波と第二高調波の両者を閉じ込める「二重閉じ込め型」システムを、和周波発生などの他の非線型相互作用まで考慮して解析した。この結果、パラメトリック発振の閾値が、和周波とその共振器モードの離調度によって定まり、特に離調が 0 の場合には自励発振の開始点程度まで引き上げられることを明らかにした。また、本システムのうち、パラメトリック発振の影響を受けやすいシステムは、第二高調波出力のスクイーピング特性を重視したシステムであることを予見した。

1.3 論文の構成

本論文は解析法、共振器構成によって章別している。具体的な内容は以下の通りである。

第 1 章 序論 本論文の歴史的背景と、目的、概要を述べた。

第 2 章 第二高調波発生と光の量子雑音 二次の非線型光学現象である第二高調波発生に関する概論を記し、光共振器と基本波注入の別によるシステムの分類を行う。また、量子雑音の源となる零点振動と、コヒーレント状態、スクイズド状態に関する理論的基礎を与える。最後に、共振器場と開放場との相互作用が、量子雑音特性に与える影響について詳説する。

第 3 章 二光子損失モデルによる基本波閉じ込め型システムの解析 平均場近似と低次の摂動によって展開される「二光子損失モデル」を用いて、基本波閉じ込め型システムの量子雑音特性を解析し、その問題点を明らかにする。

第 4 章 非線型光学結晶内の発展と基本波閉じ込め型システムの出力雑音特性 共振器損失が大きいシステムの量子雑音特性を解析する一般論を展開し、基本波閉じ込め型システムへの応用を試みる。

第 5 章 パラメトリック同時発振による二重閉じ込め型システムのスクイーピング特性劣化 基本波・第二高調波の両者を閉じ込めるシステムを解析し、空モードのパラメトリック発振閾値と、これによるスクイーピング特性の劣化を検討する。

第 6 章 結言 論文全編のまとめと、将来の展望について述べる。

第 2 章

第二高調波発生と光の量子雑音

第二高調波発生は、非線型光学効果の中でも最も古くから知られていた現象の一つであり、これを用いた波長変換システムは、既に広く実用化されている。本章ではまず、二次の非線型光学現象の原理と第二高調波発生システムの分類、および波長変換デバイスとしての得失をまとめる。次に、光の量子雑音とその低減効果であるスクイーミングについて概説する。最後に、共振器を用いたシステムの動作解析に必要な、共振器場と開放場との相互作用について詳述する。

2.1 二次の非線型光学現象

誘電体に生じる分極は、結晶内の束縛電子と原子核とが作る電気双極子が多数集まり、一つの大局的な現象として扱われるものである。量子論的に解釈すると、誘電体結晶に光電場を印加したときに生じる分極は、光量子の一部が吸収された後、極めて短い時間内に再び放出されるというプロセスが繰り返された結果ということになる。このとき、光量子エネルギー $\hbar\omega$ が原子系のエネルギー準位差より十分小さければ、原子系へのエネルギーの移行はほとんど無い。このような励起を、実際に励起はしていないが、光と光の相互作用の仲介のみを行うために仮に励起していると云う意味で「仮想励起」と呼ぶ。

本論文では誘電体結晶を、光と光の相互作用を仮想励起によって仲介する物質と考え、実励起や、フォノンによる散乱等を見捨てることにする。即ち、誘電体結晶の原子系の運動は断熱的に排除できるものと仮定し、誘電体分極は印加された光電場に対する応答としてのみ表し得るものとする。

この誘電体分極のうち、印加電場 E の二次の積に応じて変化するものを、二次の非線型分極と呼び、そのような特性を持つ誘電体を二次の非線型結晶と呼ぶ。いま、周波数 ω の光電場を二次の非線型結晶に加えると、分極 P の振動周波数には ω の他に 0 および 2ω

が存在することになる。このうち前者の効果を光整流 (optical rectification) とよぶ。また、後者のように振動する双極子が空間中に放置されれば、これはアンテナとなって、周波数 2ω の電磁場を放出する。微視的には、 $\hbar\omega$ の光量子 2 個を吸収し、 $2\hbar\omega$ の光量子 1 個を放出する過程であり、第二高調波発生 (second-harmonic generation) と呼ばれる。

もし、印加電場に ω_1, ω_2 の、異なる周波数成分が含まれている時には、和周波 $\omega_1 + \omega_2$ 、および差周波 $\omega_1 - \omega_2$ の成分が発生することになる。これらを和周波発生 (sum-frequency generation)、差周波発生 (difference-frequency generation) と呼ぶ。また、これらの複数の光の相互作用を総称して、パラメトリック相互作用と呼ぶ。

差周波発生を視点を変えて眺めてみる。差周波が発生すると、入射した二つの周波数成分のうち、低い周波数成分のエネルギーも増える。これは、入射光のうち、高い周波数成分のエネルギー量子 1 個に対して、低い周波数成分のエネルギー量子 1 個と差周波成分のエネルギー量子 1 個が発生するためである。即ち、パラメトリック相互作用を通じて入射した低い周波数成分が増幅される。このため、この現象はパラメトリック増幅と呼ばれる。パラメトリック増幅は、歴史的にはマイクロ波の増幅現象として知られていた現象であり、相互作用にあずかる光に、その当時の呼び名を付けて区別している。即ち、入射した高い周波数の光をポンプ光、増幅される低い周波数の光を信号光、捨てられる差周波成分をアイドラ光などと呼んでいる。

以上の例は、分極が非線型に応答するという古典的な描像でも説明可能であるが、これらに加えて、入射する光電場が極めて強い場合には、自励的に、より低い周波数のモードにエネルギーが分配されることがある。これは、入射光をポンプ光として、これよりも低い周波数の真空場のパラメトリック増幅が発生し、これと同時に、発生したアイドラ成分のパラメトリック増幅が生じるためである。このように、パラメトリック相互作用を通じて自励的にエネルギー量子が発生する現象をパラメトリック蛍光 (parametric fluorescence) と呼ぶ。

以上の現象を図 2.1 の模式図にまとめる。

2.2 第二高調波発生システムの分類

一般に、原子系の吸収が小さい周波数領域では、非線型性は極めて小さい。典型的には、誘電率を線型誘電率の 2 倍にするのに必要な電場の大きさは 10^{12} V/m 程度、パワー密度にしておよそ 10^{15} W/mm² である。即ち、電子回路素子で見られるような大きい非線型性は期待できない。このため、前節で述べた第二高調波発生を効率良く行うためには、光共振器によって相互作用にあずかる光強度を高める必要がある。

共振器内部に非線型光学結晶を配置した第二高調波発生システムでは、共振器の閉じ込

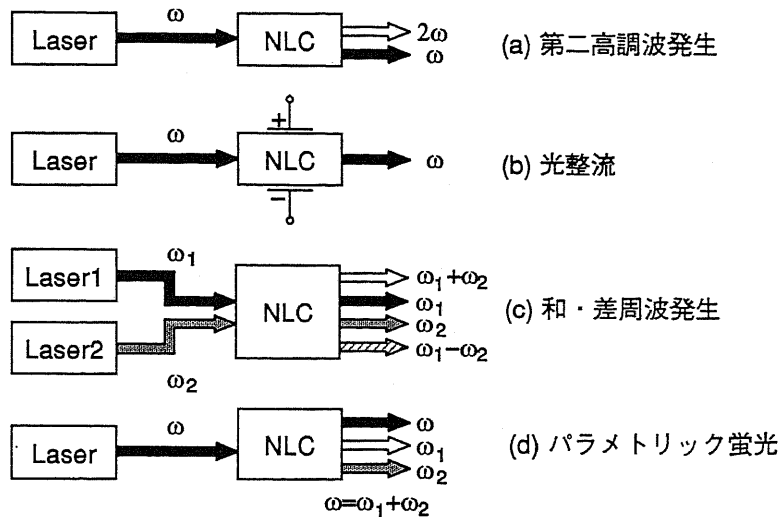


図 2.1: 2 次の非線型光学現象

め効果によって、進行波型の場合よりも高い強度で非線型作用を生じさせることができる。そのシステムの構成は、共振器の導入法及び基本波の供給法によって各々 2 通り、計 4 通りの組み合わせに分類される。まず共振器については、高調波を共振器に閉じ込める場合と、閉じ込めない場合とに区別する。本論文では、前者を「二重閉じ込め型」、後者を「基本波閉じ込め型」と呼ぶことにする。¹

一方、基本波の供給法に関しては、レーザと非線型結晶を含む共振器が独立しているものと、レーザ共振器の内部に非線型結晶を含むものとの分類される。以後、前者を「外部共振器型」、後者を「レーザ内部型」と呼ぶことにする。

図 2.2 に各方式の概略図を示す。本図では単方向リング型共振器を仮定しているが、これは、基本波閉じ込め型で発生する第二高調波の出射方向を一方向に制限するためである。

表 2.1 に、各第二高調波発生システムの得失をまとめる。システムの安定性は、レーザを含む全システムでの共振器の数によって定まる。光共振器の共振周波数を全て一致させなければ、効率のよい波長変換は得られない。ところが、光共振器は機械的振動や温度に極めて敏感で、これを長時間安定に保つことは極めて困難である。一方、閉じ込めが強いほど、非線型相互作用に関わるエネルギーも大きくなるため、効率も良好になる。従って、安定性

¹これらのシステムは、各々「二重共振型」「単一共振型」と呼ばれることが多い。しかし、非線形光学結晶の位相整合を Type-II で行った場合には、基本波周波数で二つの偏波状態に対して共振条件を満足しなければならない。即ち、基本波のみを閉じ込めるシステムであったとしても、厳密には「二重共振」となってしまう。この混乱を避けるため、一般的な呼称は使わないことにする。

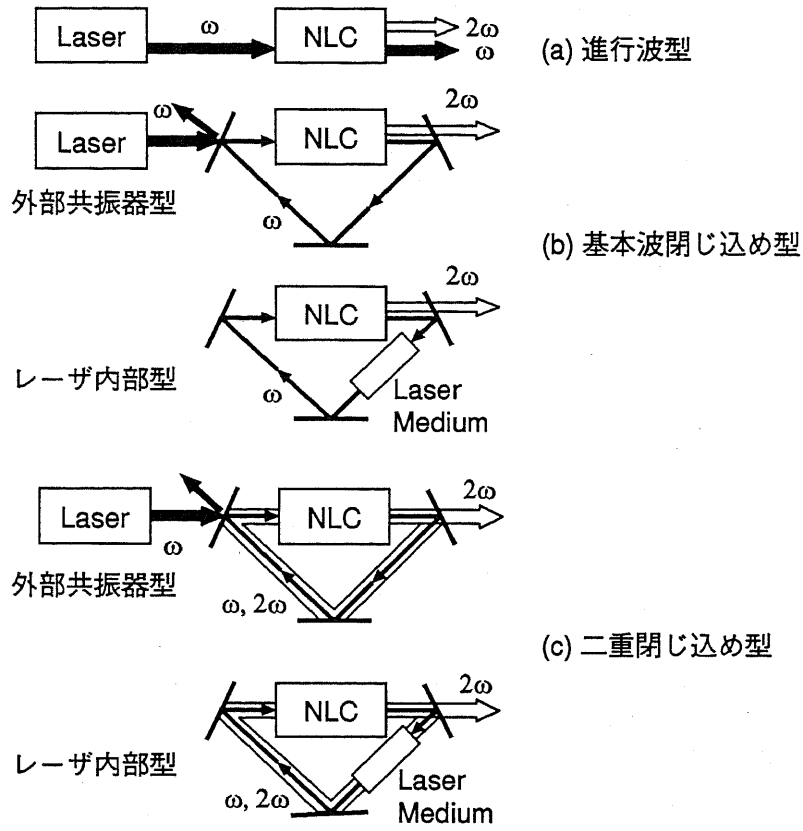


図 2.2: 第二高調波発生システムの構成

表 2.1: 第二高調波発生システムの分類と特徴

		基本波 供給	効率	安定性
進行波型	—	外部	×	○
基本波閉じ込め型	外部共振器型	外部	△	△
	レーザ内部型	内蔵	△	○
二重閉じ込め型	外部共振器型	外部	○	×
	レーザ内部型	内蔵	○	△

と特性のいずれが必要かによって、システムを選択しなければならない。

2.3 光の量子雑音

ある理想共振器、即ち、損失など、外界との相互作用の全く無い共振器内に閉じ込められた電磁場が、調和振動子と全く同等に扱えることはよく知られている。[36] このため、光の量子状態に関する議論は、調和振動子の量子数を上げ下げする演算子、「生成演算子」 \hat{a}^\dagger と「消滅演算子」 \hat{a} によってなされることがほとんどである。本節でもこれに習い、一次元調和振動子の量子状態に関して記述することにする。

2.3.1 コヒーレント状態

一次元調和振動子のハミルトニアンを生成/消滅演算子によって表せば、

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.1)$$

と表される。ここで、交換関係

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0, \quad (2.2)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (2.3)$$

が成り立つ。この系のエネルギー固有値は、等間隔 $\hbar\omega$ の離散的固有値になる。このときの固有状態を $|n\rangle$ ($n=0,1,2,\dots$) で表し、光子数 n の「光子数状態」と呼ぶ。基底準位 $|0\rangle$ は、基底準位であるにも関わらず $1/2\hbar\omega$ なるエネルギーを持ち、「真空状態」、もしくは「真空場」と呼ばれる。

コヒーレント状態とは、消滅演算子の固有状態として、

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.4)$$

によって定義される状態 $|\alpha\rangle$ を云う。これを光子数状態で展開すると、

$$|\alpha\rangle = e^{-1/2|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.5)$$

となることが容易に分かる。光子数 n を持つ状態にある確率は、

$$|\langle\alpha|n\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}, \quad (2.6)$$

即ち、Poisson 分布となる。

コヒーレント状態のもう一つの重要な性質は、真空場との関連である。すなわち、ずれの演算子を用いて、

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}|0\rangle, \quad (2.7)$$

と表される点である。これは、真空状態をある古典的な電場で励振するとコヒーレント状態になることを意味する。過剰雑音の無いレーザからの光をフォトダイオードで検出すると、光電流パルスの生起分布、即ちショット雑音の振幅分布は Poisson 分布に従う。この事実は、光の量子論によって次のように解釈することもできる: 理想的なレーザではレーザ媒質の電気分極が古典的に励振されており、これが放射源となって光の場を生成している。すなわち、出力光の状態はコヒーレント状態であり、そのために光子の到来分布は Poisson 的になるのである。

いま消滅演算子を、二つのエルミート演算子 \hat{a}_1, \hat{a}_2 によって、

$$\hat{a} = \hat{a}_1 + i\hat{a}_2, \quad (2.8)$$

と表せば、交換関係

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_2] = \frac{i}{2}, \quad (2.9)$$

より、不確定積は

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{a}_1^2 \rangle \langle \Delta \hat{a}_2^2 \rangle &\equiv \left(\langle \hat{a}_1^2 \rangle - \langle \hat{a}_1 \rangle^2 \right) \left(\langle \hat{a}_2^2 \rangle - \langle \hat{a}_2 \rangle^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{16}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

となることがわかる。コヒーレント状態では、

$$\langle \Delta \hat{a}_1^2 \rangle = \langle \Delta \hat{a}_2^2 \rangle = \frac{1}{4}, \quad (2.11)$$

となることが容易に示される。即ち、ゆらぎの大きさは、直交する位相成分 \hat{a}_1, \hat{a}_2 について等しく、かつ最小不確定積を満たしていることが分かる。

2.3.2 直交振幅スクイズド状態

本来スクイーピングとは、ある物理量の量子力学的揺らぎを、通常得られる大きさ以下に抑圧することを指す。ある物理量の揺らぎを小さくすると、不確定性関係の要請により、その物理量に共軛な物理量の揺らぎが大きくなってしまふ。即ち、これら2つの物理量の揺らぎを同時に、かつ任意に小さくすることはできない。しかし、観測する物理量をいずれか一つに限り、その雑音を小さくすることについては、制限されない。例えば、光を直接フォトダイオードで検出する場合には、光の位相情報は無視されるし、またホモダイン検波に

よって同相成分が取り出された場合には、直交位相成分は無視される。従って、検出形態に応じた制御が行えれば、光測定的大幅な性能向上が見込まれる。

スクイーミングには、その抑圧成分によって異なる種々の形態があるが、ここでは、 \hat{a}_1 、 \hat{a}_2 のいずれかの揺らぎが抑圧された光の状態、即ち直交振幅スクイズド状態を考える。

直交振幅スクイズド状態は、 \hat{a} の Bogoliubov 変換

$$\hat{b} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger, \quad |\mu|^2 - |\nu|^2 = 1, \quad (2.12)$$

の固有状態

$$\hat{b}|\beta; \mu\nu\rangle = \beta|\beta; \mu\nu\rangle, \quad (2.13)$$

として定義される。このとき、 \hat{a}_1 、 \hat{a}_2 の揺らぎを計算すると、

$$\langle\beta; \mu, \nu|\hat{a}_1^2|\beta; \mu, \nu\rangle - \langle\beta; \mu, \nu|\hat{a}_1|\beta; \mu, \nu\rangle^2 = \frac{|\mu - \nu|^2}{4}, \quad (2.14)$$

$$\langle\beta; \mu, \nu|\hat{a}_2^2|\beta; \mu, \nu\rangle - \langle\beta; \mu, \nu|\hat{a}_2|\beta; \mu, \nu\rangle^2 = \frac{|\mu + \nu|^2}{4}, \quad (2.15)$$

となる。特に μ, ν が実数の時には、 \hat{a}_1 、 \hat{a}_2 の最小不確定状態となる。

ここで、特に

$$\mu = \cosh r, \quad \nu = \sinh r, \quad (2.16)$$

とおき、スクイズ演算子

$$S(r) = e^{r/2(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})}, \quad (2.17)$$

を定義すると、

$$|\beta; \mu\nu\rangle = D(\alpha)S(r)|0\rangle, \quad \beta = \alpha \cosh r + \alpha^* \sinh r, \quad (2.18)$$

と書ける。即ち、スクイズ演算子 $S(r)$ によって変形した真空を古典的に励振することで、直交位相スクイズド状態が発生する。なお $S(r)$ は、縮退パラメトリック増幅の発展を表している。

2.3.3 第二高調波発生による振幅スクイーミング

一般に非線型光学効果は、光強度が大きいほど顕著に現れる。第二高調波発生を局所的に見ると、基本波電場の二乗に比例して第二高調波電場が発生している、従って、基本波の光強度が大きければ高調波が顕著に発生し、逆に基本波の光強度が小さければ高調波は生じにくい。すると、図 2.3 に模式的に示すように、相互作用後の基本波の光強度分布は、強度の小さい方向に圧縮されることになる。これによって、振幅方向のスクイーミングが可能になる。また、出射第二高調波については、基本波の強度が比較的強かった部分のみが変換さ

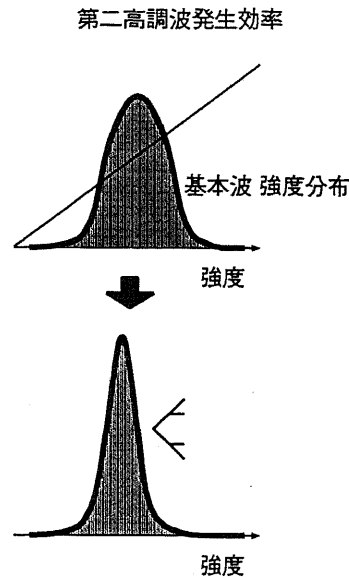


図 2.3: 第二高調波発生による振幅スクイーミング

れることになるので、やはりその強度分布は基本波の初期分布よりも狭い範囲に限られる。即ち、第二高調波出力にも振幅のスクイーミングをもたらすことになる。

なお、振幅スクイーミングと、直交振幅スクイーミングとは、光量子数が十分に大きい場合に同等になる。即ち、

$$\hat{a} = (\alpha + \Delta\tilde{a})e^{-i\omega t}, \quad \alpha: \text{実数} \quad (2.19)$$

として、定常振幅 α と微小揺らぎ $\Delta\tilde{a}$ に分解すると、光子数の揺らぎ $\Delta\hat{n}$ は、

$$\begin{aligned} \Delta\hat{n} &= \Delta(\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= \alpha(\Delta\tilde{a} + \Delta\tilde{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (2.20)$$

となり、両者は1対1の関係にあることがわかる。

2.3.4 実験上のスクイーミング

以上の議論は、一次元調和振動子に関するものであることに注意しなければならない。光の場と調和振動子が同等になるのは、ある有限の体積内に、光が閉じ込められている場合に限られる。ところが実際には、光検出器に入射される光は自由空間を伝播して来た進行波である。従って、実験で得られる結果は、共振器内部の場そのものとは異なる。上のように単一モードで定義されるスクイーミングは、実験的に観測されているスクイーミングとは、必ずしも一対一に対応するものではない。

自由空間中の光の取扱は次のように行われる。まず自由空間を、極めて長い共振器の内部であると考え、そのほとんど連続的に並んだ共振器モードのそれぞれを検討する。各モードの和は周波数上の積分に置き換えられ、モード振幅の揺らぎは「雑音密度」となる。ところで、光検出時の電気領域における雑音周波数成分には、信号周波数を挟んで対称位置にある二つの周波数成分が一組となって寄与する。スクイーミングは、検出した雑音信号のパワースペクトルが、ショット雑音レベルより小さくなっているか否かで判定されるから、その実現には、この一組の周波数成分の間に量子的な相関を与えてやれば良い。

次節では、これらのメカニズムについて解説する。

2.4 開放場と共振器場の相互作用

一般に損失とは、少数自由度の系が多自由度の系と相互作用することによって生じるものである。ミラーにおける共振器損失は、共振器場という少数自由度の系が、開放場という多自由度の系と結合することで発生する。序論で述べた通り、これらの全てを厳密に扱うことは事実上不可能であり、何らかの近似が必要である。最も一般的なのは、低次の摂動展開による方法である。

まず、共振器場の変化に比べ、開放場との相互作用時間は充分短く、しかも、その結果が再び共振器場を影響することがないものとする。このとき共振器場が相互作用する開放場は、常に熱平衡状態を保つことになる。このように、相互作用の瞬間に熱平衡状態に戻ってしまうような外部系のことを、一般に「熱浴 (reservoir)」という。

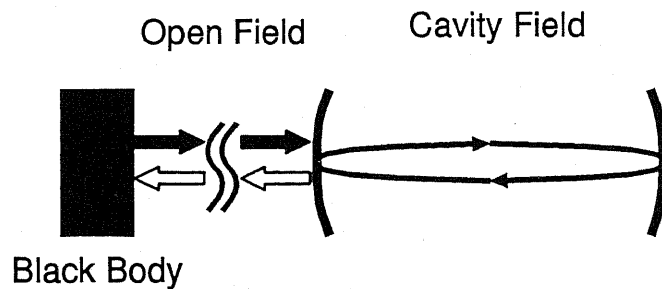


図 2.4: 開放場 (熱浴) と共振器場の相互作用

この考え方を、図 2.4 に従って説明する。共振器場は、図面左側の部分反射ミラーによって開放場と相互作用する。このとき、共振器場に対して影響する開放場は、左から右に向かって進行するもののみである。一方、共振器から出力された光は、右から左へと進行することになる。出力の反射をアイソレータ等で抑え、戻り光の影響を無くすると言うことは、

図のように、黒体で終端することと同値である。つまり、開放場は熱平衡状態と看做してよい。特に、光の場合には単位量子エネルギー $\hbar\omega$ が熱雑音エネルギー kT に比べて大きいので、問題となるのは開放場の真空成分、即ち零点振動成分である。

第2.3.1節で述べたように、零点振動成分は、各モードについて単位量子エネルギーの半分だけのエネルギーを持つ。着目する周波数範囲を共振器の共振周波数の近辺に限ると、零点振動成分は周波数によらず、ほぼ一定のパワーを持つとしてよい。言い替えれば、開放場の零点振動が共振器場に与える雑音は、白色のスペクトルを持つということであり、また相関関数が δ 関数的になるということである。

2.4.1 熱浴近似と入出力理論

ここで、熱浴近似によってミラーにおける共振器損失を定式化する。いま、共振器モードを \hat{a} 、共振器外の進行波を、周波数 ω_j を持つ開放場の演算子 \hat{b}_j の和として表す。全ハミルトニアンは、自由運動ハミルトニアン

$$\begin{aligned} H_0 &= H + R \\ &= \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_j \hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \end{aligned} \quad (2.21)$$

と、ミラーにおける相互作用ハミルトニアン

$$V = i\hbar\kappa(\hat{F}\hat{a}^\dagger - \hat{F}^\dagger\hat{a}), \quad (2.22)$$

の和として表せる。ただし、

$$F = \sum_j \hat{b}_j, \quad (2.23)$$

とした。場の演算子を回転波近似して、

$$\hat{a}(t) = \bar{a}(t)e^{-i\omega_0(t-t_0)}, \quad (2.24)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \bar{a}^\dagger(t)e^{i\omega_0(t-t_0)}, \quad (2.25)$$

$$\hat{b}_j(t) = \bar{b}_j(t)e^{-i\omega_j(t-t_0)}, \quad (2.26)$$

$$\hat{b}_j^\dagger(t) = \bar{b}_j^\dagger(t)e^{i\omega_j(t-t_0)}, \quad (2.27)$$

とする。ただし、 t_0 は共振器場と開放場との相互作用が開始した時刻である。

演算子 \bar{a} の運動方程式は

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = -\sum_j \kappa \bar{b}_j(t) e^{i(\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)}, \quad (2.28)$$

で表される。ここで、 \tilde{b}_j の形式解を

$$\tilde{b}_j(t) = \tilde{b}_j(t_0) + \kappa \int_{t_0}^t dt'' \tilde{a}(t'') e^{i(\omega_j - \omega_0)(t'' - t_0)}, \quad (2.29)$$

として (2.28) に代入し、 κ について 2 次までの項を取ると、

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{a}}{dt} = & - \sum_j \kappa \tilde{b}_j(t_0) e^{i(\omega_0 - \omega_j)(t - t_0)} \\ & - \sum_j \kappa^2 \int_{t_0}^t dt'' \tilde{a}(t'') e^{-i(\omega_0 - \omega_j)(t'' - t)}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

が得られる。いま $g(\omega_j)$ を周波数 ω_j におけるモード密度として、式 (2.30) 第二項の和を積分で置き換えれば、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \equiv & -\kappa^2 \int_{t_0}^t dt'' \tilde{a}(t'') \sum_j e^{-i(\omega_0 - \omega_j)(t'' - t)} \\ \simeq & -\kappa^2 \int_{t_0}^t dt'' \tilde{a}(t'') \int_0^\infty d\omega_j g(\omega_j) e^{-i(\omega_0 - \omega_j)(t'' - t)}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

となる。真空中の光速を c_0 、開放場の仮想共振器の長さを L_s とすれば、単色平面波のモード密度は一定値 $L_s/2\pi c_0 \equiv g$ である。積分変数を $\omega_j - \omega_0$ に変更すれば、 $\omega_0 \gg 0$ より、積分の下限が $-\infty$ で置き換えられる。この結果、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \simeq & -2\pi g \kappa^2 \int_{t_0}^t dt'' \tilde{a}(t'') \delta(t'' - t) \\ \equiv & -\frac{\gamma}{2} \tilde{a}(t), \end{aligned} \quad (2.32)$$

を得る。ただし、モード減衰率を

$$\gamma \equiv 2\pi g \kappa^2, \quad (2.33)$$

で定義し、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \delta(t), \quad (2.34)$$

と

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{i\omega t} d\omega \simeq \frac{1}{2} \delta(t), \quad (2.35)$$

を用いた。ここで、 $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数である。

式 (2.32) を (2.30) に代入すると、 \tilde{a} に対する Langevin 方程式が、

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \tilde{a}(t) + \kappa \sum_j \tilde{b}_j(t_0) e^{i(\omega_0 - \omega_j)(t - t_0)}, \quad (2.36)$$

とかける。ここで、

$$\tilde{s}_{\text{in}} \equiv \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \tilde{b}_j(t_0) e^{i(\omega_0 - \omega_j)(t - t_0)}, \quad (2.37)$$

を、共振器場に対する「入力場」として考えれば、Langevin 方程式 (2.36) は、

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\tilde{a}(t) + \sqrt{\gamma} \tilde{s}_{\text{in}}, \quad (2.38)$$

と書くことができる。

それではミラー出力はどうなるか。いま、基本波の進行波モードの座標 z を、ミラーによって折曲げられる進行方向に沿ってとり、ミラー位置を $z = 0$ とする。すると出力場 $\hat{s}_{\text{out}}(z, t)$ (回転波表示ではなく、光周波数の振動項を含んだ表示) は、 $z > 0$ における進行波モードの和

$$\begin{aligned} \hat{s}_{\text{out}}(z, t) &= \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \hat{b}_j(z, t) \\ &= \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} e^{i\omega_j z/c} \hat{b}_j(t_0) + \kappa \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \int_{t_0}^t dt' \tilde{a}(t') e^{i(\omega_j - \omega_0)(t' + z/c - t) + i\omega_0(z/c)}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

で表される。ここで (2.29) を用い、また、空間内の自由発展を考慮した。モードに関する和を $\omega_j - \omega_0$ に関する積分に置き換え、積分の下限を $-\infty$ とすれば

$$\hat{s}_{\text{out}}(z, t) \simeq \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} e^{i\omega_j z/c} \hat{b}_j(t_0) + \sqrt{2\pi g} \kappa \int_{t_0}^t dt' \tilde{a}(t') e^{i\omega_0 z/c} \delta(t' + z/c - t), \quad (2.40)$$

が得られる。ここで $t - z/c > 0$ とすれば、

$$\hat{s}_{\text{out}}(z, t) \simeq \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} e^{i\omega_j z/c} \hat{b}_j(t_0) + \sqrt{\gamma} \tilde{a}(t - z/c) e^{i\omega_0 z/c}, \quad (2.41)$$

となる。ミラー出射端近傍の特性を回転波表示によって表せば、 $z \rightarrow +0$ より、

$$\tilde{s}_{\text{out}}(+0, t) = \tilde{s}_{\text{in}} + \sqrt{\gamma} \tilde{a}(t - 0), \quad (2.42)$$

となる。

以上をまとめると、共振器場 a の損失は、

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\tilde{a} - \sqrt{\gamma} \tilde{s}_{\text{in}}, \quad (2.43)$$

で表され、また、ミラーからの出力場 \tilde{s}_{out} は、

$$\tilde{s}_{\text{out}} = \tilde{s}_{\text{in}} + \sqrt{\gamma} \tilde{a}, \quad (2.44)$$

で表される。

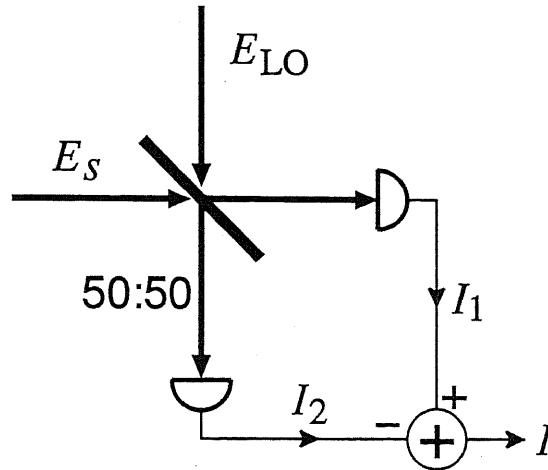


図 2.5: バランス型ホモダイン受信器

2.4.2 光検出時の雑音

直接検出 式(2.44)で与えられる光をフォトダイテクタで検出すると、 $s_{\text{out}}^\dagger s_{\text{out}}$ という、光パワーに比例した光電流が得られる。いま \bar{s}_0 をある正の実数として

$$\bar{s}_{\text{out}} = \bar{s}_0 + \Delta \bar{s}_{\text{out}}, \quad (2.45)$$

と書けるものとすれば、

$$\bar{s}_{\text{out}}^\dagger \bar{s}_{\text{out}} = \bar{s}_0^2 + 2\bar{s}_0 \frac{\Delta s_{\text{out}} + \Delta s_{\text{out}}^\dagger}{2} + o(\Delta^2), \quad (2.46)$$

と表すことができる。ここで Δ の2次以上の項を集めた $o(\Delta^2)$ を無視すれば、平均は \bar{s}_0 、揺らぎは $2\bar{s}_0(\Delta s_{\text{out}} + \Delta s_{\text{out}}^\dagger)/2$ に比例することが分かる。

ホモダイン検出 図2.5に示すバランス型ホモダイン受信器を考える。入射信号は50:50のハーフミラーによって、同一の周波数を持つ局発振光(局発光)と重ね合わされる。これによって発生する二つの出力はそれぞれ別のフォトダイオードに導かれ検波される。得られた二つの信号は差動増幅器を介して合成されるが、これによって局発光ポートからの真空雑音と局発光のビート雑音(一般に局発光ショット雑音と呼ぶ)は相殺してしまう。[37]以下、これを示す。

いま局発光の場を、信号と同一の周波数 ω_c で回転する座標系で表し、

$$\bar{r}_{\text{LO}} = \bar{r}_0 e^{i\phi} + \Delta \bar{r}_{\text{LO}}, \quad (2.47)$$

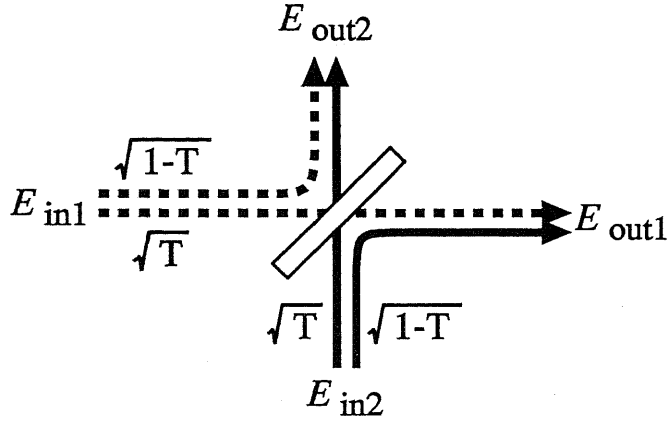


図 2.6: 部分透過ミラーの入出力特性

と書くことにする。一般に、図 2.6 のように、部分透過ミラーの二つのポートから入射された光の場合は、反対側の二つのポートに

$$E_{out1} = \sqrt{T} E_{in1} + \sqrt{1-T} E_{in2}, \quad (2.48)$$

$$E_{out2} = \sqrt{1-T} E_{in1} - \sqrt{T} E_{in2}, \quad (2.49)$$

のように出力されることが知られている。[13,38] ここで、ミラーのパワー透過率を T とした。ここで $T = 0.5$ とおけば、二つのフォトダイオードから得られる光電流は、それぞれ

$$I_1 \propto \left(\frac{\tilde{r}_{LO} + \tilde{s}_{out}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\tilde{r}_{LO}^\dagger + \tilde{s}_{out}^\dagger}{\sqrt{2}} \right), \quad (2.50)$$

$$I_2 \propto \left(\frac{\tilde{r}_{LO} - \tilde{s}_{out}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\tilde{r}_{LO}^\dagger - \tilde{s}_{out}^\dagger}{\sqrt{2}} \right), \quad (2.51)$$

で表される。これより、差動出力は

$$I \propto 2\tilde{r}_0\tilde{s}_0 \cos \phi + 2\tilde{r}_0 \frac{\Delta\tilde{s}_{out}e^{-i\phi} + \Delta\tilde{s}_{out}^\dagger e^{i\phi}}{2} + 2\tilde{s}_0 \frac{\Delta\tilde{r}_{LO} + \Delta\tilde{r}_{LO}^\dagger}{2}, \quad (2.52)$$

と書ける。ただし、 Δ^2 の項は無視した。ここで、局発光の振幅 \tilde{r}_0 が信号振幅 \tilde{s}_0 に比べて十分大きいとすれば、

$$I \propto 2\tilde{r}_0\tilde{s}_0 \cos \phi + 2\tilde{r}_0 \frac{\Delta\tilde{s}_{out}e^{-i\phi} + \Delta\tilde{s}_{out}^\dagger e^{i\phi}}{2}, \quad (2.53)$$

が得られる。これより、 $\phi = 0$ のときには振幅揺らぎ

$$\Delta\tilde{s}_{1out} = \frac{\Delta\tilde{s}_{out} + \Delta\tilde{s}_{out}^\dagger}{2}, \quad (2.54)$$

が、 $\phi = \pi/2$ の時にはこれに直交する位相方向の揺らぎ

$$\Delta \tilde{s}_{2\text{out}} = \frac{\Delta \tilde{s}_{\text{out}} - \Delta \tilde{s}_{\text{out}}^\dagger}{2i}, \quad (2.55)$$

が観測されることが分かる。

周波数領域での検討 ここで振幅揺らぎ $\Delta s_{1\text{out}}$ の周波数成分を考える。 \tilde{s}_{out} の定義より、

$$\Delta \tilde{s}_{1\text{out}} = \frac{\Delta \tilde{s}_{\text{out}} e^{i\omega_c t} + \Delta \tilde{s}_{\text{out}}^\dagger e^{-i\omega_c t}}{2}, \quad (2.56)$$

である。ただし、 $\Delta \tilde{s}_{\text{out}}$, $\Delta \tilde{s}_{\text{out}}^\dagger$ はそれぞれ \tilde{s}_{out} , $\tilde{s}_{\text{out}}^\dagger$ の揺らぎ成分である。式 (2.56) をフーリエ変換する。大文字の変数を、対応する小文字の変数のフーリエ変換とおく、即ち、

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} x(t), \quad (2.57)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{S}_{1\text{out}}(\delta\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\Delta \tilde{s}_{\text{out}} e^{i(\omega+\delta\omega)t} + \Delta \tilde{s}_{\text{out}}^\dagger e^{-i(\omega-\delta\omega)t}}{2} \\ &= \frac{\Delta \tilde{S}_{\text{out}}(\omega_c + \delta\omega) + \Delta \tilde{S}_{\text{out}}^\dagger(\omega_c - \delta\omega)}{2}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

が得られる。直交位相成分の揺らぎ $\Delta \tilde{s}_{2\text{out}}$ についても同様の計算が成り立ち、

$$\Delta \tilde{S}_{2\text{out}}(\delta\omega) = \frac{\Delta \tilde{S}_{\text{out}}(\omega_c + \delta\omega) - \Delta \tilde{S}_{\text{out}}^\dagger(\omega_c - \delta\omega)}{2i}, \quad (2.59)$$

が得られる。

この計算から分かる通り、出力光電流の雑音スペクトルは、信号光周波数 ω_c に対して互いに映像の関係にある二つの成分、 $\omega_c + \delta\omega$ と $\omega_c - \delta\omega$ が支配している。従って、光電流の揺らぎを減少させるためには、これらの互いに映像の関係にある二つの場：何もしなければ互いに独立して雑音を発生しているこれらの成分に、何らかの相関を持たせる必要がある。すなわちスクイーミングは、光の場に量子相関を与えることによって実現されるものと言える。

2.4.3 共振器場-開放場の結合によるスクイーミングの原理

第 2.4.1 節における議論で解るように、共振器場からの出力は、入射する開放場と共振器場との重ね合わせで書ける。ところが、共振器場自体も入射場の影響を受けている。従って、出射場の統計を論じる際には、入射場が共振器場にどのように混入するかが関心事となる。

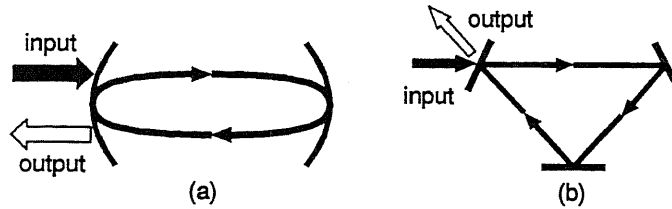


図 2.7: 一開口共振器、(a) Fabry-Perot 型、(b) リング型

本節ではまず、共振器場と結合する開放場がどのように変化するかを、入出力理論を用いて論じる。次に、出射場のスクイズ特性が、共振器場とどのように関係しているかについて述べる。

一開口共振器の入出力特性

まず、図 2.7 のような、一開口共振器の入出力特性を調べる。簡単のため、入射場はコヒーレント光であるとする。このとき、入射場をそのまま熱浴と看做すことはできないが、入射場を古典的な電場と熱浴との重ね合わせとして扱うことができる。即ち、ある定数 E を定常的な電場の強さとして、

$$\tilde{s}_{\text{in}} = E + \Delta\tilde{s}_{\text{in}}, \quad (2.60)$$

としてよい。ここで、 $\Delta\tilde{s}_{\text{in}}$ は、真空と同様の性質を示すものとする。

式 (2.43) にこれを代入すると、

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = -\sqrt{\gamma}E - \frac{\gamma}{2}\tilde{a} - \sqrt{\gamma}\Delta\tilde{r}_{\text{in}}, \quad (2.61)$$

共振器場の定常状態からの変化を $\Delta\tilde{a}$ で表せば、 $\Delta\tilde{a}$ のフーリエスペクトルは、

$$\Delta\tilde{A} = \frac{-\sqrt{\gamma}}{-i\omega + \gamma/2}\Delta\tilde{A} + \sqrt{\gamma}\Delta\tilde{S}_{\text{in}}, \quad (2.62)$$

と書けることが容易に分かる。但し、大文字の変数は、対応する小文字の変数のフーリエ変換である。式 (2.44) を用いて出射場揺らぎのスペクトルを求めると、

$$\Delta\tilde{R}_{\text{out}} = \frac{-i\omega - \gamma/2}{-i\omega + \gamma/2}\Delta\tilde{R}_{\text{in}}, \quad (2.63)$$

となる。即ち一開口共振器は、入射場の揺らぎの大きさは変えず、その位相を共振周波数において π だけ変化させる働きを持つ。

この仕組みをもう少し詳しく調べることにする。

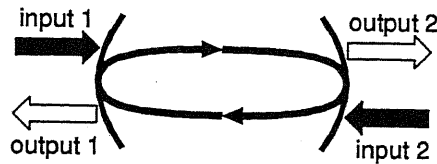


図 2.8: 二開口共振器 (Fabry-Perot 型)

入射した光のうち、その大半は高反射率のミラーによって反射され、共振器内に導入されるのは極僅かである。反対に、共振器場から出射される割合も僅かであるが、閉じ込めの効果によって内部の電場強度は高められており、この結果、洩れ出る共振器場の大きさと、反射される入射場の大きさは拮抗する。しかも、入射し出射されるという、同じ結合の逆過程を通っているため、洩れ出る場は反射されたものとは逆相で付け加わる。開放場の立場からすれば、共振器場との相互作用によって、振幅にしてもとの2倍になったものが、逆相で付け加えられることになるのである。

光共振器を用いた縮退パラメトリック増幅による開放場のスクイーミング

上で見たように、開放場の共振器からの出力は、共振器場へと入射した分が逆相で加算されている。一開口空洞共振器の場合、加算される分がもとの2倍になっており、入出力で揺らぎの絶対値に変化はない。ところが、もしこれを減らすことができれば、出力の揺らぎを入力以下に抑えることができるだろう。ただし、この場合に他の揺らぎが共振器場に導入されてはいけない。

例えば、図 2.8 のような二開口空洞共振器では、系全体の減衰定数は大きくなる。二つの開口での反射率が等しければ、減衰定数は2倍になり、係数“1/2”と相殺して、出射場から入射場の揺らぎは完全に消去される。ところが、この場合には、他方の開口からの揺らぎが等量だけ出射されるために、スクイーミングは見られない。

ここでは、共振器内縮退パラメトリック増幅による真空のスクイーミングを考える。これは、光共振器の共振周波数をポンプ光周波数の丁度半分となるように調整して、その内部で無入力のパラメトリック増幅を生じさせるものである。

縮退パラメトリック過程の相互作用ハミルトニアンは、

$$V = i\hbar \frac{E}{2} (\bar{a}^2 - \bar{a}^{\dagger 2}), \quad (2.64)$$

と表すことができる。ここで E はポンプ光の電場強度に比例したパラメータであり、 \bar{a} の位相を、 E が正の実数になるように選んだ。またポンプ光からの揺らぎは無視できるもの

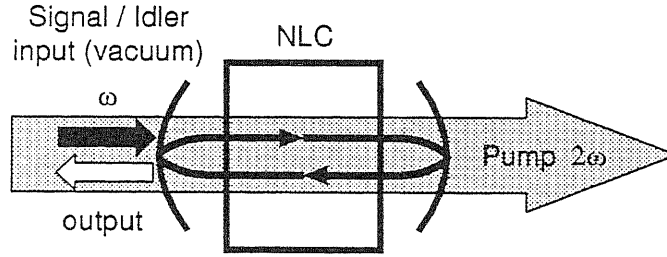


図 2.9: 共振器内パラメトリック増幅器

とした。モード振幅 a の運動方程式は、

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\tilde{a} - E\tilde{a}^\dagger - \sqrt{\gamma}\tilde{s}_{\text{in}}, \quad (2.65)$$

となる。ここで、

$$\tilde{a}_1 = \frac{\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger}{2}, \quad \tilde{a}_2 = \frac{\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger}{2i}, \quad (2.66)$$

$$\tilde{s}_{1\text{in}} = \frac{\tilde{s}_{\text{in}} + \tilde{s}_{\text{in}}^\dagger}{2}, \quad \tilde{s}_{2\text{in}} = \frac{\tilde{s}_{\text{in}} - \tilde{s}_{\text{in}}^\dagger}{2i}, \quad (2.67)$$

とおくと、これらに関する運動方程式は、

$$\frac{d\tilde{a}_1}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\tilde{a}_1 - E\tilde{a}_1 - \sqrt{\gamma}\tilde{s}_{1\text{in}}, \quad (2.68)$$

$$\frac{d\tilde{a}_2}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\tilde{a}_2 + E\tilde{a}_2 - \sqrt{\gamma}\tilde{s}_{2\text{in}}, \quad (2.69)$$

で表される。(2.68), (2.69) をフーリエ変換し、入出力の関係 (2.42) を用いると、出力光揺らぎのフーリエ変換が

$$\tilde{S}_{1\text{out}} = \left(\frac{-i\omega + E - \gamma/2}{-i\omega + \gamma/2 + E} \right) \tilde{S}_{1\text{in}}, \quad (2.70)$$

$$\tilde{S}_{2\text{out}} = \left(\frac{-i\omega - E - \gamma/2}{-i\omega + \gamma/2 - E} \right) \tilde{S}_{2\text{in}}, \quad (2.71)$$

と求められる。

共振器内に入射された雑音のうち、 S_1 で表される成分は減衰し、これに直交する位相の成分は増幅される。しかもその増幅率と減衰率は等しい大きさを持っている。線型減衰率とパラメトリック増幅・減衰率が相等したとき、直交位相成分の総減衰定数は、線型減衰率の2倍になって、出射場の完全スクイーミングが実現される。一方、これに直交する位相の成分は不安定となり、不確定性関係は保存されることになる。

このように、共振器場によるスクイーミングには、進行波の場合とは異なり、開放場と閉じ込められた場との間の相互作用というもう一つの作用があり、出力光のスクイーミングに重要な役割を果たしている。

2.5 まとめ

本章では、二次の非線型光学作用の概要を著し、第二高調波発生システムの分類を行った後、光の量子状態: コヒーレント状態とスクイズド状態、第二高調波発生によるスクイーミングの原理を簡単に述べた。また、共振器を用いたシステムでは、進行波の場合とは異なるスクイーミングの機構が存在することを明確にした。即ち、共振器と多自由度系との相互作用が、一方では共振器に損失を与え、他方では多自由度系に「出力」を放出する。この作用の結果、共振器内部の場と出力場のそれぞれの統計が異なることになるのである。

第 3 章

二光子損失モデルによる基本波閉じ込め型システムの 解析

基本波のみを共振器に閉じ込める基本波閉じ込め型システムでは、非線型光学結晶が共振器場に与える影響は、二光子吸収体のそれと全く同等である。即ち、共振器場の光子を 2 個消滅させるという働きを持つ。そこで、第二高調波発生を二光子吸収と同様に摂動を用いて扱い、第二高調波出力を入出力理論の非線型結合への拡張によって表そうとするのが、二光子損失モデルである。

本章では、まず、二光子損失モデルが考案された背景とその物理的描像を明らかにし、その詳細を記述する。次にこれを用いて基本波閉じ込め・外部共振器型システムの雑音、および側波モードのパラメトリック発振について考察する。最後に、基本波閉じ込め・レーザ内部型システムの雑音特性を解析し、二光子損失モデルによる結論を導いておく。

以上の議論を詳細に行うことにより、本手法の問題点を明確にする。

3.1 二光子損失モデルの物理的背景

一般に電磁場の量子化は、モード振幅の量子化によって行われるため、システムの構成に沿った適当な境界条件を設定し、これを満足するモードを規定することが不可欠である。二重閉じ込め型第二高調波発生システムでは、基本波・第二高調波の両者が共振器モードを持ち、これらのモード間の非線型結合として、第二高調波変換作用を記述することができる。出力される電磁場の量子力学的状態は、共振器モードと外場との線型相互作用 (2.44) によって記述される。

一方、基本波閉じ込め型では第二高調波用の共振器が存在しないので、二重共振型と同様の手段を使うことができない。本方式を、二重共振型の特殊な例として扱い、高調波用の

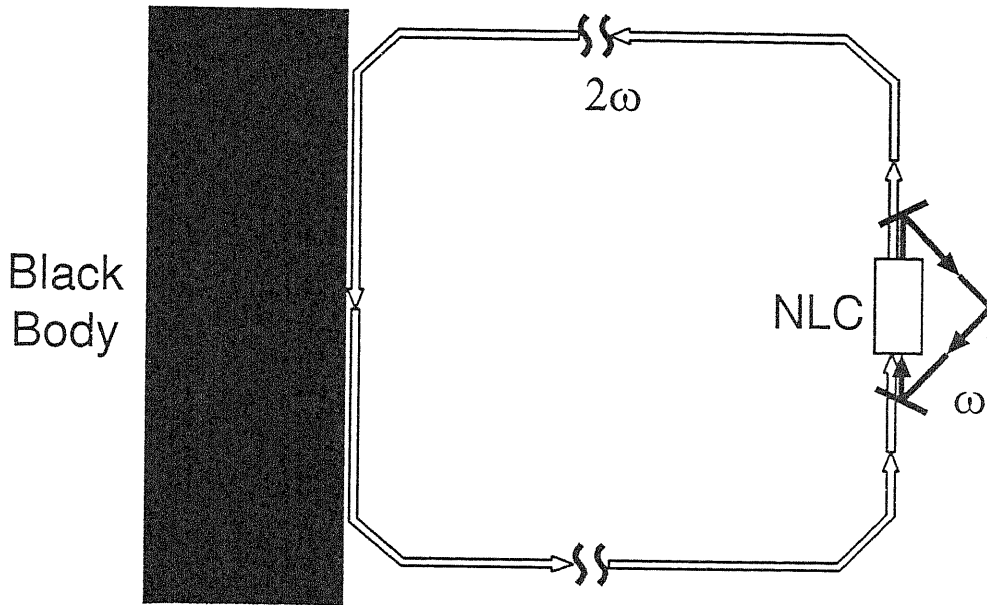


図 3.1: 二光子損失モデルの概念図

共振器が極めて大きい損失を有する場合の極限と考える方法もあるが、このモデルでは、高調波用の共振器の出力鏡における損失を無限大としなければならない。共振器損失は、共振器場と開放場とが弱い結合をするという仮定の下で、摂動論によって導入されているから、この取扱は論理的に矛盾している。更に、得られる結果を定量的に評価する場合には、高調波用の共振器の減衰特性が必要となるが、存在しない共振器の特性は与えることができないので、定量的な評価は事実上不可能である。

近年、開放場である第二高調波を、開放場としてそのまま扱い、共振器場との弱いマルコフ的相互作用を仮定する近似法が提案された。[33] これによって、共振器場には損失および雑音が導入され、一方、出力される第二高調波は、相互作用地点での非線型分極によって励振され自由発展するものとして扱うことができる。

図 3.1 は、本解析法の概念を図式化したものである。開放場は第二高調波発生システムを通過することにより、共振器内部の基本波と非線型相互作用して、光量子を得る。進行する開放場の初期状態は、遥か遠方に位置する物体との相互作用によって決定されているはずである。初期状態を与えるべき物体は、光を発したり反射したりしないのであれば、黒体とみなしてもよい。このため、進行する開放場の初期状態は熱平衡状態であると考えられる。

通過した開放場は、相互作用後には、システムに対して影響を及ぼさないので、システムはこの損失に関する過去の記憶を持たない。第 2 章で述べた通り、熱平衡にある多自由

度系 (この場合は開放場) との間で、このように単純マルコフ的に相互作用する系 (この場合第二高調波発生システム) の解析では、多自由度系が相互作用の直後に熱平衡状態に戻るという熱浴近似が用いられる。本章ではこの熱浴近似を用いて共振器場の計算を行う。

結晶が一定の長さを持ち、相互作用が近接的に生じることを考えれば、結晶中での光の相互作用は、本来ならば分布定数的な扱いを受けなければならない。ところが、本解析法では、光の場を結晶内で一様と近似している。実は、本解析法の適用範囲は、一回通過による変換効率、即ち、共振器内を周回している基本波から、第二高調波出力への変換効率が極めて小さい場合に限られることがわかる。この不具合を解決するためには第4章の分布定数的理論を待たなければならない。

3.2 二光子損失モデルによる定式化

動作モードとして連続波 (CW) 動作を考えると、出力波の統計として問題にすべき時間域は、共振器場の光子寿命によって決る。損失が大きくない共振器では、光子寿命は一回通過の所要時間に比べ充分長い。従って、この時間のスケールでは、一回通過の時間や結晶内での相互作用時間は、ほとんど0とみなせる。光の場を位相回転部分と包絡線部分に分けて考えると、包絡線に関しては、結晶内での相互作用時間は無視できるほど短いということである。

従って、連続波の統計を問題とする限り、考慮すべき点として残されるのは結晶内での電磁場の位相関係、即ち位相整合条件である。しかし、この条件は結晶の方位、温度特性などを制御することで満たされる、純粋に技術的な問題であり、すでに多くのシステムで実現されている。そこで本論文では、位相整合条件は満たされているものと仮定する。

これらの仮定は、結晶内での相互作用エネルギー密度の空間的变化を無視し、同等のエネルギーが一点に集中していると考えることを意味する。そこで、結晶内での相互作用エネルギー

$$\mathcal{E} = \iiint_V dv \, 2d_{\text{eff}} E_1^2 E_2, \quad (3.1)$$

(d_{eff} は実効的な非線型感受率) E_1 および E_2 の平面波展開による量子論的表現:

$$E_1 = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 n_f V}} (\hat{a}(t) - \hat{a}^\dagger(t)), \quad (3.2)$$

$$E_2 = \sum_j i\sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{2\varepsilon_0 n_s V_s}} (\hat{b}_j(t) - \hat{b}_j^\dagger(t)), \quad (3.3)$$

を代入し、これを相互作用ハミルトニアンとして採用する。ここで、 \hat{a} は共振器中の基本波モードの場の演算子であり、また \hat{b}_k は自由空間モードの場の演算子のうち、 k 番目のもの

を表す。本論文では、自由空間モードは無限に長いリング型共振器によって定義し、無限遠方の熱浴と熱平衡状態にあるものとする。場の演算子 \hat{a} , \hat{b}_k およびそれらの共軛 \hat{a}^\dagger , \hat{b}_k^\dagger の間には、通常の交換関係が成り立つものとする。即ち、クロネッカーのデルタ

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 0 & (j \neq k), \\ 1 & (j = k), \end{cases} \quad (3.4)$$

を用いると

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (3.5)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0, \quad (3.6)$$

$$[\hat{b}_j, \hat{b}_k^\dagger] = \delta_{j,k}, \quad (3.7)$$

$$[\hat{b}_j, \hat{b}_k] = [\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_k^\dagger] = 0, \quad (3.8)$$

$$[\hat{a}, \hat{b}_j] = [\hat{a}^\dagger, \hat{b}_j] = [\hat{a}, \hat{b}_j^\dagger] = [\hat{a}^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = 0, \quad (3.9)$$

と表されるものとする。また、 ϵ_0 は真空の誘電率、 n_f および n_s は非線型結晶中の基本波及び第二高調波の屈折率である。相互作用中の両電磁場は同一の円柱型のビーム断面 (断面積 S) を持つと仮定した。基本波の共振器長は L_c であるから、基本波の量子化体積は $V = SL_c$ である。一方、自由空間中の第二高調波を記述するための架空の共振器 (量子化のために導入するもの) は、長さ L_s とし、その量子化体積は $V_s = SL_s$ と置いた。最終的には $L_s \rightarrow \infty$ とする。このとき、非線型結晶の長さを l として、定数 κ を

$$\kappa = \frac{d_{\text{eff}} l \omega_0}{\epsilon_0 L_c n_f} \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{\epsilon_0 S L_s n_s}}, \quad (3.10)$$

とおけば、相互作用ハミルトニアンとして

$$V = i\hbar \sum_j \kappa_j (\hat{b}_j \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{b}_j^\dagger \hat{a}^2) = i\hbar (\hat{F} \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{F}^\dagger \hat{a}^2), \quad (3.11)$$

が得られる。ただし、

$$\hat{F} = \hbar \sum_j \hat{b}_j, \quad (3.12)$$

とした。なお、自由運動ハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H_0 &= H + R \\ &= \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_j \hbar \omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \end{aligned} \quad (3.13)$$

である。ここで場の演算子を回転波近似して、包絡線と位相回転の項に分割する。即ち、

$$\hat{a}(t) = \tilde{a}(t)e^{-i\omega_0(t-t_0)}, \quad (3.14)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \tilde{a}^\dagger(t)e^{i\omega_0(t-t_0)}, \quad (3.15)$$

$$\hat{b}_j(t) = \tilde{b}_j(t)e^{-i\omega_j(t-t_0)}, \quad (3.16)$$

$$\hat{b}_j^\dagger(t) = \tilde{b}_j^\dagger(t)e^{i\omega_j(t-t_0)}, \quad (3.17)$$

とする。ただし、 t_0 は共振器場と開放場との相互作用が開始した時刻である。

場の演算子 \tilde{a} の Heisenberg 運動方程式は

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = -2 \sum_j \kappa_j \tilde{a}^\dagger(t) \tilde{b}_j(t) e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)}, \quad (3.18)$$

で表される。この式の摂動近似のため、 \tilde{a}^\dagger および \tilde{b}_j の形式解を

$$\begin{aligned} \tilde{a}^\dagger(t) &= \tilde{a}^\dagger(t_0) - 2 \int_{t_0}^t dt' \sum_k \kappa_k \tilde{b}_k^\dagger(t') \tilde{a}(t') e^{-i(2\omega_0 - \omega_k)(t'-t_0)}, \\ \tilde{b}_j(t) &= \tilde{b}_j(t_0) + \kappa_j \int_{t_0}^t dt'' \tilde{a}^2(t'') e^{i(\omega_j - 2\omega_0)(t''-t_0)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

として、(3.18) に用いる。すると、 \tilde{a} に対する微積分方程式として、

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{a}}{dt} &= -2 \sum_j \kappa_j \tilde{a}^\dagger(t_0) \tilde{b}_j(t_0) e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)} \\ &\quad - 2 \sum_j \kappa_j^2 \tilde{a}^\dagger(t_0) \int_{t_0}^t dt'' \tilde{a}^2(t'') e^{-i(2\omega_0 - \omega_j)(t''-t)} \\ &\quad + \sum_{j,k} 4\kappa_j \kappa_k \int_{t_0}^t dt' \tilde{b}_k^\dagger(t') \tilde{a}(t') e^{-i(2\omega_0 - \omega_j)(t'-t_0)} \tilde{b}_j(t_0) \\ &\quad + o(\kappa^3), \end{aligned} \quad (3.20)$$

が得られる。ここで $o(\kappa^3)$ は κ に関して3次以上の項を表す。

いま、結合定数 κ_j が該当する周波数範囲では同一と考える。これは非線型光学定数の分散性を無視した近似である。通常、考慮すべき周波数範囲は共振器帯域前後と極めて狭く、その範囲での分散性の影響はほとんど無視できる。そこで定数 $\kappa_j = \kappa$ とおくと、(3.20) の第二項は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &\equiv -2\kappa^2 \tilde{a}^\dagger(t) \int_{t_0}^t dt'' \tilde{a}^2(t'') \sum_j e^{-i(2\omega_0 - \omega_j)(t''-t)} \\ &\simeq -2\kappa^2 \tilde{a}^\dagger(t) \int_{t_0}^t dt'' \tilde{a}^2(t'') \int_0^\infty d\omega_j g(\omega_j) e^{-i(2\omega_0 - \omega_j)(t''-t)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで、開放場モードに渡る和を、周波数に渡る積分で置き換えた。即ち、 $g(\omega_j)$ を周波数 ω_j におけるモード密度として、

$$\sum_j \{ \} \rightarrow \int d\omega_j g(\omega_j) \{ \}, \quad (3.22)$$

で置換した。単色平面波では、 $g(\omega_j) = L_s/2\pi c_0 \equiv g$ であり、定数である。ただし、真空中の光速を c_0 、開放場の仮想共振器の長さを L_s とした。積分変数を $\omega_j - \omega_0$ に変更すると、共振周波数 $\omega_0 \gg 0$ であるから、(3.21) での積分の下限は $-\infty$ で置き換えてもよい。この結果、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &\simeq -2\kappa^2 \bar{a}^\dagger(t) \int_{t_0}^t dt'' \bar{a}^2(t'') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_j g(\omega_j) e^{-i(2\omega_0 - \omega_j)(t'' - t)} \\ &\simeq -4\pi g \kappa^2 \bar{a}^\dagger(t) \int_{t_0}^t dt'' \bar{a}^2(t'') \delta(t'' - t) \\ &\simeq -2\pi g \kappa^2 \bar{a}^\dagger(t) \bar{a}^2(t) \\ &\equiv -\zeta \bar{a}^\dagger(t) \bar{a}^2(t), \end{aligned} \quad (3.23)$$

を得る。ただし、

$$\zeta \equiv 2\pi g \kappa^2 = \frac{\hbar \omega_1^3 d^2 l^2}{\epsilon_0^3 n^3 L_c^2 c_0}, \quad (3.24)$$

および、関係 (2.34), (2.35) を用いた。

式 (3.20) の第 3 項を計算するにあたり、 \bar{a} と \bar{b}_k の時間発展は無視する。これは κ に関して 2 次の項までを採用する近似を行っているためである。また、この項については「熱浴近似」を採用する。すると、先の \mathcal{L}_2 の計算と同様の方法によって、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &\equiv \sum_{j,k} 4\kappa^2 \bar{a}(t_0) \langle \bar{b}_k(t_0) \bar{b}_j^\dagger \rangle \int_{t_0}^t dt' e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t' - t_0)} \\ &= \sum_{j,k} 4\kappa^2 \bar{\eta}(\omega_j) \delta_{j,k} \int_{t_0}^t dt' e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t' - t_0)} \\ &\simeq 2\zeta \bar{\eta}(2\omega_0) \bar{a}(t_0), \end{aligned} \quad (3.25)$$

が得られる。ただし、 $\langle \rangle$ で囲んだ項は熱浴平均されることを意味する。また、 $[\bar{a}(t_0), \bar{b}_j(t_0)] = 0$ の関係を用いた。なお、周波数 ω での熱光子数は、 k をボルツマン定数、 T を熱浴の温度として

$$\bar{\eta}(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (3.26)$$

で与えられる。

式 (3.23) および (3.25) を (3.20) に代入すると、共振器場の演算子 \bar{a} に対する Langevin 方程式が、

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = -\zeta \bar{a}^\dagger(t) \bar{a}(t)^2 + 2\zeta \bar{\eta} \bar{a}(t) + \bar{g}_a(t), \quad (3.27)$$

によって得られる。ここで、Langevin 力 \tilde{g}_a は

$$\tilde{g}_a(t) \equiv -2\tilde{a}^\dagger(t_0) \sum_j \kappa \tilde{b}_j(t_0) e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)}, \quad (3.28)$$

によって定義される。この Langevin 力は、相互作用開始時刻の開放場、云わば「入力場」の性質によって定まるものである。そこで、

$$\tilde{r}_{\text{in}} \equiv \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \tilde{b}_j(t_0), \quad (3.29)$$

を、共振器場に対する「入力場」として考えよう。すると、Langevin 力 (3.28) は

$$\tilde{g}_a = -2\sqrt{\zeta} \tilde{a}^\dagger(t) \tilde{r}_{\text{in}}, \quad (3.30)$$

と書くことができる。

次に、第二高調波出力を計算する。いま、定義した第二高調波の進行波モードが $+z$ 方向に進行するものとし、また共振器場とは $z=0$ で相互作用するものとする。すると出力場 $\hat{r}_{\text{out}}(z, t)$ (光周波数で振動する項を含んだ表示) は、 $z > 0$ における全第二高調波モードの和で表される、即ち、

$$\begin{aligned} \hat{r}_{\text{out}}(z, t) &= \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \hat{b}_j(z, t) \\ &= \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} e^{i\omega_j z/c} \hat{b}_j(t_0) + \kappa \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \int_{t_0}^t dt' \tilde{a}^2(t') e^{i(\omega_j - 2\omega_0)(t'+z/c-t) + i2\omega_0(z/c)}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

である。ここで (3.19) を用い、また、空間内の自由発展を考慮した。関係 (3.22) を (3.31) に用いると、

$$\hat{r}_{\text{out}}(z, t) \simeq \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} e^{i\omega_j z/c} \hat{b}_j(t_0) + \kappa g \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \int_{t_0}^t dt' \tilde{a}^2(t') \int_0^\infty d\omega_j e^{i(\omega_j - 2\omega_0)(t'+z/c-t) + i2\omega_0 z/c}, \quad (3.32)$$

を得る。光領域では $\omega_0 \gg 0$ であるから、 $\omega_j - 2\omega_0$ に関する積分の下限は $-\infty$ で置き換えてよい。すると、(2.34) が (3.32) に適用でき、

$$\begin{aligned} \hat{r}_{\text{out}}(z, t) &\simeq \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} e^{i\omega_j z/c} \hat{b}_j(t_0) \\ &\quad + \sqrt{2\pi g} \kappa \int_{t_0}^t dt' \tilde{a}^2(t') e^{i2\omega_0 z/c} \delta(t' + z/c - t), \end{aligned} \quad (3.33)$$

が得られる。ここで $t - z/c > 0$ とすれば、

$$\begin{aligned} \hat{r}_{\text{out}}(z, t) &\simeq \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} e^{i\omega_j z/c} \hat{b}_j(t_0) \\ &\quad + \sqrt{\zeta} \tilde{a}^2(t - z/c) e^{i2\omega_0 z/c}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

となる。ここで (3.24) を用いた。式 (3.34) の右辺では、入射場 (第一項) と、非線型結合によって放射された共振器場 (第二項) の各々が、伝播によって生じた z/c だけの遅れ時間を含んでいる。

再び回転波表示に戻し、検出場所を出射端近傍にする、即ち $z \rightarrow +0$ とすると、第二高調波の出力特性が以下のように得られる:

$$\tilde{r}_{\text{out}}(+0, t) = \tilde{r}_{\text{in}} + \sqrt{\zeta} a^2(t-0), \quad (3.35)$$

これは Gardiner と Collett [29] によって定式化された入出力理論に対応する。二次の非線型相互作用については Collett らによって初めて導かれた。[33]

最後に、入射場の相関関数を、Langevin 力 \tilde{g}_a および \tilde{g}_a^\dagger に基いて求める。例として、

$$\begin{aligned} \langle \tilde{g}_a(t) \tilde{g}_a^\dagger(t') \rangle &\simeq 4\tilde{a}^\dagger(t_0) \tilde{a}(t_0) \kappa^2 \sum_{j,k} \langle \tilde{b}_j(t_0) \tilde{b}_k^\dagger(t_0) \rangle e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t_0) - i(2\omega_0 - \omega_k)(t'-t_0)} \\ &\simeq 4\tilde{a}^\dagger(t_0) \tilde{a}(t_0) \kappa^2 \sum_j \bar{\eta}(\omega_j) e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t')} \\ &\simeq 4\tilde{a}^\dagger(t_0) \tilde{a}(t_0) \kappa^2 \int_0^\infty d\omega_j g \eta(\omega_j) e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t')}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

を計算する。ただし、(3.22) を用いた。

今考えている時間差 $t-t'$ は光の電場の振動周期に比べて極めて長いため、この積分を有効とする $\omega_j \simeq 2\omega_0$ の周波数範囲についてのみ考える。すると、熱光子数 $\bar{\eta}(\omega_j)$ は $\bar{\eta}(2\omega_0)$ で置き換えることができる。再び、周波数積分の下限を $-\infty$ に変更すると、(3.36) は

$$\begin{aligned} \langle \tilde{g}_a(t) \tilde{g}_a^\dagger(t') \rangle &\simeq 4\tilde{a}^\dagger(t_0) \tilde{a}(t_0) 2\pi\kappa^2 g \bar{\eta}(2\omega_0) \delta(t-t') \\ &= 4\zeta \bar{\eta}(2\omega_0) \tilde{a}^\dagger(t_0) \tilde{a}(t_0) \delta(t-t'), \end{aligned} \quad (3.37)$$

と計算される。ただし、(2.34) を用いた。この相関関数は、入射場が次の関係を満たさなければならないことを意味している:

$$\langle \tilde{r}_{\text{in}}^\dagger(t) \tilde{r}_{\text{in}}(t') \rangle = \bar{\eta}(2\omega_0) \delta(t-t'), \quad (3.38)$$

この他の相関関数も同様に求められる。まとめると、以下ようになる:

$$\langle \tilde{r}_{\text{in}}^\dagger(t) \tilde{r}_{\text{in}}(t') \rangle = \bar{\eta}(2\omega_0) \delta(t-t'), \quad (3.39)$$

$$\langle \tilde{r}_{\text{in}}(t) \tilde{r}_{\text{in}}(t') \rangle = \langle \tilde{r}_{\text{in}}^\dagger(t) \tilde{r}_{\text{in}}^\dagger(t') \rangle = 0, \quad (3.40)$$

$$\langle \tilde{r}_{\text{in}}(t) \tilde{r}_{\text{in}}^\dagger(t') \rangle = (\bar{\eta}(2\omega_0) + 1) \delta(t-t'), \quad (3.41)$$

この関係は、光子減衰率 γ の線型損失による Langevin 力を

$$\tilde{g}_a(t) = \sqrt{\gamma} \tilde{s}(t), \quad (3.42)$$

と書いた時に $\bar{s}(t)$ が満たすべき相関関数と、周波数を除いて全く同一である。

以後簡単のため、熱光子数を 0 とおく。

3.3 基本波閉じ込め・外部共振器型システムの出力雑音特性

二光子吸収モデルによると、第二高調波発生による共振器場の減衰は、共振器内の光子数 $|\alpha|^2 = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ に比例したレートで生じることになる。即ち、強度が大きい程、減衰量が多くなり、逆に強度が小さい程、減衰量が小さくなる。これは光子数分布を狭めることになり、結果としてスクイーミングを生じる。

本節では、前節での議論を用いて、基本波閉じ込め・外部共振器型システムを解析する。

3.3.1 雑音特性の導出

共振器場の運動方程式は、

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\bar{a} - \frac{\gamma_l}{2}\bar{a} - \zeta(\bar{a}^\dagger\bar{a})\bar{a} + \bar{f}_a + \bar{g}_a + \bar{h}_a, \quad (3.43)$$

で表される。ここで、

$$\bar{f}_a = -\sqrt{\gamma} \bar{s}_{in}, \quad (3.44)$$

は、共振器外部の解放場（レーザからの入力） \bar{s}_{in} に、電場に対するミラー透過率を乗じたものに対応する。また、

$$\bar{h}_a = -\sqrt{\gamma_l} \bar{t}_{in}, \quad (3.45)$$

は、入力ミラー以外における全損失 $-\gamma_l/2 \bar{a}$ に対応する Langevin 力である。更に、

$$\bar{g}_a = -2\sqrt{\zeta} \bar{a}^\dagger \bar{r}_{in}, \quad (3.46)$$

は、(3.30) によって与えられる、第二高調波発生に伴う Langevin 力である。

まず、モード演算子 a をその期待値をある c 数 α_0 と揺らぎ成分の和として表す。即ち、

$$\bar{a} = \bar{\alpha}_0 + \Delta\bar{a}, \quad (3.47)$$

$$\bar{a}^\dagger = \bar{\alpha}_0^* + \Delta\bar{a}^\dagger, \quad (3.48)$$

とおく。演算子 $\Delta\bar{a}$, $\Delta\bar{a}^\dagger$ は次の交換関係を満たす。

$$[\Delta\bar{a}, \Delta\bar{a}^\dagger] = 1, \quad (3.49)$$

$$[\Delta\bar{a}, \Delta\bar{a}] = [\Delta\bar{a}^\dagger, \Delta\bar{a}^\dagger] = 0. \quad (3.50)$$

これらを用いて式 (3.43) の第二高調波発生項を計算すると、

$$\begin{aligned}\zeta(\bar{a}^\dagger \bar{a})\bar{a} &= \zeta(\bar{a}_0^* + \Delta\bar{a}^\dagger)(\bar{a}_0 + \Delta\bar{a})(\bar{a}_0 + \Delta\bar{a}) \\ &= \zeta\bar{a}_0^*\bar{a}_0^2 + \zeta 2\bar{a}_0^*\bar{a}_0\Delta\bar{a} + \zeta\bar{a}_0^2\Delta\bar{a}^\dagger + o(\Delta^2),\end{aligned}\quad (3.51)$$

を得る。

いま、入力の基本波が単色コヒーレント光であるとする、入力場 \bar{s}_{in} は古典的な励振力と、真空と同様の性質を持つ揺らぎ成分とに分離できる。即ち、

$$\bar{s}_{\text{in}} = -E + \Delta\bar{s}_{\text{in}}, \quad (3.52)$$

と書ける。ここで $\Delta\bar{s}_{\text{in}}$ が揺らぎ成分であり、真空と同様の性質を持つ。入射基本波の光子束密度を表す励振力 E は、入射パワー P_{in} と

$$E^2 = \frac{P_{\text{in}}}{\hbar\omega_0}, \quad (3.53)$$

によって結びつけられる。簡単のため、 E が正の実数になるように回転波の座標を取ることとする。なお、 \bar{r}_{in} と \bar{s}_{in} については平均値が 0 であるが、微小揺らぎであることを明示するため、

$$\Delta\bar{s}_{\text{in}} = \bar{s}_{\text{in}}, \quad (3.54)$$

$$\Delta\bar{r}_{\text{in}} = \bar{r}_{\text{in}}, \quad (3.55)$$

と書き換えておく。

解放場の揺らぎ成分 (あるいはその同等成分): $\Delta\bar{r}_{\text{in}}, \Delta\bar{r}_{\text{in}}^\dagger, \Delta\bar{s}_{\text{in}}, \Delta\bar{s}_{\text{in}}^\dagger, \Delta\bar{t}_{\text{in}}, \Delta\bar{t}_{\text{in}}^\dagger$ の相関関数は、(3.39), (3.40), (3.41) で熱光子数 \bar{n} を 0 に等しくおいたもので与えられる。即ち、

$$\langle x_{\text{in}}(t)x_{\text{in}}(t') \rangle = \langle x_{\text{in}}^\dagger(t)x_{\text{in}}^\dagger(t') \rangle = 0, \quad (3.56)$$

$$\langle x_{\text{in}}^\dagger(t)x_{\text{in}}(t') \rangle = 0, \quad (3.57)$$

$$\langle x_{\text{in}}(t)x_{\text{in}}^\dagger(t') \rangle = \delta(t-t'), \quad (3.58)$$

ただし $x = \Delta\bar{r}, \Delta\bar{s}$, または $\Delta\bar{t}$ である。

式 (3.46) 中で、 \bar{r}_{in} の平均値は 0 であることから、 \bar{g}_a は

$$\bar{g}_a = -2\sqrt{\zeta}\bar{a}_0^*\Delta\bar{r}_{\text{in}}, \quad (3.59)$$

と線型化される。これらによって、式 (3.43) は、

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\bar{a}}{dt} &= -\frac{\gamma}{2}\Delta\bar{a} - \frac{\gamma_l}{2}\Delta\bar{a} - 2\zeta\bar{a}_0^*\bar{a}_0\Delta\bar{a} - \zeta\bar{a}_0^2\Delta\bar{a}^\dagger \\ &\quad -\sqrt{\gamma}\Delta\bar{s}_{\text{in}} - 2\sqrt{\zeta}\bar{a}_0^*\Delta\bar{r}_{\text{in}} - \sqrt{\gamma_l}\Delta\bar{t}_{\text{in}},\end{aligned}\quad (3.60)$$

と線型化され、一方、定常状態の方程式として

$$0 = \sqrt{\gamma}E - \frac{\gamma}{2}\tilde{a}_0 - \frac{\gamma_l}{2}\tilde{a}_0 - \zeta\tilde{a}_0^*\tilde{a}_0^2, \quad (3.61)$$

が得られる。

式(3.43)のエルミート共軛も同様に

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\tilde{a}^\dagger}{dt} = & -\frac{\gamma}{2}\Delta\tilde{a}^\dagger - \frac{\gamma_l}{2}\Delta\tilde{a}^\dagger - 2\zeta\tilde{a}_0^*\tilde{a}_0\Delta\tilde{a}^\dagger - \zeta\tilde{a}_0^{*2}\Delta\tilde{a} \\ & -\sqrt{\gamma}\Delta\tilde{s}_{\text{in}}^\dagger - 2\sqrt{\zeta}\tilde{a}_0\Delta\tilde{r}_{\text{in}} - \sqrt{\gamma_l}\Delta\tilde{t}_{\text{in}}^\dagger \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$0 = \sqrt{\gamma}E - \frac{\gamma}{2}\tilde{a}_0^* - \frac{\gamma_l}{2}\tilde{a}_0^* - \zeta\tilde{a}_0^{*2}\tilde{a}_0, \quad (3.63)$$

によって表される。式(3.61),(3.63)より、

$$\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0^*, \quad (3.64)$$

であることがわかる。

次に揺らぎ成分を計算するにあたり、

$$\Delta\tilde{a} = \Delta\tilde{a}_1 + i\Delta\tilde{a}_2, \quad (3.65)$$

のように分解する。ここで $\Delta\tilde{a}_1$ は、共振器場振幅の揺らぎのうち、励振力 E_0 に同相の成分、 $\Delta\tilde{a}_2$ はこれに直交する成分である。すると $\Delta\tilde{a}_1$ および $\Delta\tilde{a}_2$ の運動は行列方程式で

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta\tilde{a}_1 \\ \Delta\tilde{a}_2 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} -\frac{\gamma+\gamma_l}{2} - 3\zeta I_0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma+\gamma_l}{2} - \zeta I_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tilde{a}_1 \\ \Delta\tilde{a}_2 \end{pmatrix} \\ & -\sqrt{\gamma} \begin{pmatrix} \Delta\tilde{s}_{1\text{in}} \\ \Delta\tilde{s}_{2\text{in}} \end{pmatrix} - 2\sqrt{\zeta}I_0 \begin{pmatrix} \Delta\tilde{r}_{1\text{in}} \\ \Delta\tilde{r}_{2\text{in}} \end{pmatrix} - \sqrt{\gamma_l} \begin{pmatrix} \Delta\tilde{t}_{1\text{in}} \\ \Delta\tilde{t}_{2\text{in}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

と書ける。ここで $\Delta\tilde{s}_{j\text{in}}$, $\Delta\tilde{r}_{j\text{in}}$, $\Delta\tilde{t}_{j\text{in}}$ ($j=1,2$) を

$$\Delta\tilde{s}_{\text{in}} = \Delta\tilde{s}_{1\text{in}} + i\Delta\tilde{s}_{2\text{in}}, \quad (3.67)$$

$$\Delta\tilde{r}_{\text{in}} = \Delta\tilde{r}_{1\text{in}} + i\Delta\tilde{r}_{2\text{in}}, \quad (3.68)$$

$$\Delta\tilde{t}_{\text{in}} = \Delta\tilde{t}_{1\text{in}} + i\Delta\tilde{t}_{2\text{in}}, \quad (3.69)$$

によって定義し、 $I_0 = \tilde{a}_0^2$ と置いた。

いま、各変数を大文字で記したものをそのフーリエ変換とすると、共振器場の励振力と同位相の成分が有する複素スペクトルが

$$\Delta\tilde{A}_1(\omega) = \frac{-\sqrt{\gamma}\Delta\tilde{S}_{1\text{in}} - 2\sqrt{\zeta}I_0\Delta\tilde{R}_{1\text{in}} - \sqrt{\gamma_l}\Delta\tilde{T}_{1\text{in}}}{-i\omega + \frac{\gamma+\gamma_l}{2} + 3\zeta I_0}, \quad (3.70)$$

と表される。

出力第二高調波は、(3.35):

$$\tilde{r}_{\text{out}} = \tilde{r}_{\text{in}} + \sqrt{\zeta} \tilde{a}^2, \quad (3.71)$$

で与えられるから、その平均値 $\sqrt{\zeta} \tilde{a}_0^2$ の周りの揺らぎは

$$\Delta \tilde{r}_{\text{out}} = \Delta \tilde{r}_{\text{in}} + 2\sqrt{\zeta} \tilde{a}_0 \Delta \tilde{a}, \quad (3.72)$$

によって、またその共軛は

$$\Delta \tilde{r}_{\text{out}}^\dagger = \Delta \tilde{r}_{\text{in}}^\dagger + 2\sqrt{\zeta} \tilde{a}_0^* \Delta \tilde{a}^\dagger, \quad (3.73)$$

によって表される。ここで $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0^* = \sqrt{I_0}$ を用いれば、出力第二高調波の同位相方向の揺らぎは

$$\Delta \tilde{r}_{1\text{out}} = \Delta \tilde{r}_{1\text{in}} + 2\sqrt{\zeta I_0} \Delta \tilde{a}_1, \quad (3.74)$$

で表される。式(3.70)を(3.74)のフーリエ変換に用いれば、出力第二高調波の同位相成分の複素スペクトルが

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{R}_{1\text{out}} = & -\frac{2\sqrt{\gamma\zeta I_0}}{-i\omega + \frac{\gamma + \gamma_l}{2} + 3\zeta I_0} \Delta \tilde{S}_{1\text{in}} \\ & + \frac{-i\omega + \frac{\gamma + \gamma_l}{2} - \zeta I_0}{-i\omega + \frac{\gamma + \gamma_l}{2} + 3\zeta I_0} \Delta \tilde{R}_{1\text{in}} \\ & - \frac{2\sqrt{\gamma_l \zeta I_0}}{-i\omega + \frac{\gamma + \gamma_l}{2} + 3\zeta I_0} \Delta \tilde{T}_{1\text{in}}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

と得られる。

いま $\Delta \tilde{s}_{\text{in}}$, $\Delta \tilde{r}_{\text{in}}$ and $\Delta \tilde{t}_{\text{in}}$ は全て独立であるから、上の同位相成分のパワースペクトル

$$\mathcal{R}_{1\text{out}} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle \Delta \tilde{R}_{1\text{out}} \Delta \tilde{R}_{1\text{out}}^\dagger \rangle_T}{T}, \quad (3.76)$$

(T はスペクトルの観測時間、 $\langle \rangle_T$ は観測時間 T にわたる信号のスペクトルであることを意味する) は

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1\text{out}} = & \frac{4\gamma\zeta I_0}{\omega^2 + \left(\frac{\gamma + \gamma_l}{2} + 3\zeta I_0\right)^2} \mathcal{S}_{1\text{in}} \\ & + \frac{\omega^2 + \left(\frac{\gamma + \gamma_l}{2} - \zeta I_0\right)^2}{\omega^2 + \left(\frac{\gamma + \gamma_l}{2} + 3\zeta I_0\right)^2} \mathcal{R}_{1\text{in}} \end{aligned}$$

$$+ \frac{4\gamma\zeta I_0}{\omega^2 + \left(\frac{\gamma + \gamma_l}{2} + 3\zeta I_0\right)^2} \mathcal{T}_{1in}, \quad (3.77)$$

と書ける。ここで \mathcal{S}_{1in} , \mathcal{R}_{1in} , \mathcal{T}_{1in} はそれぞれ、 $\Delta\tilde{s}_{in}$, $\Delta\tilde{r}_{in}$, $\Delta\tilde{t}_{in}$ の同位相方向成分のパワースペクトルであり、(3.56), (3.57), (3.58) からすべて $1/4$ であることが導かれる。結局、出力の同位相成分のパワースペクトル \mathcal{R}_{1out} は、

$$\mathcal{R}_{1out} = \frac{\omega^2 + \left(\frac{\gamma + \gamma_l}{2}\right)^2 + 3(\gamma + \gamma_l)\zeta I_0 + (\zeta I_0)^2}{\omega^2 + \left(\frac{\gamma + \gamma_l}{2} + 3\zeta I_0\right)^2} \times \frac{1}{4}, \quad (3.78)$$

と書けることが分かる。

次に、基本波出力、即ち、入出力ミラーの空いたポートから出射される光について考える。このとき、出力場 \tilde{s}_{out} を、 \tilde{s}_{in} と同様に定義すると、第 2 章で述べた入出力理論によって、

$$\tilde{s}_{out} = \tilde{s}_{in} + \sqrt{\gamma} a, \quad (3.79)$$

と書かれる。ここで、 \tilde{s}_{in} と同様に同位相成分/直交位相成分を定義し、それぞれをフーリエ変換して、(3.70) を代入すれば、

$$\Delta\tilde{\mathcal{S}}_{1out} = \frac{2\sqrt{\gamma\zeta I_0}\Delta\tilde{\mathcal{S}}_{1in} - \left(-i\omega + \frac{\gamma - \gamma_l}{2} - 3\zeta I_0\right)\Delta\tilde{\mathcal{R}}_{1in} - \sqrt{\gamma\gamma_l}\Delta\tilde{\mathcal{T}}_{1in}}{-i\omega + \frac{\gamma + \gamma_l}{2} + 3\zeta I_0}, \quad (3.80)$$

が得られる。即ち、そのパワースペクトル \mathcal{S}_{1out} は

$$\mathcal{S}_{1out}(\omega) = \frac{4\gamma\zeta I_0 + \omega^2 + \left(\frac{\gamma - \gamma_l}{2} - 3\zeta I_0\right)^2 + \gamma\gamma_l}{\omega^2 + \left(\frac{\gamma + \gamma_l}{2} + 3\zeta I_0\right)^2} \times \frac{1}{4}, \quad (3.81)$$

となる。いま $\omega = 0$, $\gamma_l = 0$ とおいて理想的なシステムを考えると、

$$\mathcal{S}_{1out}(0) = \frac{4\gamma\zeta I_0 + \left(\frac{\gamma}{2} - 3\zeta I_0\right)^2}{\left(\frac{\gamma}{2} + 3\zeta I_0\right)^2} \times \frac{1}{4}, \quad (3.82)$$

となり、 $\gamma/2 = 3\zeta I_0$ のときに最小値 $1/6$ (ショット雑音レベルの $2/3$) を与えることがわかる。しかし、この結果は入力ミラーの透過率が極めて小さいシステムに限って有効であることを強調しておく。閉じ込めが弱い場合には、ほとんど進行波型デバイスと同等であるはずであるが、その一方で、進行波型では 100% のスクイーミングが可能であることが知られている。即ち、最大スクイーミング量 33% は、共振器モードの損失が小さい場合にのみ成り立つ近似の結論である。この点については第 4 章で詳しく述べる。

3.3.2 高効率変換時のスクイーミング量

簡単のため、式 (3.78) で $\gamma_l = 0$ とし、入力ミラー以外での線型損失が無い場合について考えると、

$$\mathcal{R}_{1\text{out}} = \frac{4\gamma\zeta I_0 \mathcal{S}_{1\text{in}} + \left\{ \omega^2 + \left(\frac{\gamma}{2} - \zeta I_0 \right)^2 \right\} \mathcal{R}_{1\text{in}}}{\omega^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + 3\zeta I_0 \right)^2}, \quad (3.83)$$

となる。即ち、第二高調波出力の雑音パワースペクトルは

$$\mathcal{R}_{1\text{out}} = \frac{\omega^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 3\gamma\zeta I_0 + (\zeta I_0)^2}{\omega^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + 3\zeta I_0 \right)^2} \times \frac{1}{4}, \quad (3.84)$$

である。

この値は、共振器内光子数 I_0 を無限大とすることで、 $1/36$ (ショット雑音レベルの $1/9$) をとることが分かる。しかし、前述のように、この解析では結晶中での場の発展が考慮されておらず、この極限の領域で用いることはできない。従って、この極限值をもって本システムの最小スペクトル密度とすることはできない。

ここでは特に、線型損失と非線型損失が釣り合った状態で $\zeta I_0 = \gamma/2$ について考えることにする。このとき、レーザからの入力光子束は

$$\langle r_{\text{in}}^\dagger r_{\text{in}} \rangle = E_0^2 = \gamma I_0, \quad (3.85)$$

一方、第二高調波出力の光子束は

$$\langle r_{\text{out}}^\dagger r_{\text{out}} \rangle = \zeta I_0^2 = \gamma \frac{I_0}{2}, \quad (3.86)$$

となる。基本波光子二個で第二高調波光子一個が生成されることから、この場合は 100% 変換に相当する。換言すれば、システムに入射された基本波は、十分の時間の後には「全て」第二高調波に変換されているということである。

「全て」とは、揺らぎを含めて全て、ということである。これは、高調波真空の影響が混入しないということでもある。式 (3.83) の分子第二項に、このことが明確に現れている。いふならば、基本波入力開口と、第二高調波の出力開口とがインピーダンス整合をとり合い、互いに他方向へと電磁場を流しているのと同様である。

このような場合には、出力高調波揺らぎのパワースペクトルは、基本波入力のちょうど半分になることが知られている。[39] その原理については、次のように説明されている：揺らぎまで含めて完全に交換されているのだから、基本波の揺らぎはそのまま出力の揺らぎと

して観測されるはずである。ただし、光子数が $1/2$ になっているので、揺らぎの大きさも、平均化すれば $1/2$ になっているはずである。従って、揺らぎの2乗平均は元の $1/4$ であるが、光子数そのものが $1/2$ になっているので、その相対値は $(1/4)/(1/2) = 1/2$ である。

繰り返すが、本章の結果のほとんどは、共振器場から第二高調波への変換効率が極めて小さい場合のみに有効である。しかし、上述の第二高調波への100%変換に伴う揺らぎの50%抑圧効果は、結晶内での場の発展を考慮した場合でも成り立つことが示される。この件については第4章で詳述する。

3.4 パラメトリック同時発振によるスクイーミング特性の劣化

序論で述べた通り、第二高調波へ変換されたエネルギーは、基本波以外にも、その周辺の低周波モード（これを側波モードと呼ぶ）に対してパラメトリック利得を与えることになる。発振閾値付近におけるパラメトリック発振では、発振を誘起する不安定性により振幅方向の雑音が増大する。さらに、発振モード間の競合によっても不安定化する。

本節では、マルコフ近似を用いて非線型結合を記述し、基本波閉じ込め型第二高調波発生システムにおけるパラメトリック増幅現象を解析する。これに基づき、非発振時および発振時における出力第二高調波の雑音特性を算出して、スクイーミング特性への影響について論じる。

本節では、結晶の位相整合条件 (Type-I または Type-II) に応じて、二つの小節を設け、別々に議論する。その理由は以下の通りである。基本波の偏波方向が一つに限られる Type-I 位相整合では、同一の偏波状態で異なる周波数を持つ縦モードでのみ、非縮退パラメトリック増幅が生じる。ところが、互いに直交する二つの偏波を原理上使用しなければならない Type-II 位相整合の場合には、空いている別の偏波モードにもパラメトリック増幅が発生する。周波数非縮退と偏波非縮退では非線型結合にも差が生じ、増幅特性も異なる。これが議論を別にした理由である。

3.4.1 周波数非縮退パラメトリック発振の可能性

基本波モードを c 、基本波モードから $\Delta\omega$ だけ離れた共振周波数を持つ一対の側波モードを a, b 、第二高調波付近の開放場を r でそれぞれ表す。非線型結合としては、 c, r の間の第二高調波発生/縮退パラメトリック相互作用、 r, a, b の間の非縮退パラメトリック相互作用と、 a, c の和周波発生 (和周波付近の開放場を t とする) と、 b, c の和周波発生 (和周波付近の開放場を u とする) を考える。運動方程式の導出方法はほとんど第3.2節で述べた

方法と同様である。詳しくは付録 A に述べ、ここでは結果のみを記す。

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{a}}{dt} = & -\frac{\gamma}{2}\tilde{a} - 2\zeta(\tilde{b}^\dagger\tilde{b})\tilde{a} - \zeta\tilde{c}^2\tilde{b}^\dagger - 2\zeta(\tilde{c}^\dagger\tilde{c})\tilde{a} \\ & -\sqrt{\gamma}\tilde{s}_{\text{in}}^a - 2\sqrt{\zeta}\tilde{b}^\dagger\tilde{r}_{\text{in}} - 2\sqrt{\zeta}\tilde{c}^\dagger\tilde{t}_{\text{in}}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{b}}{dt} = & -\frac{\gamma}{2}\tilde{b} - 2\zeta(\tilde{a}^\dagger\tilde{a})\tilde{b} - \zeta\tilde{c}^2\tilde{a}^\dagger - 2\zeta(\tilde{c}^\dagger\tilde{c})\tilde{b} \\ & -\sqrt{\gamma}\tilde{s}_{\text{in}}^b - 2\sqrt{\zeta}\tilde{a}^\dagger\tilde{r}_{\text{in}}, -2\sqrt{\zeta}\tilde{c}^\dagger\tilde{r}_{\text{in}}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{c}}{dt} = & \sqrt{\gamma}E - \frac{\gamma}{2}\tilde{c} - \zeta(\tilde{c}^\dagger\tilde{c})\tilde{c} - \zeta\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}^\dagger - \zeta(\tilde{a}^\dagger\tilde{a})\tilde{c} - \zeta(\tilde{b}^\dagger\tilde{b})\tilde{c} \\ & -\sqrt{\gamma}\tilde{s}_{\text{in}}^c - 2\sqrt{\zeta}\tilde{c}^\dagger\tilde{r}_{\text{in}} - 2\sqrt{\zeta}\tilde{a}^\dagger\tilde{t}_{\text{in}} - 2\sqrt{\zeta}\tilde{b}^\dagger\tilde{u}_{\text{in}}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

ここで、 \tilde{x} はモード x の共振周波数で回転する座標上での変数である。また、 \tilde{a} と \tilde{c} および \tilde{b} と \tilde{c} の和周波付近の真空をそれぞれ、

$$\tilde{t}_{\text{in}} \equiv \sum_j \frac{\tilde{d}_j(t_0)}{\sqrt{2\pi g}} e^{i(2\omega_a - \Delta\omega - \omega_j)(t-t_0)}, \quad (3.90)$$

$$\tilde{u}_{\text{in}} \equiv \sum_j \frac{\tilde{d}_j(t_0)}{\sqrt{2\pi g}} e^{i(2\omega_a + \Delta\omega - \omega_j)(t-t_0)}, \quad (3.91)$$

とした。また、 \tilde{s}_{in}^a , \tilde{s}_{in}^b , \tilde{s}_{in}^c は、入力ミラーで共振器場 a , b , c が相互作用する、基本波付近の真空、またはこれと同様の揺らぎを表す (式 (3.52) 参照)。

いま、場の演算子 \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{c} を平均値 0 , 0 , c_0 と揺らぎ演算子 $\Delta\tilde{a}$, $\Delta\tilde{b}$, $\Delta\tilde{c}$ とによって

$$\tilde{a} = \Delta\tilde{a}, \quad (3.92)$$

$$\tilde{b} = \Delta\tilde{b}, \quad (3.93)$$

$$\tilde{c} = c_0 + \Delta\tilde{c}, \quad (3.94)$$

と表し、揺らぎ演算子のパラメトリック利得が全損失を上回るか否かを議論する。揺らぎ演算子の運動方程式は、

$$\frac{d\Delta\tilde{a}}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\Delta\tilde{a} - \zeta c_0^2 \Delta\tilde{b}^\dagger - 2\zeta c_0^2 \Delta\tilde{a} - 2\sqrt{\zeta} c_0 \Delta\tilde{t}_{\text{in}} - \sqrt{\gamma} \Delta\tilde{s}_{\text{in}}^a, \quad (3.95)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{a}^\dagger}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\Delta\tilde{a}^\dagger - \zeta c_0^2 \Delta\tilde{b} - 2\zeta c_0^2 \Delta\tilde{a}^\dagger - 2\sqrt{\zeta} c_0 \Delta\tilde{t}_{\text{in}}^\dagger - \sqrt{\gamma} \Delta\tilde{s}_{\text{in}}^{a\dagger}, \quad (3.96)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{b}}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\Delta\tilde{b} - \zeta c_0^2 \Delta\tilde{a}^\dagger - 2\zeta c_0^2 \Delta\tilde{b} - 2\sqrt{\zeta} c_0 \Delta\tilde{u}_{\text{in}} - \sqrt{\gamma} \Delta\tilde{s}_{\text{in}}^b, \quad (3.97)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{b}^\dagger}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\Delta\tilde{b}^\dagger - \zeta c_0^2 \Delta\tilde{a} - 2\zeta c_0^2 \Delta\tilde{b}^\dagger - 2\sqrt{\zeta} c_0 \Delta\tilde{u}_{\text{in}}^\dagger - \sqrt{\gamma} \Delta\tilde{s}_{\text{in}}^{b\dagger}, \quad (3.98)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{c}}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\Delta\tilde{c} - \zeta c_0^2 \Delta\tilde{c}^\dagger - 2\zeta c_0^2 \Delta\tilde{c} - 2\sqrt{\zeta} c_0 \Delta\tilde{r}_{\text{in}} - \sqrt{\gamma} \Delta\tilde{s}_{\text{in}}^c, \quad (3.99)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{c}^\dagger}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\Delta\tilde{c}^\dagger - \zeta c_0^2 \Delta\tilde{c} - 2\zeta c_0^2 \Delta\tilde{c}^\dagger - 2\sqrt{\zeta} c_0 \Delta\tilde{r}_{\text{in}}^\dagger - \sqrt{\gamma} \Delta\tilde{s}_{\text{in}}^{c\dagger}, \quad (3.100)$$

である。ここで、(3.64)を用いて $c_0 = c_0^*$ とした。この式から明らかなように、 $\Delta\tilde{c}$ の運動と、 $(\Delta\tilde{a}, \Delta\tilde{b}^\dagger)$ および $(\Delta\tilde{a}^\dagger, \Delta\tilde{b})$ の運動は、完全に独立している。このうち、 $\Delta\tilde{c}$ の運動は、第3.3節で議論した、基本波閉じ込め型システムの共振器場揺らぎの運動と全く同一である。そこで、本節ではその他の成分、即ち、

$$\mathbf{a} \equiv {}^\tau(\Delta\tilde{a}, \Delta\tilde{b}^\dagger), \quad (3.101)$$

の運動に注目する。

ベクトル \mathbf{a} の運動は、

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = A\mathbf{a} - 2\sqrt{\zeta} c_0 t - \sqrt{\gamma} \mathbf{s}, \quad (3.102)$$

によって表される。ただし、

$$A \equiv \begin{pmatrix} -\gamma/2 - 2\zeta c_0^2 & -\zeta c_0^2 \\ -\zeta c_0^2 & -\gamma/2 - 2\zeta c_0^2 \end{pmatrix}, \quad (3.103)$$

$$\mathbf{s} \equiv {}^\tau(\Delta\tilde{s}_{\text{in}}, \Delta\tilde{s}_{\text{in}}^\dagger), \quad (3.104)$$

$$\mathbf{t} \equiv {}^\tau(\Delta\tilde{t}_{\text{in}}, \Delta\tilde{t}_{\text{in}}^\dagger), \quad (3.105)$$

とした。行列 A は正則行列

$$P = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.106)$$

によって、

$$A = PBP^{-1}, \quad (3.107)$$

$$B = \begin{pmatrix} -\gamma/2 - 3\zeta c_0^2 & 0 \\ 0 & -\gamma/2 - \zeta c_0^2 \end{pmatrix}, \quad (3.108)$$

と対角化される。即ち、固有値は

$$-\frac{\gamma}{2} - 3\zeta c_0^2, \quad -\frac{\gamma}{2} - \zeta c_0^2, \quad (3.109)$$

であり、 c_0 の如何に関わらず負の実数となる。これは、両側波モードが発振し得ないことを意味する。

本結果は次のように解釈できる。式(3.102)の左側から P をかけると、

$$\frac{d}{dt} P^{-1}\mathbf{a} = AP^{-1}\mathbf{a} - 2\sqrt{\zeta} c_0 P^{-1}\mathbf{t} - \sqrt{\gamma} P^{-1}\mathbf{s}, \quad (3.110)$$

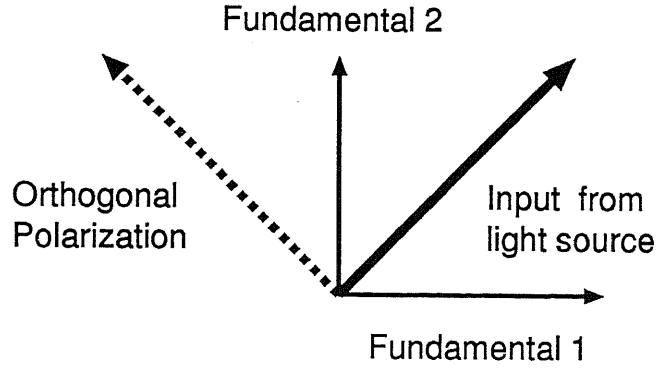


図 3.2: 入射基本波、直交偏波モードの偏波方向の関係

である。ここで、 $P^{-1}\mathbf{a}$, $P^{-1}\mathbf{t}$, $P^{-1}\mathbf{s}$ をそれぞれ $\tau(\Delta\tilde{a}_1, \Delta\tilde{a}_2)$, $\tau(\Delta\tilde{t}_{1in}, \Delta\tilde{t}_{2in})$, $\tau(\Delta\tilde{s}_{1in}, \Delta\tilde{s}_{2in})$ とおくと、

$$\Delta\tilde{a}_1 = \frac{\Delta\tilde{a} + \Delta\tilde{b}^\dagger}{2}, \quad \Delta\tilde{a}_2 = \frac{\Delta\tilde{a} - \Delta\tilde{b}^\dagger}{2}, \quad (3.111)$$

$$\Delta\tilde{t}_{1in} = \frac{\Delta\tilde{t}_{in} + \Delta\tilde{u}_{in}^\dagger}{2}, \quad \Delta\tilde{t}_{2in} = \frac{\Delta\tilde{t}_{in} - \Delta\tilde{u}_{in}^\dagger}{2}, \quad (3.112)$$

$$\Delta\tilde{s}_{1in} = \frac{\Delta\tilde{s}_{in}^a + \Delta\tilde{s}_{in}^{b\dagger}}{2}, \quad \Delta\tilde{s}_{2in} = \frac{\Delta\tilde{s}_{in}^a - \Delta\tilde{s}_{in}^{b\dagger}}{2}, \quad (3.113)$$

となる。パラメトリック増幅を受ける成分は $\Delta\tilde{a}_2$ であるが、その運動方程式は、

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_2}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\Delta\tilde{a}_2 + \zeta c_0^2 \Delta\tilde{a}_2 - 2\zeta c_0^2 \Delta\tilde{a}_2 - 2\sqrt{\zeta} c_0 \Delta\tilde{t}_{2in} - \sqrt{\gamma} \Delta\tilde{s}_{2in}, \quad (3.114)$$

である。式 (3.114) の右辺第 2 項がパラメトリック利得、第 3 項が和周波発生による損失を表しているが、常に後者が前者を上回っている。このため、側波モードが増幅されることはない。

即ち、Type-I 位相整合条件の下で結晶を用いているシステムでは、発生した第二高調波をポンプとするパラメトリック発振は発生しにくい。発振可能性の断定には、第 4 章で詳述する進行波解析を待たなければならないが、実は同様の結論を得ることができる。

3.4.2 直交偏波モードのパラメトリック発振

直交する直線偏波をもつ二つの共振器モードを考え、これらをモード振幅 \hat{a} , \hat{b} によって表す。図 3.2 に示すように、入射基本波はこれらの丁度中間、即ち、 \hat{a} または \hat{b} の偏波方向から 45° をなす方向に直線偏光しているものとする。

直交する偏波状態は異なった2つのモードを与えるから、 \hat{a} , \hat{b} の非線型相互作用は非縮退パラメトリック過程に相当する(付録 A.1)。このとき、 \hat{a} , \hat{b} の満たすべき方程式は、

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \sqrt{\gamma} \frac{E}{\sqrt{2}} - \frac{\gamma}{2} \bar{a} - 2\zeta(\bar{b}^\dagger \bar{b}) \bar{a} - \sqrt{\gamma} \bar{s}_{\text{in}}^a - 2\sqrt{\zeta} \bar{b}^\dagger \bar{r}_{\text{in}}, \quad (3.115)$$

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \sqrt{\gamma} \frac{E}{\sqrt{2}} - \frac{\gamma}{2} \bar{b} - 2\zeta(\bar{a}^\dagger \bar{a}) \bar{b} - \sqrt{\gamma} \bar{s}_{\text{in}}^b - 2\sqrt{\zeta} \bar{a}^\dagger \bar{r}_{\text{in}}, \quad (3.116)$$

である。ただし、 \bar{a} , \bar{b} は、回転波近似下のモード振幅であり、

$$\hat{a} = \bar{a} e^{-i\omega_0(t-t_0)}, \quad (3.117)$$

$$\hat{b} = \bar{b} e^{-i\omega_0(t-t_0)}, \quad (3.118)$$

で定義される。

定常動作点と安定性

いま、これらを平均値とその回りの揺らぎとに

$$\bar{a} = a_0 + \Delta\bar{a}, \quad (3.119)$$

$$\bar{b} = b_0 + \Delta\bar{b}, \quad (3.120)$$

と分解し、平均値 a_0 , b_0 が定常的になる条件を求める。即ち、

$$\sqrt{\gamma} \frac{E}{\sqrt{2}} = \left\{ \frac{\gamma}{2} + 2\zeta |b_0|^2 \right\} a_0, \quad (3.121)$$

$$\sqrt{\gamma} \frac{E}{\sqrt{2}} = \left\{ \frac{\gamma}{2} + 2\zeta |b_0|^2 \right\} a_0^*, \quad (3.122)$$

$$\sqrt{\gamma} \frac{E}{\sqrt{2}} = \left\{ \frac{\gamma}{2} + 2\zeta |a_0|^2 \right\} b_0, \quad (3.123)$$

$$\sqrt{\gamma} \frac{E}{\sqrt{2}} = \left\{ \frac{\gamma}{2} + 2\zeta |a_0|^2 \right\} b_0^*, \quad (3.124)$$

の全式を同時に満足する根を求める。このうち、(3.121),(3.122) から明らかに、

$$a_0 = a_0^* \equiv p_0, \quad (3.125)$$

である。同様にして、(3.123),(3.124) より、

$$b_0 = b_0^* \equiv q_0, \quad (3.126)$$

である。これらを用いて(3.121),(3.123)を書き直すと、

$$\sqrt{\gamma} \frac{E}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\gamma}{2} + 2\zeta q_0^2 \right) p_0 = \left(\frac{\gamma}{2} + 2\zeta p_0^2 \right) q_0, \quad (3.127)$$

を得る。即ち、

$$\left(\frac{\gamma}{2} - 2\zeta p_0 q_0\right)(p_0 - q_0) = 0, \quad (3.128)$$

である。そこで、定常動作を行なう動作点として

$$\text{i. } p_0 = q_0, \quad (3.129)$$

$$\text{ii. } \gamma/2 = 2\zeta p_0 q_0, \quad (3.130)$$

の二つの可能性がある。

上の動作点上での線型安定性を調べる。雑音部分について線型近似を行うと、次のような線型一階の微分方程式が得られる:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta \tilde{a} \\ \Delta \tilde{a}^\dagger \\ \Delta \tilde{b} \\ \Delta \tilde{b}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma/2 - 2\zeta q_0^2 & 0 & -2\zeta p_0 q_0 & -2\zeta p_0 q_0 \\ 0 & -\gamma/2 - 2\zeta q_0^2 & -2\zeta p_0 q_0 & -2\zeta p_0 q_0 \\ -2\zeta p_0 q_0 & -2\zeta p_0 q_0 & -\gamma/2 - 2\zeta q_0^2 & 0 \\ -2\zeta p_0 q_0 & -2\zeta p_0 q_0 & 0 & -\gamma/2 - 2\zeta q_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \tilde{a} \\ \Delta \tilde{a}^\dagger \\ \Delta \tilde{b} \\ \Delta \tilde{b}^\dagger \end{pmatrix} - \sqrt{\gamma} \begin{pmatrix} \Delta \tilde{s}_{\text{in}}^a \\ \Delta \tilde{s}_{\text{in}}^{a\dagger} \\ \Delta \tilde{s}_{\text{in}}^b \\ \Delta \tilde{s}_{\text{in}}^{b\dagger} \end{pmatrix} - 2\sqrt{\zeta} \begin{pmatrix} q_0 \Delta r_{\text{in}} \\ q_0 \Delta r_{\text{in}}^\dagger \\ p_0 \Delta r_{\text{in}} \\ p_0 \Delta r_{\text{in}}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (3.131)$$

ここで

$$A = \begin{pmatrix} -\gamma/2 - 2\zeta q_0^2 & 0 & -2\zeta p_0 q_0 & -2\zeta p_0 q_0 \\ 0 & -\gamma/2 - 2\zeta q_0^2 & -2\zeta p_0 q_0 & -2\zeta p_0 q_0 \\ -2\zeta p_0 q_0 & -2\zeta p_0 q_0 & -\gamma/2 - 2\zeta q_0^2 & 0 \\ -2\zeta p_0 q_0 & -2\zeta p_0 q_0 & 0 & -\gamma/2 - 2\zeta q_0^2 \end{pmatrix}, \quad (3.132)$$

とおき、その固有値を求める。以後、

$$p_0^2 = I_a, \quad q_0^2 = I_b, \quad (3.133)$$

とおく。

場合 i: 第二高調波発生モード これは、モード a, b が同一の振幅を同位相で保つ場合であり、これらを 1:1 で線型結合したモードが単一で励振されているのと等価になる。即ち、 a, b と丁度 45° の偏波方向を持つモードが共振している、Type-I 位相整合による基本波閉

じ込め型第二高調波発生と同等である。この動作状態を「第二高調波発生モード」と名付ける。この場合の定常点は、

$$E = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{2} + 2\zeta p_0^2 \right) p_0, \quad (3.134)$$

によって与えられる。

固有多項式は、

$$\phi_i = \left\{ \lambda + \left(\frac{\gamma}{2} + \zeta I_0 \right) \right\}^2 \left\{ \lambda + \left(\frac{\gamma}{2} - \zeta I_0 \right) \right\} \times \left\{ \lambda + \left(\frac{\gamma}{2} + 3\zeta I_0 \right) \right\}, \quad (3.135)$$

である。ただし、

$$I_a = I_b \equiv I_0/2, \quad (3.136)$$

とした。全固有値の実部が負となるのは

$$\gamma/2 < \zeta I_0, \quad (3.137)$$

のときである。入射光子束密度では、

$$|E| < \frac{\gamma}{\sqrt{2\zeta}}, \quad (3.138)$$

のとき、本動作点は安定に存在する。反対に、この範囲を超えた場合には、線形安定性が保たれず、本動作点には停留しなくなる。

場合 ii: 直交偏波パラメトリック発振モード この場合には、第二高調波にあずかる両偏波モード \hat{a} , \hat{b} を同振幅で励振しているにも関わらず、これらの振幅は異なる。この現象は、基本波入力と同一の偏波方向の共振モード (\hat{a} , \hat{b} が同相) の他に、これとは直交する偏波方向の共振モード (\hat{a} , \hat{b} が逆相) が励起されている状態であると解釈できる。そこで、このような動作モードを「直交偏波パラメトリック発振モード」と名付ける。

式 (3.127) より

$$p_0 + q_0 = \frac{2E}{\sqrt{2\gamma}}, \quad (3.139)$$

となる。そこで、(3.130), (3.139) を用いて、

$$E = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} p_0 + \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{\gamma}{4\zeta p_0}, \quad (3.140)$$

なる関係を得る。このとき、Schwarz の不等式より

$$|E| \geq \frac{\gamma}{\sqrt{2\zeta}} \equiv E_{\text{th}}, \quad (3.141)$$

である。即ち、この動作点は $|E| > E_{\text{th}}$ の範囲にのみ存在する。

固有多項式は、

$$\begin{aligned} \phi_{ii} = & \left\{ \lambda + \left(\frac{\gamma}{2} + 2\zeta I_a \right) \right\} \left\{ \lambda + \left(\frac{\gamma}{2} + 2\zeta I_b \right) \right\} \\ & \times \left[\left\{ \lambda + \left(\frac{\gamma}{2} + 2\zeta I_a \right) \right\} \left\{ \lambda + \left(\frac{\gamma}{2} + 2\zeta I_b \right) \right\} - 4 \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.142)$$

である。大括弧 [] の中身は、

$$f(\lambda) \equiv \lambda^2 + \left(\gamma + 2\zeta I_a + 2\zeta I_b \right) \lambda + \frac{\gamma}{2} \left(2\zeta I_a + 2\zeta I_b - \gamma \right), \quad (3.143)$$

となる。函数 $f(\lambda)$ の判別式は、

$$\begin{aligned} \det f(x) &= \left(\gamma + 2\zeta(I_a + I_b) \right)^2 - 2\gamma \left(2\zeta(I_a + I_b) - \gamma \right) \\ &= 4\zeta^2(I_a + I_b)^2 + 3\gamma^2, \end{aligned} \quad (3.144)$$

である。ここで (3.130) を用いた。判別式は常に正であるから、安定のためには二つの実根が共に負にならなければならない。そのためには $f(0) > 0$ が条件となる。即ち、

$$I_a + I_b > \gamma/2\zeta, \quad (3.145)$$

でなければならない。以上より、(3.145) の範囲では常に安定となることがわかる。ところが、(3.145) は (3.130), (3.139) より、

$$|E| > \frac{\gamma}{\sqrt{2\zeta}}, \quad (3.146)$$

なることを意味する。即ち、 $2\zeta p_0 q_0 = \gamma/2$ の状態は (3.146) の領域で安定に存在する。

共振器モード振幅の平均 p_0, q_0 と入射基本波光子束密度 E との関係を図 3.3 に示す。実線が第二高調波モードの動作曲線、破線が直交偏波パラメトリック発振モードの動作曲線である。これら両者の交点より高入力の範囲では、第二高調波発生システムとしての線型安定性が保たれず、パラメトリック出力を伴う破線の動作曲線に移行する。

なお、本解析では、基本波モードと周波数上で縮退している直交偏波モードを、唯一発振可能なモードと仮定したが、実は、直交偏波モードの側波モードもパラメトリック発振が可能である。従って、これらの側波モードとの間で競合が生じ、安定動作しなくなる可能性がある。

出力第二高調波の定式化

第 3.2 節と同様の標記を用いる。即ち、第二高調波の進行波モードが $+z$ 方向に進行するものとし、共振器場とは $z = 0$ で相互作用するものとする。出力場は、 $z > 0$ における

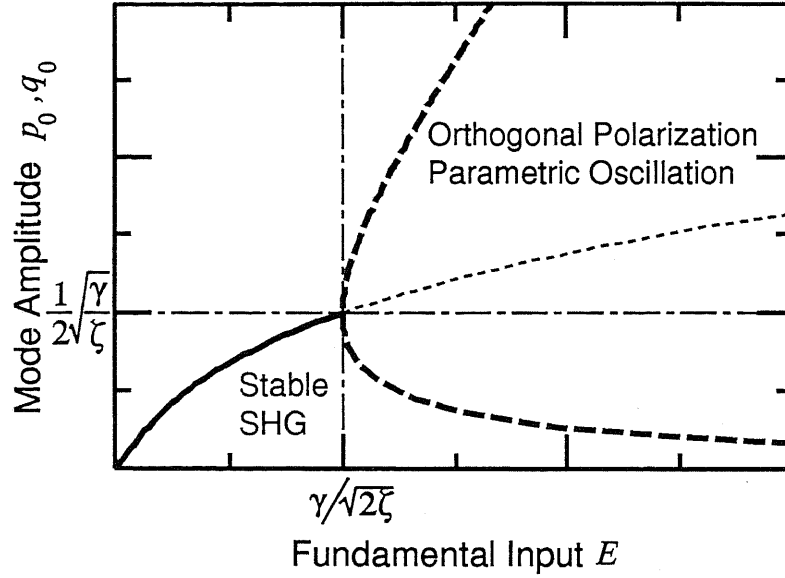


図 3.3: 励振力 E とモード振幅の定常値 p_0, q_0 との関係

全第二高調波モードの和、即ち、

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{\text{out}}(z, t) = & \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} e^{i\omega_j z/c} \tilde{d}_j(t_0) \\ & + 2\kappa \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \int_{t_0}^t dt' \tilde{a}(t') \tilde{b}(t') e^{i(\omega_j - 2\omega_0)(t' + z/c - t) + i2\omega_0(z/c)}, \end{aligned} \quad (3.147)$$

である。ここで (A.8) を用い、空間内の自由発展を考慮した。第 3.2 節と同様の手順により、

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{\text{out}}(z, t) \simeq & \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} e^{i\omega_j z/c} \tilde{d}_j(t_0) \\ & + 2\kappa g \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \int_{t_0}^t dt' \tilde{a}(t') \tilde{b}(t') \int_0^\infty d\omega_j e^{i(\omega_j - 2\omega_0)(t' + z/c - t) + i2\omega_0 z/c} \\ \simeq & \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} e^{i\omega_j z/c} \tilde{d}_j(t_0) \\ & + \sqrt{2\pi g} 2\kappa \int_{t_0}^t dt' \tilde{a}(t') \tilde{b}(t') e^{i2\omega_0 z/c} \delta(t' + z/c - t). \end{aligned} \quad (3.148)$$

が得られる。ここで $t - z/c > 0$ とし、(3.24) を用いれば、

$$\tilde{r}_{\text{out}}(z, t) \simeq \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} e^{i\omega_j z/c} \tilde{d}_j(t_0) + 2\sqrt{\zeta} \tilde{a}(t - z/c) \tilde{b}(t - z/c) e^{i2\omega_0 z/c}, \quad (3.149)$$

が得られる。最後に $z \rightarrow +0$ とすると、出力特性が以下のように得られる:

$$\tilde{r}_{\text{out}}(+0, t) = \tilde{r}_{\text{in}} + 2\sqrt{\zeta} \tilde{a}(t - 0) \tilde{b}(t - 0). \quad (3.150)$$

揺らぎを求めるために線型化すると、

$$\tilde{r}_{\text{out}} = \tilde{r}_{\text{in}} + 2\sqrt{\zeta} (p_0 \Delta \tilde{b} + q_0 \Delta \tilde{a}), \quad (3.151)$$

が得られる。

第二高調波発生モードでの出力雑音特性

まず、第二高調波発生システムとして安定している場合 ($p_0=q_0$) の出力雑音特性を調べる。

式 (3.132) の行列 A は正則行列 P

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}, \quad (3.152)$$

によって次のように対角化される。

$$B \equiv P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\gamma/2 - 3\zeta I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma/2 - \zeta I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma/2 + \zeta I_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma/2 - \zeta I_0 \end{pmatrix}. \quad (3.153)$$

いま、

$$v \equiv P^{-1}u = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\Delta \tilde{a} + \Delta \tilde{a}^\dagger) + (\Delta \tilde{b} + \Delta \tilde{b}^\dagger) \\ -i(\Delta \tilde{a} + \Delta \tilde{a}^\dagger) + i(\Delta \tilde{b} + \Delta \tilde{b}^\dagger) \\ (\Delta \tilde{a} - \Delta \tilde{a}^\dagger) + (\Delta \tilde{b} - \Delta \tilde{b}^\dagger) \\ -i(\Delta \tilde{a} - \Delta \tilde{a}^\dagger) + i(\Delta \tilde{b} - \Delta \tilde{b}^\dagger) \end{pmatrix}, \quad (3.154)$$

$$x_{\text{in}} \equiv P^{-1}r_{\text{in}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\tilde{s}_{\text{in}}^a + \tilde{s}_{\text{in}}^{a\dagger}) + (\tilde{s}_{\text{in}}^b + \tilde{s}_{\text{in}}^{b\dagger}) \\ -i(\tilde{s}_{\text{in}}^a + \tilde{s}_{\text{in}}^{a\dagger}) + i(\tilde{s}_{\text{in}}^b + \tilde{s}_{\text{in}}^{b\dagger}) \\ (\tilde{s}_{\text{in}}^a - \tilde{s}_{\text{in}}^{a\dagger}) + (\tilde{s}_{\text{in}}^b - \tilde{s}_{\text{in}}^{b\dagger}) \\ -i(\tilde{s}_{\text{in}}^a - \tilde{s}_{\text{in}}^{a\dagger}) + i(\tilde{s}_{\text{in}}^b - \tilde{s}_{\text{in}}^{b\dagger}) \end{pmatrix}, \quad (3.155)$$

$$y_{\text{in}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}P^{-1}s_{\text{in}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{r}_{\text{in}} + \tilde{r}_{\text{in}}^\dagger \\ 0 \\ 0 \\ -i(\tilde{r}_{\text{in}} + \tilde{r}_{\text{in}}^\dagger) \end{pmatrix}, \quad (3.156)$$

などと置けば、(3.131)より

$$\frac{dv}{dt} = Cv - \sqrt{\gamma} x_{in} - 2\sqrt{\zeta I_0} y_{in}, \quad (3.157)$$

を得る。ここで C は対角行列だから、

$$\frac{dv_i}{dt} = C_{ii}v_i - \sqrt{\gamma} x_{iin} - 2\sqrt{\zeta I_0} y_{iin}, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (3.158)$$

となる。また、そのフーリエ変換は

$$V_i = \frac{-\sqrt{\gamma} X_{iin} - 2\sqrt{\zeta I_0} Y_{iin}}{-i\omega - C_{ii}}, \quad (3.159)$$

である。ここで、 V_i, X_{iin}, Y_{iin} , ($i = 1, 2, 3, 4$) は、その小文字が表している変数のフーリエ変換である。

ここで、入力雑音 x, y の雑音について考える。まず、 y_1, y_4 は、高調波付近の真空 r_{in} の直交位相成分に相当するので、

$$\langle y_1(t)y_1(t') \rangle = \langle y_4(t)y_4(t') \rangle = \frac{1}{4}\delta(t-t'), \quad (3.160)$$

なる自己相関関数を持つ。一方、 x_1 は、

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \tilde{s}_{in}^a + \Delta \tilde{s}_{in}^b}{\sqrt{2}} + \frac{\Delta \tilde{s}_{in}^{a\dagger} + \Delta \tilde{s}_{in}^{b\dagger}}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.161)$$

であるが、これは、共振器モード a, b の偏波方向のちょうど中間、すなわち、両方向から 45° だけ傾いた成分

$$\Delta \tilde{s}^{45^\circ} \equiv \frac{\Delta \tilde{s}_{in}^a + \Delta \tilde{s}_{in}^b}{\sqrt{2}}, \quad (3.162)$$

の、励振力 E に同相の成分を表す。同様に、

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \tilde{s}_{in}^a + \Delta \tilde{s}_{in}^b}{\sqrt{2}} - \frac{\Delta \tilde{s}_{in}^{a\dagger} + \Delta \tilde{s}_{in}^{b\dagger}}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.163)$$

は、 $\Delta \tilde{s}^{45^\circ}$ のうち E と位相が直交する成分に対応する。一方、

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \tilde{s}_{in}^a - \Delta \tilde{s}_{in}^b}{\sqrt{2}} + \frac{\Delta \tilde{s}_{in}^{a\dagger} - \Delta \tilde{s}_{in}^{b\dagger}}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.164)$$

および

$$x_4 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \tilde{s}_{in}^a - \Delta \tilde{s}_{in}^b}{\sqrt{2}} - \frac{\Delta \tilde{s}_{in}^{a\dagger} - \Delta \tilde{s}_{in}^{b\dagger}}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.165)$$

は、 $\Delta \tilde{s}^{45^\circ}$ と偏波が直交するモード

$$\Delta \tilde{s}^{-45^\circ} \equiv \frac{\Delta \tilde{s}_{in}^a - \Delta \tilde{s}_{in}^b}{\sqrt{2}}, \quad (3.166)$$

の同相および直交位相成分に相当する。変換 $(\Delta\tilde{s}^a, \Delta\tilde{s}^b) \rightarrow (\Delta\tilde{s}^{45^\circ}, \Delta\tilde{s}^{-45^\circ})$ は正規直交変換であるから、 $\Delta\tilde{s}^{45^\circ}$ および $\Delta\tilde{s}^{-45^\circ}$ の揺らぎの統計は、ともに、 $\Delta\tilde{s}^a$ のそれと等しい。即ち、

$$\begin{aligned} \langle \Delta\tilde{s}^{\pm 45^\circ \dagger}(t) \Delta\tilde{s}^{\pm 45^\circ}(t') \rangle &= \langle \Delta\tilde{s}^{\pm 45^\circ}(t) \Delta\tilde{s}^{\pm 45^\circ}(t') \rangle = \langle \Delta\tilde{s}^{\pm 45^\circ \dagger}(t) \Delta\tilde{s}^{\pm 45^\circ \dagger}(t') \rangle \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.167)$$

$$\langle \Delta\tilde{s}^{\pm 45^\circ}(t) \Delta\tilde{s}^{\pm 45^\circ \dagger}(t') \rangle = \delta(t-t'). \quad (3.168)$$

これより、各成分の自己相関関数として、

$$\langle x_j(t) x_j(t') \rangle = \frac{1}{4} \delta(t-t'), \quad (j=1 \cdots 4), \quad (3.169)$$

が得られる。

これらを用いて、第二高調波出力の雑音統計を調べる。式 (3.151) を用いて、

$$\tilde{r}_{\text{out}} = \tilde{r}_{\text{in}} + 2\sqrt{\zeta} p_0 (\Delta\tilde{b} + \Delta\tilde{a}), \quad (3.170)$$

これと、共軛の式と (3.136) を用いれば、

$$\begin{aligned} y_{1\text{out}} &\equiv \frac{\tilde{r}_{\text{out}} + \tilde{r}_{\text{out}}^\dagger}{2} \\ &= \frac{\tilde{r}_{\text{in}} + \tilde{r}_{\text{in}}^\dagger}{2} + 2\sqrt{\zeta} p_0 \times \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\tilde{a} + \Delta\tilde{b}}{\sqrt{2}} + \frac{\Delta\tilde{a}^\dagger + \Delta\tilde{b}^\dagger}{\sqrt{2}} \right) \times \sqrt{2} \\ &= y_{1\text{in}} + 2\sqrt{\zeta I_0} V_1, \end{aligned} \quad (3.171)$$

が得られる。これを用いて、第二高調波出力のスペクトルを計算すると、

$$\begin{aligned} Y_{1\text{out}} &= Y_1 + 2\sqrt{\zeta I_0} V_1 \\ &= \frac{-2\sqrt{\gamma\zeta I_0} X_1 + \left(-i\omega + \frac{\gamma}{2} - \zeta I_0\right) Y_1}{-i\omega + \frac{\gamma}{2} + 3\zeta I_0}, \end{aligned} \quad (3.172)$$

となる。 $Y_{1\text{out}}$, X_1 , Y_1 のパワースペクトルをそれぞれ $\mathcal{Y}_{1\text{out}}$, \mathcal{X}_1 , \mathcal{Y}_1 とすれば、

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{1\text{out}} &= \frac{4\gamma\zeta I_0 \mathcal{X}_1 + \left\{ \omega^2 + \left(\frac{\gamma}{2} - \zeta I_0 \right)^2 \right\} \mathcal{Y}_1}{\omega^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + 3\zeta I_0 \right)^2} \\ &= \frac{4\gamma\zeta I_0 + \left\{ \omega^2 + \left(\frac{\gamma}{2} - \zeta I_0 \right)^2 \right\}}{\omega^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + 3\zeta I_0 \right)^2} \times \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (3.173)$$

である。特に、

$$\mathcal{N}_{\text{out}}(\gamma = 2\zeta I_0; \omega = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}, \quad (3.174)$$

であり、このシステムでの最大スクイーミング量は 50% に留まることがわかる。

直交偏波パラメトリック発振モードでの出力雑音特性

パラメトリック発振が生じると、発振閾値付近での不安定性の影響が出力にも現れるため、雑音特性の著しい劣化が予想される。

第二高調波発生モードでは、常に二つの偏波モード \tilde{a}, \tilde{b} が等振幅・同位相で励起されて、等価的に 45° 傾いた直線偏波モード $\tilde{a}^{45^\circ} = (\tilde{a} + \tilde{b})/\sqrt{2}$ が励起されている。ところが、本動作モードではパラメトリック発振を生じる -45° 傾いた直線偏波モード $\tilde{a}^{-45^\circ} = (\tilde{a} - \tilde{b})/\sqrt{2}$ の振幅が入射パワーに依存する。この結果、二つの偏波モード \tilde{a}, \tilde{b} の振幅比も入射パワーに依存し、見通しの良い解析解が得られない。そこで本節では、揺らぎを求める線型理論を用いて数値解析する。

Wigner 位相空間における雑音スペクトル行列 Schödinger 表示による運動の解析は、密度演算子の時間変化を求めることにほかならないが、実際に演算子方程式を解くのは困難である。そこで、演算子と c 数変数とをある決まりによって結びつけ、これらによって c 数による Liouville 方程式を導き、解くのが普通である。このとき、Liouville 方程式の解として求める c 数の密度函数を随伴函数と呼ぶ。

随伴函数の定義は、演算子と c 数変数との対応づけによってさまざまなバリエーションが存在するが、ここでは、Wigner 函数を用いる。[40] 一般に Liouville 方程式は、それに双対な Langevin 方程式を有する。これを線型化すると、(3.131) と全く同様の線型 Langevin 方程式が得られる。そこで一般に、

$$\frac{du}{dt} = Au - \sqrt{\gamma}s, -2\sqrt{\zeta} Kr_{\text{in}}, \quad (3.175)$$

によって表すことにする。ここで、演算子とそれに対応する Wigner 位相空間内の変数を、それぞれ

$$\Delta\tilde{a} \leftrightarrow \Delta\alpha, \quad (3.176)$$

$$\Delta\tilde{b} \leftrightarrow \Delta\beta, \quad (3.177)$$

$$\Delta\tilde{r}_{\text{in}} \leftrightarrow \Delta\rho_{\text{in}}, \quad (3.178)$$

$$\Delta\tilde{s}_{\text{in}} \leftrightarrow \Delta\sigma_{\text{in}}, \quad (3.179)$$

とし、

$$\mathbf{u} = \tau(\Delta\alpha, \Delta\alpha^*, \Delta\beta, \Delta\beta^*), \quad (3.180)$$

$$\mathbf{r}_{\text{in}} = \tau(\Delta\rho_{\text{in}}, \Delta\rho_{\text{in}}^*), \quad (3.181)$$

$$\mathbf{s}_{\text{in}} = \tau(\Delta\sigma_{\text{in}}^a, \Delta\sigma_{\text{in}}^{a*}, \Delta\sigma_{\text{in}}^b, \Delta\sigma_{\text{in}}^{b*}), \quad (3.182)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\gamma/2 - 2\zeta q_0^2 & 0 & -2\zeta p_0 q_0 & -2\zeta p_0 q_0 \\ 0 & -\gamma/2 - 2\zeta q_0^2 & -2\zeta p_0 q_0 & -2\zeta p_0 q_0 \\ -2\zeta p_0 q_0 & -2\zeta p_0 q_0 & -\gamma/2 - 2\zeta p_0^2 & 0 \\ -2\zeta p_0 q_0 & -2\zeta p_0 q_0 & 0 & -\gamma/2 - 2\zeta p_0^2 \end{pmatrix}, \quad (3.183)$$

$$K = \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \\ p_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix}, \quad (3.184)$$

とおいた。一方、求める雑音成分の双対変数を

$$\mathbf{x} = B\mathbf{R}_{\text{out}}, \quad (3.185)$$

などとおく。ただし、 $\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{out}}^*$ を $\Delta\tilde{r}_{\text{out}}, \Delta\tilde{r}_{\text{out}}^\dagger$ の双対変数とし、

$$\mathbf{r}_{\text{out}} = \tau(\Delta\rho_{\text{out}}, \Delta\rho_{\text{out}}^*), \quad (3.186)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -i/2 & i/2 \end{pmatrix}, \quad (3.187)$$

とおいた。入出力の関係 (3.151) を用いると、

$$\mathbf{x} = B\mathbf{r}_{\text{in}} + 2\sqrt{\zeta} BC\mathbf{u}, \quad (3.188)$$

と表される。ただし、

$$C = \begin{pmatrix} q_0 & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & q_0 & 0 & p_0 \end{pmatrix}, \quad (3.189)$$

とした。

式 (3.175) と (3.188) をフーリエ変換し、各ベクトルのフーリエ変換を、同じ文字の大文字で表す。例えば、

$$\mathbf{X} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{x} e^{-i\omega t}, \quad (3.190)$$

とする。ただし、フーリエ変換は、ベクトルの各成分について個別に行うものとする。すると、

$$-i\omega U = AU - \sqrt{\gamma} S_{in} - 2\sqrt{\zeta} R_{in}, \quad (3.191)$$

$$X = BR + 2\sqrt{\zeta} BC U, \quad (3.192)$$

を得る。ここで (3.192) を (3.191) に代入すると、 X は、 R と S の線型和として、

$$X = V_R R + V_S S, \quad (3.193)$$

と書くことができる。ただし、

$$V_R = B - 4\zeta BC(-i\omega I - A)^{-1} K, \quad (3.194)$$

$$V_S = -2\sqrt{\gamma\zeta} BC(-i\omega I - A)^{-1}, \quad (3.195)$$

$$I = \text{diag}(1, 1, 1, 1), \quad (3.196)$$

である。

観測値 x のパワースペクトルを求めるため、

$$S_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \langle X X^\dagger \rangle_T, \quad (3.197)$$

を計算する。ここで、記号 \dagger は行列の転置複素共軛を意味し、また T は観測時間、 $\langle \rangle_T$ は観測時間中の期待値とした。すると、(3.193) よりただちに、

$$S_X = V_R S_R V_R^\dagger + V_S S_S V_S^\dagger, \quad (3.198)$$

が得られる。Wigner 関数では、演算子の「対称順序」のモーメントが得られるから、

$$S_R = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (3.199)$$

$$S_S = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (3.200)$$

$$(3.201)$$

である。

即ち、極めて一般の場合について、出力第二高調波の振幅及び直交位相方向のスペクトルを、(3.193) によって計算できる。

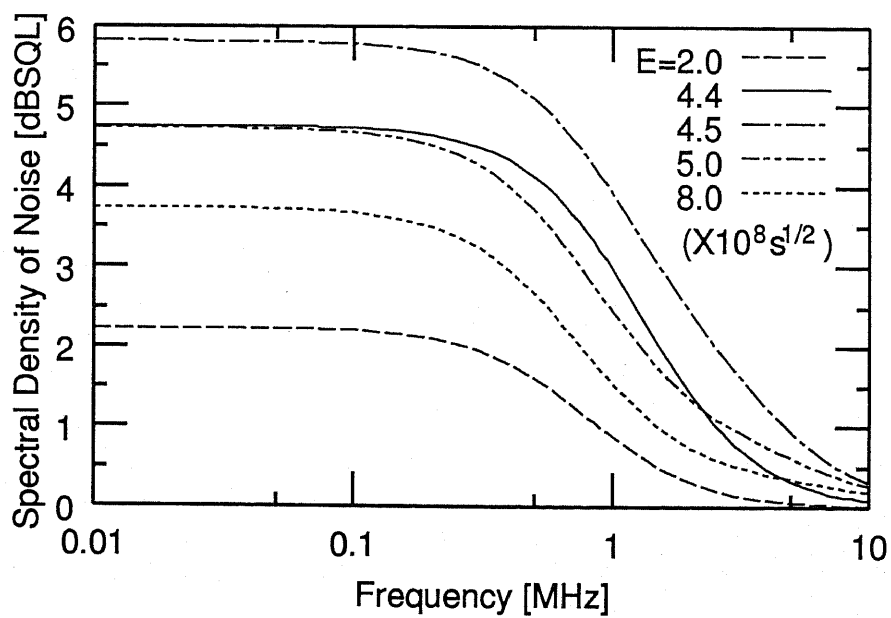
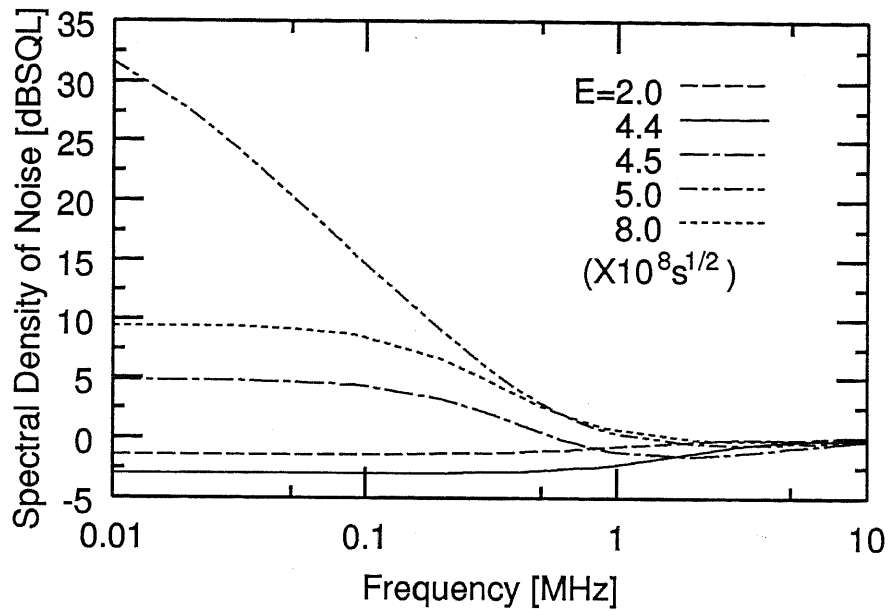


図 3.4: Type-II 位相整合を用いた第二高調波発生システムの実出力雑音スペクトル、
 (a) 振幅雑音, (b) 直交位相雑音。

数値例 図 3.4 に、数種の入射基本波光子数密度 E に対する第二高調波出力の振幅および直交位相雑音スペクトルを示す。用いたパラメータは、 $\gamma=6.28 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$, $\zeta = 0.01 \text{ s}^{-1}$, であり、 E として $2.0 \times 10^7 \text{ s}^{-1/2}$, $4.4 \times 10^7 \text{ s}^{-1/2}$, $4.5 \times 10^7 \text{ s}^{-1/2}$, $5.0 \times 10^7 \text{ s}^{-1/2}$ を与えた。直交偏波パラメトリック発振の閾値は $4.45 \times 10^7 \text{ s}^{-1/2}$ である。

図から明らかかなように、発振閾値以下の場合には周波数 0 の付近で最大のスキューニングが得られる。ところが、パラメトリック発振が開始すると、発振時の大きな雑音が重畳し、スキューニングの出現する周波数帯域が急激に狭くなる。パラメトリック発振が安定する領域では、雑音スペクトルの最大値は抑えられるものの、スキューニングの領域も消滅する。

図 3.5 に、同スペクトルのゼロ周波数付近の値と、入射基本波光子束密度 E との関係を示す。第二高調波発生モードでは、入射基本波の大きさに対し単調にスキューニング量が増加し、発振閾値における値=3dB まで達し得る。ところが、パラメトリック発振閾値で急激に強度雑音が上昇し、以降、やがては減少し出すものの、ショット雑音レベルを下回ることにはなくなる。即ち、本システムの最大スキューニング量は 3dB であると結論することができる。

なお、本解析では、パラメトリック発振を生じている直交偏波モードは、基本波モードと周波数縮退していると考えたが、実際には、周波数非縮退のモード、即ち、直交偏波モードの側波モードも同様に発振し得る。このため、直交偏波モード間での競合も出力第二高調波の雑音原因となり得る。本解析は、得られるであろう雑音特性の最小値を与えるものである。

3.5 基本波閉じ込め・レーザ内部型システムの出力雑音特性

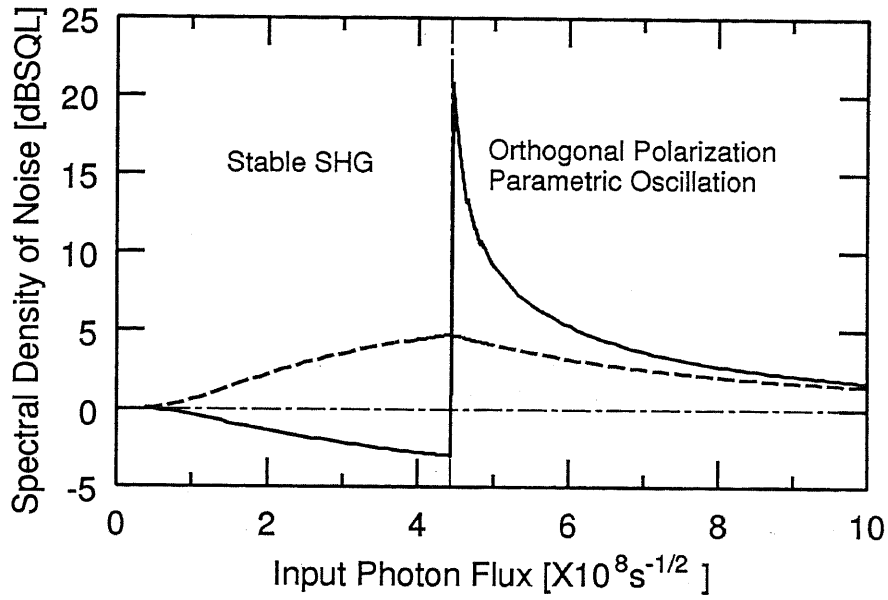
レーザ内部型は外部共振器型と異なり、レーザ媒質の利得が全損失と釣り合うように動作点が定まる。従って、非線型損失が大きくなっても、これに応じてレーザ利得が増加し、実効ポンプ率から第二高調波出力への変換量子効率を最大値 50% に近づけようとする。利得は損失と同等であるから、外部共振器型における「100% 変換」状態 (第 3.3.2 節) を維持しようとするものと考えられる。

いま、不飽和利得を G 、飽和光子数を I_S とおけば、原子系を断熱排除した場合に得られる利得は

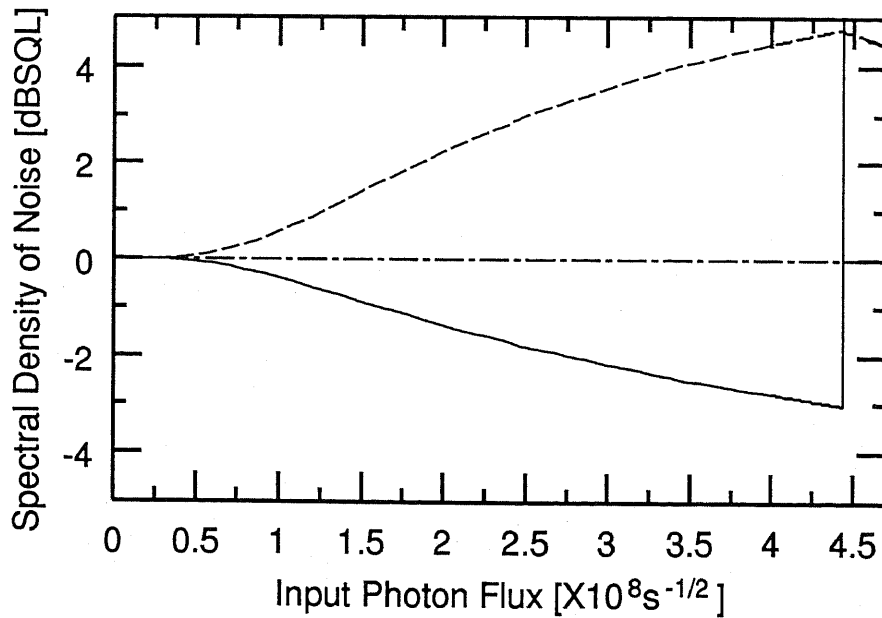
$$g = \frac{GI_S}{I + I_S}, \quad (3.202)$$

で表される。ただし、基本波光子数 I は、

$$I = a^\dagger a, \quad (3.203)$$



(a)



(b)

図 3.5: 出力雑音スペクトルのゼロ周波数成分の入射基本波光子束密度との関係、
(a) 全体像, (b) 発振閾値付近以下、実線: 振幅雑音, 破線: 直交位相雑音。

の演算子とする。また、飽和光子数 I_S は、レーザ媒質の飽和強度 I_S と

$$I_S = \frac{I_{\text{sat}} S T_c}{\hbar \omega_0}, \quad (3.204)$$

によって結ばれているものとする。ここで T_c は共振器内周回時間、 S は実行断面積である。

これを用いて、基本波モード振幅 \tilde{a} に関する Langevin 方程式を書くと、

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = \frac{g}{2}\tilde{a} - \frac{\gamma_l}{2}\tilde{a} - \zeta\tilde{a}^\dagger\tilde{a}^2 + \tilde{f}_a + \tilde{g}_a + \tilde{h}_a, \quad (3.205)$$

$$\frac{d\tilde{a}^\dagger}{dt} = \frac{g}{2}\tilde{a}^\dagger - \frac{\gamma_l}{2}\tilde{a}^\dagger - \zeta\tilde{a}^{\dagger 2}\tilde{a} + \tilde{f}_a^\dagger + \tilde{g}_a^\dagger + \tilde{h}_a^\dagger, \quad (3.206)$$

などとなる。利得に伴う揺らぎは Poisson 的であるとする。即ち、Langevin 力として、

$$\tilde{f}_a = -\sqrt{g_0}\tilde{s}_{\text{in}}, \quad (3.207)$$

$$\tilde{f}_a^\dagger = -\sqrt{g_0}\tilde{s}_{\text{in}}^\dagger, \quad (3.208)$$

を採用する。ここで g_0 は利得 g の平均値であり、揺らぎ $\tilde{s}_{\text{in}}, \tilde{s}_{\text{in}}^\dagger$ は

$$\langle \tilde{s}_{\text{in}}^\dagger(t)\tilde{s}_{\text{in}}(t') \rangle = \bar{\eta}(2\omega_0)\delta(t-t'), \quad (3.209)$$

$$\langle \tilde{s}_{\text{in}}(t)\tilde{s}_{\text{in}}(t') \rangle = \langle \tilde{s}_{\text{in}}^\dagger(t)\tilde{s}_{\text{in}}^\dagger(t') \rangle = 0, \quad (3.210)$$

$$\langle \tilde{s}_{\text{in}}(t)\tilde{s}_{\text{in}}^\dagger(t') \rangle = (\bar{\eta}(2\omega_0) + 1)\delta(t-t'), \quad (3.211)$$

を満たすものとする。

通常のレーザと同様、主成分 (或いは光子数) については定常値が存在するが、直交成分 (或いは位相) は拡散過程となるために、定常値をもたない。そこで、共振器場の平均振幅 α_0 を

$$\tilde{a}_0 = \sqrt{I_0}e^{i\phi}, \quad (3.212)$$

によって定義する。ここで、光子数の定常値 I_0 は、

$$\zeta I_0 = \frac{g_0}{2} = \frac{GI_S}{2(I_0 + I_S)}, \quad (3.213)$$

与えられる。

これを用いて、共振器場を (3.47) のように平均値と揺らぎ演算子に分け、揺らぎに関する方程式を導くと、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta\tilde{a} \\ \Delta\tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\begin{array}{cc} \frac{GI_S^2}{2(I_0 + I_S)^2} - \frac{\gamma}{2} - 2\zeta I_0 & \left\{ -\frac{GI_S I_0}{2(I_0 + I_S)^2} - \frac{\gamma}{2} - \zeta I_0 \right\} e^{2i\phi} \\ \left\{ -\frac{GI_S I_0}{2(I_0 + I_S)^2} - \frac{\gamma}{2} - \zeta I_0 \right\} e^{-2i\phi} & \frac{GI_S^2}{2(I_0 + I_S)^2} - \frac{\gamma}{2} - 2\zeta I_0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Delta \tilde{a} \\ \Delta \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \tilde{f}_a \\ \tilde{f}_a^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{g}_a \\ \tilde{g}_a^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{h}_a \\ \tilde{h}_a^\dagger \end{pmatrix}, \tag{3.214}
\end{aligned}$$

となる。

主成分 a_1 および直交成分 a_2 を

$$\Delta \tilde{a}_1 = \frac{\Delta \tilde{a} e^{-i\phi} + \Delta \tilde{a}^\dagger e^{i\phi}}{2}, \tag{3.215}$$

$$\Delta \tilde{a}_2 = \frac{\Delta \tilde{a} e^{-i\phi} - \Delta \tilde{a}^\dagger e^{i\phi}}{2i}, \tag{3.216}$$

によって定義する。同様に、Langevin 力についても、

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_1 &= \frac{\tilde{f}_a e^{-i\phi} + \tilde{f}_a^\dagger e^{i\phi}}{2} = -\sqrt{g_0} \frac{\Delta \tilde{s}_{in} e^{-i\phi} + \Delta \tilde{s}_{in}^\dagger e^{i\phi}}{2} \\
&= -\sqrt{g_0} \Delta \tilde{s}_{1in}, \tag{3.217}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_2 &= \frac{\tilde{f}_a e^{-i\phi} - \tilde{f}_a^\dagger e^{i\phi}}{2i} = -\sqrt{g_0} \frac{\Delta \tilde{s}_{in} e^{-i\phi} - \Delta \tilde{s}_{in}^\dagger e^{i\phi}}{2i}, \\
&= -\sqrt{g_0} \Delta \tilde{s}_{2in}, \tag{3.218}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1 &= \frac{\tilde{g}_a e^{-i\phi} + \tilde{g}_a^\dagger e^{i\phi}}{2} = -2\sqrt{\zeta I_0} \frac{\Delta \tilde{r}_{in} e^{-2i\phi} + \Delta \tilde{r}_{in}^\dagger e^{2i\phi}}{2} \\
&= -2\sqrt{\zeta I_0} \Delta \tilde{r}_{1in}, \tag{3.219}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_2 &= \frac{\tilde{g}_a e^{-i\phi} - \tilde{g}_a^\dagger e^{i\phi}}{2i} = -2\sqrt{\zeta I_0} \frac{\Delta \tilde{r}_{in} e^{-2i\phi} - \Delta \tilde{r}_{in}^\dagger e^{2i\phi}}{2i} \\
&= -2\sqrt{\zeta I_0} \Delta \tilde{r}_{2in}, \tag{3.220}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_1 &= \frac{\tilde{h}_a e^{-i\phi} + \tilde{h}_a^\dagger e^{i\phi}}{2} = -\sqrt{\gamma_l} \frac{\Delta \tilde{t}_{in} e^{-i\phi} + \Delta \tilde{t}_{in}^\dagger e^{i\phi}}{2} \\
&= -\sqrt{\gamma_l} \Delta \tilde{t}_{1in}, \tag{3.221}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_2 &= \frac{\tilde{h}_a e^{-i\phi} - \tilde{h}_a^\dagger e^{i\phi}}{2i} = -\sqrt{\gamma_l} \frac{\Delta \tilde{t}_{in} e^{-i\phi} - \Delta \tilde{t}_{in}^\dagger e^{i\phi}}{2i}, \\
&= -\sqrt{\gamma_l} \Delta \tilde{t}_{2in}, \tag{3.222}
\end{aligned}$$

と書くことにする。ただし、

$$\Delta \tilde{r}_{in} = (\Delta \tilde{r}_{1in} + i \Delta \tilde{r}_{2in}) e^{2i\phi}, \tag{3.223}$$

$$\Delta \tilde{s}_{in} = (\Delta \tilde{s}_{1in} + i \Delta \tilde{s}_{2in}) e^{i\phi}, \tag{3.224}$$

$$\Delta \tilde{t}_{in} = (\Delta \tilde{t}_{1in} + i \Delta \tilde{t}_{2in}) e^{i\phi}, \tag{3.225}$$

とした。出力の成分についても同様に定義する。

これらを使えば、 $\Delta\bar{a}_1$, $\Delta\bar{a}_2$ に対する線型化された運動方程式を

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta\bar{a}_1 \\ \Delta\bar{a}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{GI_S(I_S - I_0)}{2(I_0 + I_S)^2} - \frac{\gamma}{2} - 3\zeta I_0 & 0 \\ 0 & \frac{GI_S}{2(I_0 + I_S)} - \frac{\gamma}{2} - \zeta I_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\bar{a}_1 \\ \Delta\bar{a}_2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \sqrt{\frac{GI_S}{I_0 + I_S}} \begin{pmatrix} \Delta\bar{s}_{1in} \\ \Delta\bar{s}_{2in} \end{pmatrix} - 2\sqrt{\zeta I_0} \begin{pmatrix} \Delta\bar{r}_{1in} \\ \Delta\bar{r}_{2in} \end{pmatrix} - \sqrt{\gamma} \begin{pmatrix} \Delta\bar{t}_{1in} \\ \Delta\bar{t}_{2in} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.226)$$

と書くことができる。外部共振型の解析と全く同様にして、出力第二高調波の振幅揺らぎを

$$\begin{aligned} \Delta\bar{R}_{1out} &= \frac{-2\sqrt{\zeta I_0} \frac{GI_S}{I_0 + I_S}}{-i\omega + \frac{\gamma}{2} + 3\zeta I_0 - \frac{GI_S(I_S - I_0)}{2(I_0 + I_S)^2}} \Delta\bar{S}_{1in} \\ &\quad + \left(1 - \frac{4\zeta I_0}{-i\omega + \frac{\gamma}{2} + 3\zeta I_0 - \frac{GI_S(I_S - I_0)}{2(I_0 + I_S)^2}} \right) \Delta\bar{R}_{1in} \\ &\quad + \frac{-2\sqrt{\zeta I_0} \gamma}{-i\omega + \frac{\gamma}{2} + 3\zeta I_0 - \frac{GI_S(I_S - I_0)}{2(I_0 + I_S)^2}} \Delta\bar{T}_{1in}, \end{aligned} \quad (3.227)$$

によって表すことができる。

ここで (3.213), を使って、(3.227) 中のレーザに関する項を

$$\frac{GI_S(I_S - I_0)}{2(I_0 + I_S)^2} = \frac{GI_S^2}{(I_0 + I_S)^2} - \frac{GI_S}{2(I_0 + I_S)} \quad (3.228)$$

$$= \frac{GI_S^2}{(I_0 + I_S)^2} - \zeta I_0 - \frac{\gamma}{2}, \quad (3.229)$$

と分割する。すると、(3.227) は、

$$\begin{aligned} \Delta\bar{R}_{1out} &= \frac{-2\sqrt{\zeta I_0}(\gamma + 2\zeta I_0)}{-i\omega + \gamma + 4\zeta I_0 - \frac{GI_S^2}{(I_0 + I_S)^2}} \Delta\bar{S}_{1in} \\ &\quad + \frac{-i\omega + \gamma - \frac{GI_S^2}{(I_0 + I_S)^2}}{-i\omega + \gamma + 4\zeta I_0 - \frac{GI_S^2}{(I_0 + I_S)^2}} \Delta\bar{R}_{1in} \\ &\quad + \frac{-2\sqrt{\zeta I_0} \gamma}{-i\omega + \gamma + 4\zeta I_0 - \frac{GI_S^2}{(I_0 + I_S)^2}} \Delta\bar{T}_{1in}, \end{aligned} \quad (3.230)$$

と書き直され、出力第二高調波の振幅雑音スペクトル $\mathcal{R}_{1\text{out}}$ が

$$\mathcal{R}_{1\text{out}} = \frac{8\zeta I_0(\gamma_l + \zeta I_0) + \omega^2 + \left\{ \gamma_l - \frac{GI_S^2}{(I_S + I_0)^2} \right\}^2}{\omega^2 + \left\{ \gamma_l + 4\zeta I_0 - \frac{GI_S^2}{(I_S + I_0)^2} \right\}^2} \times \frac{1}{4}, \quad (3.231)$$

と書かれることが分かる。すなわち、いかなるシステムでも $I_0 \rightarrow \infty$ とすることにより、50% のスクイーミングが達成されることになる。

式 (3.229) を検討する。左辺のレーザ増幅を示す項のうち、 I_0 につれて大きくなる項は常に ζI_0 と釣り合っている。レーザ媒質へのポンプ率を上げると、それにつれて共振器内光子数、およびポンプ率対出力の量子効率が単調に増加し、特に後者は最大値 50% に漸近する。しかし、これはレーザ媒質による増幅分をそのまま第二高調波に変換していることに他ならない。即ち、変換効率が上がるほどレーザからの雑音が増加して、高効率変換システムが与える最小値 50% に留まると結論される。

この予測は、 I_0 が極めて大きくなり、変換効率が飽和する場合にも成立するように見える。確かに、第 4 章の進行波解析でも、スクイーミングの最大量が 50% であることが予測される。しかしその一方で、達成可能なスクイーミング量はシステムのパラメータに依存し、過剰な非線型性が存在すると、むしろ雑音は増大することが導かれる。これは、いかなるシステムでも達成可能とする本章での結論を否定するものである。

3.6 まとめ

本章では、基本波閉じ込め型共振器内光第二高調波発生を記述する理論として、非線型結晶内での光の相互作用を低次近似する二光子吸収モデルと、これを用いたスクイーミング特性の解析結果について述べた。また、基本波閉じ込め型第二高調波発生システムにおける、基本波以外の縦モード中のパラメトリック発振の可能性を調べた。最後に、レーザ内部型の特性について解析し、得られる知見をまとめた。

本章でのマルコフ近似による解析は、共振器損失が小さい場合に、極めて見通しの良い議論を可能にする。特にパラメトリック同時発振時の雑音特性を、線型近似ながら解析的に導けるという性質は、次章で述べる進行波解析にはない長所といえる。

しかし、基本波光子数が大きい場合など、損失の大きいシステムの議論には適用できない。本モデルによって得られる最大スクイーミング量に関する議論は、近似の有効範囲外のものである。理論的限界を算出するためには、次章の進行波解析が不可欠である。

第 4 章

非線型光学結晶内の発展と基本波閉じ込め型システムの出力雑音特性

非線型光学結晶内における古典場の発展は、1962 年の Armstrong らによる解析に詳しく与えられている。[41] 近年、光の量子揺らぎに関する関心が高まる中で、1994 年に、Ou は揺らぎの発展方程式を導き、位相整合条件が満たされている場合の解析解を与えた。[24] この解は同年に出版された Li らの論文によっても確かめられている。[25]

光共振器内部の第二高調波発生では、一回通過時の変換効率は極めて小さい。このため、結晶内部における場の発展を無視できることが多く、第 3 章のような取扱が可能になる。最大効率は基本波共振器の線型損失と第二高調波発生による損失が釣りあった点で得られるから、効率を重視した商用のシステムでは、結晶内部での発展はほぼ無視できる。

しかしながら、最大効率を与える入射パワーを超えてシステムを励振する場合には、この議論は成り立たない。前章までの議論によれば、基本波閉じ込め型システムでは、発生した第二高調波のスケーリング量は周回パワーについて単調増加するから、スクイズド光発生には欠かせない動作領域である。ところが、この領域では一回通過時の変換効率が大きくなり、共振器場の強度分布が位置依存性をもつようになる。これは、共振器内ではある一定の値で一様分布すると仮定したいわゆる「平均場近似」が成立し得ないことを意味する。

このようなシステムの動作解析は、通常「自己無撞着法」と呼ばれる方法によって解析される。この方法は、共振器内を周回する光波の発展を計算し、これが定常状態では周回前のものと同一であるという条件を課し、この条件を満足する光波の統計を算出するものである。この方法は、1970 年代に光双安定性の計算に用いられて以来、[42] さまざまな場面で用いられており、二次の非線型性を用いたシステムについても、パラメトリック発振器の量子雑音特性や [43] 二重共振型第二高調波発生システムの運動特性の解析 [44] に用いられていた。しかし、基本波閉じ込め型第二高調波発生システムの量子雑音特性を解析的に求める

ために用いられたことは無かった。

本章では、まず、共振器内光強度の軸方向分布を考慮するために必要な数式上の拡張を行い、その表式に基づいて、直接検出、あるいはホモダイン検出によって観測される物理量を定式化する。次に、自己無撞着法を用いた揺らぎの解析法に関する一般論を述べる。これに続いて、基本波閉じ込め型第二高調波発生システムへの応用を準備するため、非線型光学結晶内における古典場の発展、および、線型化された揺らぎ演算子の発展について論じる。得られた結果を元に、外部共振器型システムにおける共振器場の統計を自己無撞着法によって求め、その第二高調波および基本波出力の雑音特性を計算する。更に、基本波モード以外の共振器モード（側波モード）内のパラメトリック利得を計算し、側波モードの発振可能性、および、Type II 位相整合を用いたシステムの、直交偏波成分の発振可能性について論じる。最後に、レーザ内部型システムの出力雑音特性を解析し、スクイズド光発生に向けたシステム設計への指針を与える。

4.1 フーリエ変換による定式化と観測される物理量

本節では、以後使用する演算子の定義を与え、各種検出法によって観測される物理量を、本表示によって表すことにする。

4.1.1 定義

損失やその他の擾乱が存在しない、理想リング共振器内の光電場 $E(z, t)$ をモード展開すると、

$$E(z, t) = E^{(+)}(z, t) + E^{(-)}(z, t), \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} E^{(-)\dagger}(z, t) &= E^{(+)}(z, t) \\ &= i \sum_j \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{2\epsilon_0 n S L_c}} \hat{a}_j e^{i\omega_j(nz/c - t)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。ただし、 \hbar はプランク定数、 ϵ_0 は真空の誘電率、 S はビームの有効断面積、 c は真空中の光速度、 n は媒質の屈折率 ((4.57) で与える)、 L_c は共振器長である。各共振器モードは軸方向に均一であるから、演算子 \hat{a}_j は軸方向の空間依存性を持たない。

いま、 \hat{a}_j に空間依存性を許容するため、これを $\sqrt{L_c}$ で割って密度とし、 \sqrt{c} を乗じることによって、周回する光子束 (photon flux) の単位をつくり出す。さらに、連続周波数を扱うために j に関する和を積分で置き換えることにする。即ち、新しい演算子 $\hat{a}(z, \omega)$ を、

$$\frac{\hat{a}(z, \omega_j)}{\sqrt{2\pi}} d\omega_j \leftrightarrow \sqrt{c/L_c} \hat{a}_j, \quad (4.3)$$

によって表すことにする。これによって、光電場の正負の周波数成分は、それぞれ、

$$E_s^{(+)}(z, t) = i \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega'}{2\epsilon_0 S c n}} \frac{\hat{a}(z, \omega')}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega'(nz/c-t)} d\omega', \quad (4.4)$$

$$E_s^{(-)}(z, t) = -i \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega''}{2\epsilon_0 S c n}} \frac{\hat{a}^\dagger(z, \omega'')}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega''(nz/c-t)} d\omega'', \quad (4.5)$$

と書き表される。

ここで、(2.39) で定義される進行波モードの和との関係を考える。ある周波数 ω_0 の近傍についてのみ考え、平方根内の周波数依存性を無視すると、

$$\begin{aligned} E_s^{(+)}(z, t) &= i \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 S L c n}} \sum_j \tilde{b}_j e^{-i\omega_j(t-nz/c)} \\ &= i \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 S c n}} \hat{s}(z, t) \\ &\equiv i \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 S c n}} \frac{\hat{a}(z, t)}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega'(t-nz/c)} d\omega', \end{aligned} \quad (4.6)$$

が得られる。即ち、

$$\hat{s}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega' \hat{a}(z, \omega') e^{-i\omega'(t-nz/c)}, \quad (4.7)$$

であり、 $\hat{s}(z, t)$ と $\hat{a}(z, \omega)$ はフーリエ変換の関係にあることが分かる。

なお、演算子 $\hat{a}(z, \omega')$ と $\hat{a}^\dagger(z, \omega'')$ との間には、交換関係

$$[\hat{a}(z, \omega'), \hat{a}(z, \omega'')] = [\hat{a}^\dagger(z, \omega'), \hat{a}^\dagger(z, \omega'')] = 0, \quad (4.8)$$

$$[\hat{a}(z, \omega'), \hat{a}^\dagger(z, \omega'')] = \delta(\omega' - \omega''), \quad (4.9)$$

が成り立つ。

以下、本表示を用いて、共振器内の光電場および開放場（無限長を持つ共振器内の光電場）を表すことにする。

4.1.2 光子計数（直接検波）

光をフォトダイオードで直接検出するとき、光電流に現れる信号を考える。いま、共振器の自由スペクトル帯域 (Free Spectral Range: FSR) 程度の範囲内に議論を限定する。規格化定数中の周波数 ω は、この範囲内では中心周波数 ω_0 に置き換えてよいものとする。同様に、屈折率の周波数依存性も無視する。光電流は光パワー、即ち電場の二乗に比例するから、

$$I(t) \propto E_s^{(-)}(z, t) E_s^{(+)}(z, t) \propto \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\omega'' \hat{a}^\dagger(z, \omega') \hat{a}(z, \omega'') e^{i(\omega' - \omega'')(t-nz/c)}, \quad (4.10)$$

である。ここで、光電流のフーリエ変換を計算すると、

$$\begin{aligned}
I(\delta\omega) &\propto \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\delta\omega t} \int_0^{\infty} d\omega' \int_0^{\infty} d\omega'' \hat{a}^\dagger(z, \omega') \hat{a}(z, \omega'') e^{i(\omega' - \omega'')(t - nz/c)} \\
&= \int_0^{\infty} d\omega' \int_0^{\infty} d\omega'' \hat{a}^\dagger(z, \omega') \hat{a}(z, \omega'') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\delta\omega - \omega'' + \omega')t} e^{-inz(\omega' - \omega'')/c} \\
&= \int_0^{\infty} d\omega' \int_0^{\infty} d\omega'' \hat{a}^\dagger(z, \omega') \hat{a}(z, \omega'') 2\pi\delta(\delta\omega - \omega'' + \omega') e^{-inz(\omega' - \omega'')/c} \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} d\omega'' \hat{a}^\dagger(z, \omega'' - \delta\omega) \hat{a}(z, \omega'') e^{i\delta\omega n z/c}, \tag{4.11}
\end{aligned}$$

が得られる。

いま、検出する光信号が単一の周波数 ω_0 で励振されているものとするれば、周波数スペクトル (演算子) は

$$\hat{a}(z, \omega) = u\delta(\omega - \omega_0) + \Delta\hat{a}(z, \omega), \tag{4.12}$$

$$\hat{a}^\dagger(z, \omega) = u\delta(\omega - \omega_0) + \Delta\hat{a}^\dagger(z, \omega), \tag{4.13}$$

と書ける。これを用いて (4.11) を計算し、 Δ の 2 次以上の項を無視すると、

$$\begin{aligned}
I(\delta\omega) &\propto \int_0^{\infty} \left[u\delta(\omega'' - \delta\omega - \omega_0) + \Delta\hat{a}^\dagger(z, \omega'' - \delta\omega) \right] \\
&\quad \times \left[u\delta(\omega'' - \omega_0) + \Delta\hat{a}(z, \omega'') \right] e^{i\delta\omega n z/c} d\omega'' \\
&\simeq u^2\delta(\delta\omega) + u \left[\int_0^{\infty} d\omega'' \delta(\omega'' - \delta\omega - \omega_0) \Delta\hat{a}(z, \omega') \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} d\omega'' \Delta\hat{a}^\dagger(z, \omega'' - \delta\omega) \delta(\omega'' - \omega_0) \right] e^{i\delta\omega n z/c} \\
&= u^2\delta(\delta\omega) + u \left[\Delta\hat{a}(z, \omega_0 + \delta\omega) + \Delta\hat{a}^\dagger(z, \omega_0 - \delta\omega) \right] e^{i\delta\omega n z/c}, \tag{4.14}
\end{aligned}$$

が得られる。即ち、主成分 ω_0 近傍の演算子として

$$\Delta\tilde{a}(z, \delta\omega) = \Delta\hat{a}(z, \omega_0 + \delta\omega), \tag{4.15}$$

$$\Delta\tilde{a}^\dagger(z, \delta\omega) = \Delta\hat{a}^\dagger(z, \omega_0 + \delta\omega), \tag{4.16}$$

を定義すれば、

$$I(\delta\omega) \propto u^2\delta(\delta\omega) + u \left[\Delta\tilde{a}(z, \delta\omega) + \Delta\tilde{a}^\dagger(z, -\delta\omega) \right] e^{i\delta\omega n z/c}, \tag{4.17}$$

が得られる。

4.1.3 バランス型ホモダイン受信器

本節では、第2.4.2節で議論したバランス型ホモダイン受信器の特性を、本節で定義した表式に従って導き、観測される物理量を調べる。

まず局発光を、

$$E_{\text{LO}}(y, t) = E_{\text{LO}}^{(-)}(y, t) + E_{\text{LO}}^{(+)}(y, t), \quad (4.18)$$

と書いておく。ただし、

$$E_{\text{LO}}^{(+)}(y, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon S c n}} \int_0^\infty \frac{\hat{a}_{\text{LO}}(y, \omega)}{\sqrt{2\pi}} e^{i(ky - \omega t)} d\omega, \quad (4.19)$$

$$E_{\text{LO}}^{(-)}(y, t) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon S c n}} \int_0^\infty \frac{\hat{a}_{\text{LO}}^\dagger(y, \omega)}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(ky - \omega t)} d\omega, \quad (4.20)$$

とした。このとき、図2.5の二つのフォトダイオードから得られる光電流は、それぞれ

$$I_1(t) \propto \left\{ \frac{E_s^{(-)}(z_0, t) + E_{\text{LO}}^{(-)}(y_0, t)}{\sqrt{2}} \right\} \left\{ \frac{E_s^{(+)}(z_0, t) + E_{\text{LO}}^{(+)}(y_0, t)}{\sqrt{2}} \right\}, \quad (4.21)$$

$$I_2(t) \propto \left\{ \frac{E_s^{(-)}(z_0, t) - E_{\text{LO}}^{(-)}(y_0, t)}{\sqrt{2}} \right\} \left\{ \frac{E_s^{(+)}(z_0, t) - E_{\text{LO}}^{(+)}(y_0, t)}{\sqrt{2}} \right\}, \quad (4.22)$$

と書くことができる。ただし、 z_0, y_0 は、信号光、局発光それぞれの座標上のハーフミラーの位置を表す。これより、差動増幅器出力は

$$\begin{aligned} I(t) &= I_1(t) - I_2(t) \\ &\propto E_{\text{LO}}^{(-)}(y_0, t) E_s^{(+)}(z_0, t) + E_s^{(-)}(z_0, t) E_{\text{LO}}^{(+)}(y_0, t) \\ &\propto \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\omega'' \hat{a}_{\text{LO}}^\dagger(y_0, \omega') \hat{a}_s(z_0, \omega'') e^{in(\omega'' z_0 - \omega' y_0)/c + i(\omega' - \omega'')t} \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\omega'' \hat{a}_s^\dagger(z_0, \omega'') \hat{a}_{\text{LO}}(y_0, \omega') e^{-in(\omega'' z_0 - \omega' y_0)/c - i(\omega' - \omega'')t}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

と書かれる。即ち、局発光と信号光とのビート成分のみが観測され、局発光とその周囲の真空成分とのビートは、信号からキャンセルされてしまうことが分かる。

さて、局発光が単一の周波数でのみ励振されており、

$$\hat{a}_{\text{LO}}(y_0, \omega) = v\delta(\omega - \omega_0) + \Delta\hat{a}_{\text{LO}}(y_0, \omega), \quad (4.24)$$

$$\hat{a}_{\text{LO}}^\dagger(y_0, \omega) = v\delta(\omega - \omega_0) + \Delta\hat{a}_{\text{LO}}^\dagger(y_0, \omega), \quad (4.25)$$

と書かれるものとする。このとき、(4.23)のビート成分で、 Δ の2次の以上の項を無視する。いま、

$$\phi = n\omega_0(z_0 - y_0)/c, \quad (4.26)$$

とおき、

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\text{LO}}^\dagger(y_0, \omega') \hat{a}_s(z_0, \omega'') &\simeq uv\delta(\omega' - \omega_0)\delta(\omega'' - \omega_0) \\ &\quad + u\Delta\hat{a}_{\text{LO}}^\dagger(y_0, \omega')\delta(\omega'' - \omega_0) + v\Delta\hat{a}_s(z_0, \omega'')\delta(\omega' - \omega_0),\end{aligned}\quad (4.27)$$

および

$$\begin{aligned}\hat{a}_s^\dagger(z_0, \omega'') \hat{a}_{\text{LO}}(y_0, \omega') &\simeq uv\delta(\omega' - \omega_0)\delta(\omega'' - \omega_0), \\ &\quad + u\Delta\hat{a}_s^\dagger(z_0, \omega'')\delta(\omega' - \omega_0) + v\Delta\hat{a}_{\text{LO}}(y_0, \omega')\delta(\omega'' - \omega_0)\end{aligned}\quad (4.28)$$

を (4.23) に用いれば、ホモダイン検波出力は

$$\begin{aligned}I(t) &\propto uv(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega' e^{i(\omega' - \omega_0)t} u\Delta\hat{a}_{\text{LO}}^\dagger(y_0, \omega') e^{in(\omega_0 z_0 - \omega' y_0)/c} \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega'' e^{i(\omega_0 - \omega'')t} v\Delta\hat{a}_s(z_0, \omega'') e^{in(\omega'' z_0 - \omega_0 y_0)/c} \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega' e^{i(\omega_0 - \omega')t} u\Delta\hat{a}_{\text{LO}}(y_0, \omega') e^{-in(\omega_0 z_0 - \omega' y_0)/c} \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega'' e^{i(\omega'' - \omega_0)t} v\Delta\hat{a}_s^\dagger(z_0, \omega'') e^{-in(\omega'' z_0 - \omega_0 y_0)/c},\end{aligned}\quad (4.29)$$

と書ける。これをフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned}I(\delta\omega) &\propto 2uv \cos \phi \int_{-\infty}^\infty e^{i\delta\omega t} dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^\infty e^{i\delta\omega t} dt \left[\int_0^\infty d\omega' e^{i(\omega' - \omega_0)t} u\Delta\hat{a}_{\text{LO}}^\dagger(y_0, \omega') e^{in(\omega_0 z_0 - \omega' y_0)/c} \right. \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega'' e^{i(\omega_0 - \omega'')t} v\Delta\hat{a}_s(z_0, \omega'') e^{in(\omega'' z_0 - \omega_0 y_0)/c} \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega' e^{i(\omega_0 - \omega')t} u\Delta\hat{a}_{\text{LO}}(y_0, \omega') e^{-in(\omega_0 z_0 - \omega' y_0)/c} \\ &\quad \left. + \int_0^\infty d\omega'' e^{i(\omega'' - \omega_0)t} v\Delta\hat{a}_s^\dagger(z_0, \omega'') e^{-in(\omega'' z_0 - \omega_0 y_0)/c} \right] \\ &= 4\pi uv \cos \phi \delta(\delta\omega) \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega' u\Delta\hat{a}_{\text{LO}}^\dagger(y_0, \omega') 2\pi\delta(\delta\omega + \omega' - \omega_0) e^{in(\omega_0 z_0 - \omega' y_0)/c} \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega'' v\Delta\hat{a}_s(z_0, \omega'') 2\pi\delta(\delta\omega + \omega_0 - \omega'') e^{in(\omega'' z_0 - \omega_0 y_0)/c} \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega' u\Delta\hat{a}_{\text{LO}}(y_0, \omega') 2\pi\delta(\delta\omega + \omega_0 - \omega') e^{-in(\omega_0 z_0 - \omega' y_0)/c} \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega'' v\Delta\hat{a}_s^\dagger(z_0, \omega'') 2\pi\delta(\delta\omega + \omega'' - \omega_0) e^{-in(\omega'' z_0 - \omega_0 y_0)/c} \\ &= 4\pi uv \cos \phi \delta(\delta\omega)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\pi u \left\{ \Delta \hat{a}_{\text{LO}}^\dagger(y_0, \omega_0 - \delta\omega) e^{-i\phi} + \Delta \hat{a}_{\text{LO}}(y_0, \omega_0 + \delta\omega) e^{i\phi} \right\} e^{i\delta\omega n y_0 / c} \\
& +2\pi v \left\{ \Delta \hat{a}_s(z_0, \omega_0 + \delta\omega) e^{-i\phi} + \Delta \hat{a}_s^\dagger(z_0, \omega_0 - \delta\omega) e^{i\phi} \right\} e^{i\delta\omega n z_0 / c}, \quad (4.30)
\end{aligned}$$

となる。これを、中心周波数近傍の演算子 (4.15) (4.16) および、同様に定義された局発光の演算子を用いて書き直せば、

$$\begin{aligned}
I(\omega) & \propto 4\pi uv \cos \phi \delta(\delta\omega) \\
& +2\pi u \left\{ \Delta \tilde{a}_{\text{LO}}^\dagger(y_0, -\delta\omega) e^{-i\phi} + \Delta \tilde{a}_{\text{LO}}(y_0, \delta\omega) e^{i\phi} \right\} e^{i\delta\omega n y_0 / c} \\
& +2\pi v \left\{ \Delta \tilde{a}_s^\dagger(z_0, \delta\omega) e^{-i\phi} + \Delta \tilde{a}_s(z_0, -\delta\omega) e^{i\phi} \right\} e^{i\delta\omega n z_0 / c}, \quad (4.31)
\end{aligned}$$

となるが、ここで $u \ll v$ とすれば、局発ポートから混入する真空揺らぎと信号光とのビート雑音は、信号に付随する雑音と局発光とのビートに比べてきわめて小さくすることができる。即ち、

$$I(\delta\omega) \propto uv \cos \phi \delta(\delta\omega) + v \frac{\Delta \tilde{a}_s(z_0, \delta\omega) e^{-i\phi} + \Delta \tilde{a}_s^\dagger(z_0, -\delta\omega) e^{i\phi}}{2} e^{i\delta\omega n z_0 / c}, \quad (4.32)$$

が得られる。特に、 $\phi = 0$ のとき、

$$I(\delta\omega)|_{\phi=0} \propto v \left\{ u\delta(\delta\omega) + \frac{\Delta \tilde{a}_s(z_0, \delta\omega) + \Delta \tilde{a}_s^\dagger(z_0, -\delta\omega)}{2} e^{i\delta\omega n z_0 / c} \right\}, \quad (4.33)$$

であり、これは信号光の主成分に同期させた時の検波出力である。また、 $\phi = \pi/2$ のとき、

$$I(\delta\omega)|_{\phi=\pi/2} \propto v \frac{\Delta \tilde{a}_s(z_0, \delta\omega) - \Delta \tilde{a}_s^\dagger(z_0, -\delta\omega)}{2i} e^{i\delta\omega n z_0 / c}, \quad (4.34)$$

となり、これは主成分と直交する成分の検波出力である。

4.2 自己無撞着法による揺らぎの算出法

図 4.1 に、自己無撞着法による解析の模式図を示す。図中の閉じた矢印は、共振器中の光電場の流れを表すものとする。いま、参照点を出発した共振器場が、考慮している作用(要素 1...n)を順に受け、一周して元の参照点に戻った時に、どのように変化していたかを計算する。本解析では、共振器場はフーリエ変換で表されているから、自己無撞着のための条件は、周回前後の各周波数成分が等しいことである。

上で述べた作用は、線型であっても非線型であっても構わないが、特に線型の場合には線型応答理論を用いることができる。すなわち、各作用の伝達函数が求められれば、全作用の影響は伝達函数の単純な積で決定される。また、作用が非線形であっても、ある動作点の

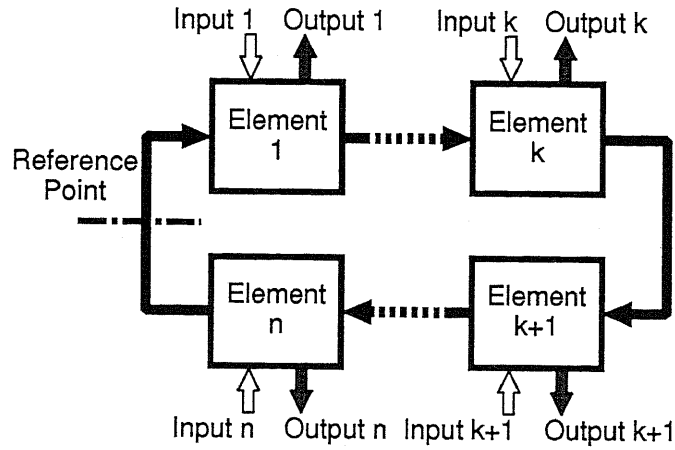


図 4.1: 自己無撞着法の模式図

周りの微小変化のみが問題となる場合は、この変化分を線型化することによって、同様の理論を用いることが可能である。

共振器場の表式が求められれば、これに従って、各作用の結果、即ち出力の表式が求められる。

具体的には、次のようになる: i 番目の作用を行列 M_i で表すものとし、 i 番目の作用後の共振器場の変数ベクトルを u_i とする。このとき、

$$u_i = M_i u_{i-1} + N_i r_{ini}, \quad (4.35)$$

と表すことができる。ただし、 r_{ini} を、作用と共に外部から与えられる擾乱とし、これに伴って外部に出力として取り出される分を

$$r_{outi} = X_i r_{ini} + Y_i u_{i-1}, \quad (4.36)$$

によって表す。参照点における変数ベクトルを u_0 とおくと、 n 番目の作用後の変数ベクトルは

$$\begin{aligned} u_n = & M_n M_{n-1} \cdots M_1 u_0 \\ & + M_n M_{n-1} \cdots M_2 N_1 r_1 \\ & + M_n M_{n-1} \cdots M_3 N_2 r_2 \\ & \cdots \\ & + M_n N_{n-1} r_{n-1} \\ & + N_n r_n, \end{aligned} \quad (4.37)$$

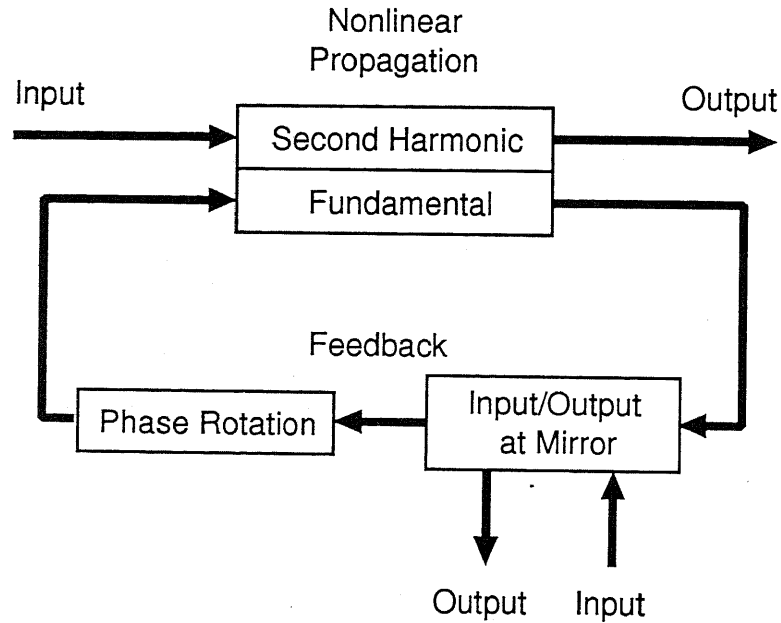


図 4.2: 自己無撞着法による基本波閉じ込め型第二高調波発生システムの解析

で表される。これが u_0 に等しいことから、参照点における変数ベクトルが

$$\begin{aligned}
 u_0 = & Q^{-1}M_nM_{n-1}\cdots M_2N_1r_1 \\
 & +Q^{-1}M_nM_{n-1}\cdots M_3N_2r_2 \\
 & \cdots \\
 & +Q^{-1}M_nN_{n-1}r_{n-1} \\
 & +Q^{-1}N_n r_n,
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$Q = I - M_nM_{n-1}\cdots M_1, \tag{4.39}$$

と求められる。ただし、 I は単位行列である。これを用いて (4.35) を必要回数繰り返せば、任意の出力 r_{outi} を (4.36) から求めることができる。

基本波閉じ込め型第二高調波発生の場合には、図 4.2 に示すような手順で解析する。まず、結晶の入射端に参照点を設定し、一周回中の基本波の発展を計算する。これには、結晶を通過することによる非線型作用、入力ミラーにおける入出力、それと、一周に要する間に生じた位相回転の、計 3 種の要素が含まれる。このうち、非線型作用については、定常点と線型揺らぎに分離して考え、それぞれが自己無撞着となるようにする。以上によって得られた結晶入力端の場を用いて、第二高調波出力と基本波出力を計算する。

第 4.3 節—第 4.6 節では、これを具体化する。

4.3 第二高調波発生過程の進行波解析

本節では、空間依存性を含む場の演算子が、結晶内でどのように発展するかを述べ、基本波閉じ込め型システムの解析に備える。

一般に、結晶の分極は、これを励振する光の場の履歴によって定まる。すなわち、線型分極の場合は、

$$\begin{aligned} P_i^{(L)}(z, t) &= \int_{-\infty}^t d\tau \chi_{ij}^{(1)}(t - \tau) E_j(z, \tau) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega t} \chi_{ij}^{(1)}(\omega) E_j(z, \omega), \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\chi_{ij}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t dt \chi_{ij}^{(1)}(t) e^{i\omega t}, \quad (4.41)$$

また、非線型分極の場合は、

$$P_i^{(NL)}(z, t) = \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \chi_{ijk}^{(2)}(t - t_1, t - t_2) E_j(z, t_1) E_k(z, t_2), \quad (4.42)$$

と書くことができる。いま、(4.4), (4.5) で、

$$A_i(z, \omega') = i \sqrt{\frac{\hbar \omega'}{2\epsilon_0 S c n_i}} \hat{a}_i(z, \omega') e^{i\omega' n_i z/c}, \quad (4.43)$$

$$A_i(z, \omega')^\dagger = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega'}{2\epsilon_0 S c n_i}} \hat{a}_i^\dagger(z, \omega') e^{-i\omega' n_i z/c}, \quad (4.44)$$

$$(4.45)$$

とおくと、 $P_i^{(NL)}(z, t)$ のフーリエ変換は、

$$\begin{aligned} P_i^{(NL)}(z, \omega) &= \int_0^\infty d\omega' \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega', -\omega - \omega') A_j^\dagger(z, \omega') A_k^\dagger(z, -\omega - \omega') \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega' \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega', \omega + \omega') A_j^\dagger(z, \omega') A_k(z, \omega + \omega') \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega' \chi_{ijk}^{(2)}(\omega', \omega - \omega') A_j(z, \omega') A_k^\dagger(z, \omega - \omega') \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega' \chi_{ijk}^{(2)}(\omega', \omega - \omega') A_j(z, \omega') A_k(z, \omega - \omega'), \end{aligned} \quad (4.46)$$

と書くことができる。ただし、

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega', \omega'') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \chi_{ijk}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) e^{i(\omega' \tau_1 + \omega'' \tau_2)} = \frac{d_{\text{eff}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.47)$$

とした。

いま、

$$A_1(z, \omega') = i \sqrt{\frac{\hbar \omega'}{2\epsilon_0 S c n_1}} \hat{a}(z, \omega') e^{i\omega' n_1 z/c}, \quad (4.48)$$

$$A_2(z, \omega') = i \sqrt{\frac{\hbar \omega'}{2\epsilon_0 S c n_2}} \hat{r}(z, \omega') e^{i\omega' n_2 z/c}, \quad (4.49)$$

とにおいて、それぞれ、基本波付近、第二高調波付近の光の場を表すものとする。非線型分極の周波数が $2\omega_0$ の近傍の成分では、 $\omega_0 + \omega_0$ の項が支配的となるから、

$$P_2^{(\text{NL})}(z, \omega) = \int_{[\omega_0]} d\omega' \chi_{211}^{(2)}(\omega', \omega - \omega') A_1(z, \omega') A_1(z, \omega - \omega'), \quad (4.50)$$

である。ここで、積分範囲 $[\omega_0]$ は、 ω_0 の近傍に渡ってとることを意味する。一方、 ω_0 の近傍では、 $2\omega_0 - \omega_0$ の項が支配的となるから、

$$P_1^{(\text{NL})}(z, \omega) = \int_{[\omega_0]} d\omega' \chi_{112}^{(2)}(-\omega', \omega + \omega') A_1^\dagger(z, \omega') A_2(z, \omega + \omega') \\ + \int_{[2\omega_0]} d\omega'' \chi_{121}^{(2)}(\omega'', \omega - \omega'') A_2(z, \omega'') A_1^\dagger(z, \omega'' - \omega), \quad (4.51)$$

と書ける。ここで第2項の $\omega'' = \omega + \omega'$ とおくと、Kleinmann's conjecture より、

$$P_1^{(\text{NL})}(z, \omega) = \int_{[\omega_0]} d\omega' \chi_{112}^{(2)}(-\omega', \omega + \omega') A_1^\dagger(z, \omega') A_2(z, \omega + \omega') \\ + \int_{[\omega_0]} d\omega' \chi_{112}^{(2)}(-\omega', \omega + \omega') A_2(z, \omega + \omega') A_1^\dagger(z, \omega') \\ = 2 \int_{[\omega_0]} d\omega' \chi_{112}^{(2)}(-\omega', \omega + \omega') A_2(z, \omega + \omega') A_1^\dagger(z, \omega'), \quad (4.52)$$

が得られる。いま、非線型感受率は考えている周波数域で大きく変化しないものと仮定し、積分の外に出す。すると、

$$P_1^{(\text{NL})}(z, \omega) = 2\chi^{(2)} \int_{[\omega_0]} d\omega' A_1^\dagger(z, \omega') A_2(z, \omega + \omega'), \quad (\omega \sim \omega_0), \quad (4.53)$$

$$P_2^{(\text{NL})}(z, \omega) = \chi^{(2)} \int_{[\omega_0]} A_1(z, \omega') A_1(z, \omega - \omega'), \quad (\omega \sim 2\omega_0), \quad (4.54)$$

を得る。ただし、非線型感受率 $\chi^{(2)}$ の添字 (112) は省略した。

ここで1次元の波動方程式

$$-\frac{\partial^2 E_i(z, t)}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i(z, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_i(z, t)}{\partial t^2}, \quad (4.55)$$

にフーリエ変換 (4.4), (4.5) を用いると、

$$\frac{d^2 A_i(z, \omega)}{dz^2} + \frac{n_i^2 \omega^2}{c^2} A_i(z, \omega) = -\frac{\omega^2}{c^2} P_i^{(\text{NL})}(\omega), \quad (4.56)$$

が得られる。ただし、

$$n_i = \sqrt{1 + \chi_{ii}^{(1)}}, \quad (4.57)$$

である。ここで、(4.56) に (4.48), (4.49) を代入し、位相の変化に比べて包絡線の変化が小さいと仮定する。即ち、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_i(z, \omega)}{dz^2} &= i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 S n_i c}} \left\{ \frac{d^2 \hat{a}_i(z, \omega)}{dz^2} + 2i \frac{n_i \omega}{c} \frac{d\hat{a}_i(z, \omega)}{dz} - \left(\frac{n_i \omega}{c}\right)^2 \hat{a}_i(z, \omega) \right\} e^{i\omega n_i z/c} \\ &\simeq i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 S n_i c}} \left\{ 2i \frac{n_i \omega}{c} \frac{d\hat{a}_i(z, \omega)}{dz} - \left(\frac{n_i \omega}{c}\right)^2 \hat{a}_i(z, \omega) \right\} e^{i\omega n_i z/c}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

とする。これより、伝播方程式として、

$$\sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 S n_i c}} \frac{d\hat{a}_i(z, \omega)}{dz} = \frac{\omega}{2n_i c} P_i^{(NL)}(\omega) e^{-i\omega n_i z/c}, \quad (4.59)$$

が得られる。ここで、 $\hat{a}(z, \omega)$ を基本波付近の演算子を表すものとし、第二高調波付近の演算子は特に \hat{r} で表すことにする。また、(4.48), (4.49) 中の係数に含まれる周波数 ω' を、あまり変化しないものとして中心周波数 ω_0 または $2\omega_0$ で置き換える。すると、光の場の発展方程式は

$$\frac{d\hat{a}(z, \omega)}{dz} = -\kappa \int_{[\omega_0]} d\omega' \hat{a}^\dagger(z, \omega) \hat{r}(z, \omega + \omega') e^{i\Delta k z}, \quad (4.60)$$

$$\frac{d\hat{r}(z, \omega)}{dz} = \frac{\kappa}{2} \int_{[\omega_0]} d\omega' \hat{a}(z, \omega') \hat{a}(z, \omega - \omega') e^{-i\Delta k z}, \quad (4.61)$$

となる。ただし、

$$\kappa = \frac{\omega_0 \chi^{(2)}}{n_i c} \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{\epsilon_0 S n_2 c}} = \frac{\omega_0 d_{\text{eff}}}{n_i c} \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega_0}{\epsilon_0 S n_2 c}}, \quad (4.62)$$

$$\Delta k \simeq \frac{2\omega_0}{c} (n_2 - n_1), \quad (4.63)$$

である。

簡単のため、位相整合条件は満たされているものとし、(4.63)=0 とおく。いま、基本波が単一の周波数で励振されており、これによって発生する第二高調波もやはり単一周波数になるものと仮定する。また、結晶の物理的運動は全て断熱排除でき、結晶へのエネルギーの移行は無いものとする。このとき、

$$\hat{a}(z) = u'(z) \delta(\omega - \omega_0) + \Delta \hat{a}(z, \omega), \quad (4.64)$$

$$\hat{r}(z) = v'(z) \delta(\omega - 2\omega_0) + \Delta \hat{r}(z, \omega), \quad (4.65)$$

と書く。式(4.64), (4.65)を(4.60), (4.61)に代入し、 Δ の一次の項だけを残す。すると、

$$\frac{du'}{dz}\delta(\omega - \omega_0) + \frac{d\Delta\hat{a}(z, \omega)}{dz} = -\kappa[u'^*(z)v'(z)\delta(\omega - \omega_0) + u'^*(z)\Delta\hat{r}(z, \omega + \omega_0) + v'(z)\Delta\hat{a}^\dagger(z, 2\omega_0 - \omega)], \quad (4.66)$$

$$\frac{dv'}{dz}\delta(\omega - 2\omega_0) + \frac{d\Delta\hat{r}(z, \omega)}{dz} = \frac{\kappa}{2}[u'^2(z)\delta(\omega - \omega_0) + 2u'(z)\Delta\hat{a}(z, \omega - \omega_0)], \quad (4.67)$$

となる。これらの Δ に関する0次および1次の項同士を比較する。

平均の運動 まず0次の項は、

$$\frac{du'(z)}{dz} = -\kappa u'^*(z)v'(z) \quad (4.68)$$

$$\frac{dv'(z)}{dz} = \frac{\kappa}{2}u'^2(z), \quad (4.69)$$

で表される。この方程式は解析解を持つ。[41] いま、

$$u'(z) = u(z)e^{i\phi_a}, \quad (4.70)$$

$$v'(z) = v(z)e^{i\phi_r}, \quad (4.71)$$

とおくと、

$$\frac{du}{dz} + iu\frac{d\phi_a}{dz} = -\kappa uv e^{i(\phi_r - 2\phi_a)}, \quad (4.72)$$

$$\frac{dv}{dz} + iv\frac{d\phi_r}{dz} = \frac{\kappa}{2}u^2 e^{i(2\phi_a - \phi_r)}, \quad (4.73)$$

ここで実虚部を分離すると、

$$u\frac{d\phi_a}{dz} = -\kappa uv \sin(\phi_r - 2\phi_a), \quad (4.74)$$

$$v\frac{d\phi_r}{dz} = \frac{\kappa}{2}u^2 \sin(2\phi_a - \phi_r), \quad (4.75)$$

$$\frac{du}{dz} = -\kappa uv \cos(\phi_r - 2\phi_a), \quad (4.76)$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\kappa}{2}u^2 \cos(\phi_r - 2\phi_a), \quad (4.77)$$

を得る。このうち、位相角に関する成分を取りだし、 $\theta = 2\phi_a - \phi_r$ とおけば、

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \frac{d}{dz} \ln uv, \quad (4.78)$$

を得る。これより直ちに、

$$uv \sin\theta = \text{const.}, \quad (4.79)$$

となる。第二高調波発生では $v(0)=0$ であるから、常に $\theta = 0$ である。これを (4.76), (4.77) に用いれば、

$$\frac{du}{dz} = -\kappa uv, \quad (4.80)$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\kappa}{2} u^2, \quad (4.81)$$

なる包絡線の発展方程式を得る。ここで (4.80) $\times v + 2 \times (4.81) \times u$ を作ると、

$$u \frac{du}{dz} + 2v \frac{dv}{dz} = 0, \quad (4.82)$$

即ち、

$$u^2 + 2v^2 = u_0^2, \quad (4.83)$$

を得る。ただし、 $u_0 = u(0)$ とした。(Manley-Rowe) これを (4.81) に再度用いれば、

$$\frac{dv}{dz} = -\kappa \left(v^2 - \frac{u_0^2}{2} \right), \quad (4.84)$$

なる微分方程式が導かれる。これは変数分離によって簡単に解くことができ、

$$v = \frac{u_0}{\sqrt{2}} \tanh \frac{\kappa u_0}{\sqrt{2}} z, \quad (4.85)$$

なる解が得られる。基本波の包絡線は、(4.85) を (4.80) に代入して得られた $u > 0$ の解

$$u = \frac{u_0}{\cosh \frac{\kappa u_0}{\sqrt{2}} z}, \quad (4.86)$$

として求められる。

揺らぎの発展 式 (4.66) と (4.67) の Δ に関する 1 次項の発展を調べる。

$$\frac{d\Delta\hat{a}(z, \omega)}{dz} = -\kappa v(z) e^{i\phi_r} \Delta\hat{a}^\dagger(z, 2\omega_0 - \omega) - \kappa u(z) e^{-i\phi_a} \Delta\hat{r}(z, \omega + \omega_0), \quad (4.87)$$

$$\frac{d\Delta\hat{r}(z, \omega)}{dz} = \kappa u(z) e^{i\phi_a} \Delta\hat{a}(z, \omega - \omega_0), \quad (4.88)$$

であるが、ここで、パラメータの並びを少し簡略化するため、

$$\Delta\tilde{a}(z, \delta\omega) = \Delta\hat{a}(z, \omega_0 + \delta\omega), \quad (4.89)$$

$$\Delta\tilde{r}(z, \delta\omega) = \Delta\hat{r}(z, 2\omega_0 + \delta\omega), \quad (4.90)$$

と書くことにすれば、

$$\frac{d\Delta\bar{a}}{dz}(z, \delta\omega) = -\kappa u(z)e^{-i\phi_a}\Delta\bar{r}(z, \delta\omega) - \kappa v(z)e^{i\phi_r}\Delta\bar{a}^\dagger(z, -\delta\omega), \quad (4.91)$$

$$\frac{d\Delta\bar{r}}{dz}(z, \delta\omega) = \kappa u(z)e^{i\phi_a}\Delta\bar{a}(z, \delta\omega), \quad (4.92)$$

となる。同様にして、

$$\frac{d\Delta\bar{a}^\dagger}{dz}(z, -\delta\omega) = -\kappa u(z)e^{i\phi_a}\Delta\bar{r}^\dagger(z, -\delta\omega) - \kappa v(z)e^{-i\phi_r}\Delta\bar{a}(z, \delta\omega), \quad (4.93)$$

$$\frac{d\Delta\bar{r}^\dagger}{dz}(z, -\delta\omega) = \kappa u(z)e^{-i\phi_a}\Delta\bar{a}^\dagger(z, -\delta\omega), \quad (4.94)$$

が得られる。

いま、

$$\Delta\bar{a}_1(z, \delta\omega) = \frac{\Delta\bar{a}(z, \delta\omega)e^{-i\phi_a} + \Delta\bar{a}^\dagger(z, -\delta\omega)e^{i\phi_a}}{2}, \quad (4.95)$$

$$\Delta\bar{a}_2(z, \delta\omega) = \frac{\Delta\bar{a}(z, \delta\omega)e^{-i\phi_a} - \Delta\bar{a}^\dagger(z, -\delta\omega)e^{i\phi_a}}{2i}, \quad (4.96)$$

$$\Delta\bar{r}_1(z, \delta\omega) = \frac{\Delta\bar{r}(z, \delta\omega)e^{-i\phi_r} + \Delta\bar{r}^\dagger(z, -\delta\omega)e^{i\phi_r}}{2}, \quad (4.97)$$

$$\Delta\bar{r}_2(z, \delta\omega) = \frac{\Delta\bar{r}(z, \delta\omega)e^{-i\phi_r} - \Delta\bar{r}^\dagger(z, -\delta\omega)e^{i\phi_r}}{2i}, \quad (4.98)$$

によって変数変換を行う。これらは、第4.1節で導いた通り、ホモダイン検出で観測できる量である。特に、第2、第4式で $\phi_a = \phi_r = 0$ としたものは光子数揺らぎに比例する量でもある。

ところで、これらに関する発展方程式は、

$$\frac{d\Delta\bar{a}_1}{dz}(z, \delta\omega) = -\kappa v(z)\Delta\bar{a}_1(z, \delta\omega) - \kappa u(z)\Delta r_1(z, \delta\omega), \quad (4.99)$$

$$\frac{d\Delta\bar{a}_2}{dz}(z, \delta\omega) = \kappa v(z)\Delta\bar{a}_2(z, \delta\omega) - \kappa u(z)\Delta r_2(z, \delta\omega), \quad (4.100)$$

$$\frac{d\Delta\bar{r}_1}{dz}(z, \delta\omega) = \kappa u(z)\Delta\bar{a}_1(z, \delta\omega), \quad (4.101)$$

$$\frac{d\Delta\bar{r}_2}{dz}(z, \delta\omega) = \kappa u(z)\Delta\bar{a}_2(z, \delta\omega), \quad (4.102)$$

と書くことができる。

ここで、一回通過時の無次元結合距離として

$$\xi = \kappa u_0 z / \sqrt{2}, \quad (4.103)$$

を導入し、

$$\Delta x_i(\xi, \delta\omega) = \Delta \bar{x}_i(z, \delta\omega), \quad (x = a, r; i = 1, 2), \quad (4.104)$$

と書く。すると、揺らぎの演算子は

$$\frac{d\Delta a_1}{d\xi}(\xi, \delta\omega) = -\tanh \xi \Delta a_1(\xi, \delta\omega) - \frac{\sqrt{2}}{\cosh \xi} \Delta r_1(\xi, \delta\omega), \quad (4.105)$$

$$\frac{d\Delta r_1}{d\xi}(\xi, \delta\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\cosh \xi} \Delta a_1(\xi, \delta\omega), \quad (4.106)$$

$$\frac{d\Delta a_2}{d\xi}(\xi, \delta\omega) = \tanh \xi \Delta a_2(\xi, \delta\omega) - \frac{\sqrt{2}}{\cosh \xi} \Delta r_2(\xi, \delta\omega), \quad (4.107)$$

$$\frac{d\Delta r_2}{d\xi}(\xi, \delta\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\cosh \xi} \Delta a_2(\xi, \delta\omega), \quad (4.108)$$

なる方程式に従うことが分かる。これらから明らかなように、位相整合が満たされている場合には、ベクトル $\tau(\Delta a_1(\xi, \delta\omega), \Delta r_1(\xi, \delta\omega))$ と $\tau(\Delta a_2(\xi, \delta\omega), \Delta r_2(\xi, \delta\omega))$ の運動は完全に分離することができる。

そこで、まず $\tau(\Delta a_1(\xi, \delta\omega), \Delta r_1(\xi, \delta\omega))$ について考える。方程式 (4.105)–(4.106) は、函数係数の線型斉次方程式であるから、その解は初期値の線型結合で表されるはずである。そこで、

$$\Delta a_1(\xi, \delta\omega) = f_{11}(\xi) \Delta a_1(0, \delta\omega) + f_{12}(\xi) \Delta r_1(0, \delta\omega), \quad (4.109)$$

$$\Delta r_1(\xi, \delta\omega) = f_{21}(\xi) \Delta a_1(0, \delta\omega) + f_{22}(\xi) \Delta r_1(0, \delta\omega), \quad (4.110)$$

とおき、各係数を初期条件

$$f_{11}(0) = f_{22}(0) = 1, \quad (4.111)$$

$$f_{21}(0) = f_{12}(0) = 0, \quad (4.112)$$

の下で解くことにする。各係数の満たすべき運動方程式は、

$$\frac{df_{11}}{d\xi} = -\tanh \xi f_{11} - \frac{\sqrt{2}}{\cosh \xi} f_{21}, \quad (4.113)$$

$$\frac{df_{12}}{d\xi} = -\tanh \xi f_{12} - \frac{\sqrt{2}}{\cosh \xi} f_{22}, \quad (4.114)$$

$$\frac{df_{21}}{d\xi} = \frac{\sqrt{2}}{\cosh \xi} f_{11}, \quad (4.115)$$

$$\frac{df_{22}}{d\xi} = \frac{\sqrt{2}}{\cosh \xi} f_{12}, \quad (4.116)$$

である。上の式から明らかなように、式 (4.113), (4.115) の組と、式 (4.114), (4.116) の組は独立であり、しかも全く同一の発展方程式を持つ。そこで、まず式 (4.113), (4.115) の組の一般解を求め、それを式 (4.114), (4.116) の組に適用する。

いま、

$$f_{11} = \frac{g_{11}}{\cosh \xi}, \quad (4.117)$$

とおく。すると、

$$\frac{df_{11}}{d\xi} = \frac{1}{\cosh \xi} \frac{dg_{11}}{d\xi} - \frac{\sinh \xi}{\cosh^2 \xi} g_{11}, \quad (4.118)$$

であるから、(4.113) に用いて、

$$\frac{dg_{11}}{d\xi} = -\sqrt{2} f_{21}, \quad (4.119)$$

を得る。同様に、

$$\frac{df_{21}}{d\xi} = \frac{\sqrt{2}}{\cosh^2 \xi} g_{11}, \quad (4.120)$$

である。

ここで更に

$$g_{11} = x \tanh \xi, \quad (4.121)$$

とおく。(4.119) の両辺を一回微分し、(4.120) に代入すれば、

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} \tanh \xi = -\frac{2}{\cosh^2 \xi} \frac{dx}{d\xi}, \quad (4.122)$$

を得る。すると $dx/d\xi = y$ は変数分離によって、

$$\frac{dy}{y} = -2 \frac{d(\tanh \xi)}{\tanh \xi}, \quad (4.123)$$

と書くことができ、容易に

$$y = \frac{c_1}{\tanh^2 \xi} \quad (c_1: \text{const.}), \quad (4.124)$$

となることが分かる。即ち、

$$x = \int \frac{c_1}{\tanh^2 \xi} d\xi \quad (4.125)$$

$$= c_1 \left(\xi - \frac{1}{\tanh \xi} \right) + c_2 \quad (c_2: \text{const.}), \quad (4.126)$$

である。これを (4.121) に代入すれば、

$$g_{11} = c_1 (\xi \tanh \xi - 1) + c_2 \tanh \xi, \quad (4.127)$$

更に、(4.117), (4.119) に用いれば、

$$f_{11} = \{c_1 (\xi \tanh \xi - 1) + c_2 \tanh \xi\} / \cosh \xi, \quad (4.128)$$

$$f_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ c_1 \left(\tanh \xi + \frac{\xi}{\cosh^2 \xi} \right) + \frac{c_2}{\cosh^2 \xi} \right\}, \quad (4.129)$$

なる一般解が導かれる。

ここで、初期条件

$$1 = f_{11}(0) = -c_1, \quad (4.130)$$

$$0 = f_{21}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}c_2, \quad (4.131)$$

を使えば、

$$f_{11} = \frac{1 - \xi \tanh \xi}{\cosh \xi}, \quad (4.132)$$

$$f_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\xi}{\cosh \xi} + \tanh \xi \right), \quad (4.133)$$

を得ることができる。

先に述べたように、一般解 (4.128), (4.129) は、式 (4.114), (4.116) の一般解でもある。そこで、初期条件として、

$$0 = f_{12}(0) = -c_1, \quad (4.134)$$

$$1 = f_{22}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}c_2, \quad (4.135)$$

を用いて、残りの係数を

$$f_{12} = -\sqrt{2} \frac{\tanh \xi}{\cosh \xi}, \quad (4.136)$$

$$f_{22} = \frac{1}{\cosh^2 \xi}, \quad (4.137)$$

と求めることができる。

以上をまとめて、結晶中での揺らぎの発展として、

$$\begin{pmatrix} \Delta a_1(\xi, \delta\omega) \\ \Delta r_1(\xi, \delta\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \xi \tanh \xi}{\cosh \xi} & -\sqrt{2} \frac{\tanh \xi}{\cosh \xi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tanh \xi + \frac{\xi}{\cosh \xi} \right\} & \frac{1}{\cosh^2 \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a_1(0, \delta\omega) \\ \Delta r_1(0, \delta\omega) \end{pmatrix}, \quad (4.138)$$

を得た。

次に $\tau(\Delta a_2, \Delta r_2)$ の運動を考える。上と同様の議論により、

$$\Delta a_2(\xi, \delta\omega) = h_{11}(\xi) \Delta a_2(0, \delta\omega) + h_{12}(\xi) \Delta r_2(0, \delta\omega), \quad (4.139)$$

$$\Delta r_2(\xi, \delta\omega) = h_{21}(\xi) \Delta a_2(0, \delta\omega) + h_{22}(\xi) \Delta r_2(0, \delta\omega), \quad (4.140)$$

とにおいて、各係数を初期条件

$$h_{11}(0) = h_{22}(0) = 1, \quad (4.141)$$

$$h_{21}(0) = h_{12}(0) = 0, \quad (4.142)$$

のもとで決定することにする。係数の満たすべき方程式は、

$$\frac{dh_{11}}{d\xi} = \tanh \xi h_{11} - \frac{\sqrt{2}}{\cosh \xi} h_{21}, \quad (4.143)$$

$$\frac{dh_{12}}{d\xi} = \tanh \xi h_{12} - \frac{\sqrt{2}}{\cosh \xi} h_{22}, \quad (4.144)$$

$$\frac{dh_{21}}{d\xi} = \frac{\sqrt{2}}{\cosh \xi} h_{11}, \quad (4.145)$$

$$\frac{dh_{22}}{d\xi} = \frac{\sqrt{2}}{\cosh \xi} h_{12}, \quad (4.146)$$

である。

いま、

$$h_{11} = e_{11} \cosh \xi, \quad (4.147)$$

とおくと、ただちに

$$\frac{dh_{21}}{d\xi} = \sqrt{2} e_{11}, \quad (4.148)$$

および

$$\frac{de_{11}}{d\xi} = -\frac{\sqrt{2}}{\cosh^2 \xi} h_{21}, \quad (4.149)$$

が得られる。これらを (4.119), (4.120) と比較すると、

$$(g_{11}, f_{21}) \iff (-h_{21}, e_{11}), \quad (4.150)$$

の置き換えによって、 (g_{11}, f_{21}) の一般解を使えることが分かる。即ち、一般解は

$$h_{21} = -c_1(\xi \tanh \xi - 1) - c_2 \tanh \xi, \quad (4.151)$$

$$e_{11} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ c_1 \left(\tanh \xi + \frac{\xi}{\cosh^2 \xi} \right) + \frac{c_2}{\cosh^2 \xi} \right\}, \quad (4.152)$$

および

$$h_{11} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ c_1 \left(\sinh \xi + \frac{\xi}{\cosh \xi} \right) + \frac{c_2}{\cosh \xi} \right\}, \quad (4.153)$$

と表される。そこで、初期条件

$$0 = h_{21}(0) = c_1, \quad (4.154)$$

$$1 = h_{11}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} c_2, \quad (4.155)$$

を用いれば、

$$h_{11} = \frac{1}{\cosh \xi}, \quad (4.156)$$

$$h_{21} = \sqrt{2} \tanh \xi, \quad (4.157)$$

が求められる。他の係数についても、初期条件

$$0 = h_{12}(0) = c_2, \quad (4.158)$$

$$1 = h_{22}(0) = c_1, \quad (4.159)$$

を用いることによって、

$$h_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sinh \xi + \frac{\xi}{\cosh \xi} \right), \quad (4.160)$$

$$h_{22} = 1 - \xi \tanh \xi, \quad (4.161)$$

が得られる。以上をまとめれば、

$$\begin{pmatrix} \Delta a_2(\xi, \delta\omega) \\ \Delta r_2(\xi, \delta\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh \xi} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sinh \xi + \frac{\xi}{\cosh \xi} \right) \\ \sqrt{2} \tanh \xi & 1 - \xi \tanh \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a_2(0, \delta\omega) \\ \Delta r_2(0, \delta\omega) \end{pmatrix}, \quad (4.162)$$

が得られる。

本結果で興味深い点は、 f_{11} と h_{22} が、 $1 - \xi \tanh \xi = 0$ を満たす ξ ($\simeq 1.20$) で 0 となり、それ以上の ξ では符号が反転する点である。これは、基本波とその側波成分 $\Delta \bar{a}(z, \delta\omega)$ との和周波発生と、基本波と第二高調波の側波成分 $\Delta \bar{r}(z, \delta\omega)$ との差周波発生が不可分に発生することによって、揺らぎ成分が基本波付近と第二高調波付近の間を移動していることを意味している。

4.4 基本波閉じ込め・外部共振器型システムの出力雑音特性

非線型結晶内を伝播した基本波は、入出力ミラーにおいて損失/励振を受け、再び非線型結晶内に導入されるが、共振器内を伝播している間には位相回転も生じている。ある周波数で共振条件が満たされている場合、その周波数成分の一周後の位相は丁度 $2\pi n$ (n は整数) だけ回転している。一方、共振周波数から $\delta\omega$ だけずれている周波数成分は、周回時間を τ とすると、 $2\pi n + \delta\omega\tau$ だけ回転している。このため、一周後の位相の回転は、共振周波数からのずれによって一意に決まる。これらの位相回転を考慮した上で、自己無撞着条件、即ち、すべての周波数の成分が、一周後のそれと同一であるという条件が成り立たなければならない。この条件によって、共振器場の動作点と周波数スペクトルが定まり、第二高調波出力のスペクトルも求められることになる。

4.4.1 動作点

いま、図 2.6 中の in1 ポートに入力基本波を与えるものとし、共振器内の光は in2 から out1 へ抜けるものとする。ここで、外部から入力ミラーに入射された基本波の電場を

$$E_{\text{in1}}(t) = E_{\text{in1}}^{(-)}(t) + E_{\text{in1}}^{(+)}(t), \quad (4.163)$$

によって表す。ただし、

$$E_{\text{in1}}^{(-)\dagger}(t) = E_{\text{in1}}^{(+)}(t) = i \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 S c n}} \frac{E_0 \delta(\omega' - \omega_0) + \Delta \hat{s}(\omega')}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega' t} d\omega', \quad (4.164)$$

であり、励振力 E_0 は入射パワー P_{in} と

$$P_{\text{in}} = \hbar\omega_0 \frac{E_0^2}{2\pi}, \quad (4.165)$$

なる関係をもつ。式 (2.48) と (2.49) を用いれば、結晶入力端における平均値 $u(0)$ は

$$u(0) = \sqrt{1-T} \frac{u(0)}{\cosh \frac{\kappa l u(0)}{\sqrt{2}}} + \sqrt{T} E_0, \quad (4.166)$$

とならなければならない。これより、 E_0 の増加に対して $u(0)$ が単調増加することが保証される。即ち、 $u(0)$ および ξ の変域は $[0, \infty)$ である。

なお、第二高調波への 100% の変換が実現されるのは、out2 ポートからの基本波出力が 0 となる時である。即ち、

$$\sqrt{1-T} E_0 = \sqrt{T} \frac{u(0)}{\cosh \xi}, \quad (4.167)$$

がなり立つ時である。式 (4.166) を用いると、直ちに、

$$\sqrt{1-T} = \frac{1}{\cosh \xi}, \quad (4.168)$$

$$\sqrt{T} = \tanh \xi, \quad (4.169)$$

が得られる。

4.4.2 雑音特性の導出

式を見やすくするため、非線型結晶内での発展を表す係数を

$$N_{11} = \frac{1 - \xi \tanh \xi}{\cosh \xi}, \quad N_{22} = \frac{1}{\cosh \xi}, \quad (4.170)$$

$$N_{13} = -\sqrt{2} \frac{\tanh \xi}{\cosh \xi}, \quad N_{24} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sinh \xi + \frac{\xi}{\cosh \xi} \right\}, \quad (4.171)$$

$$N_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tanh \xi + \frac{\xi}{\cosh^2 \xi} \right\}, \quad N_{42} = \sqrt{2} \tanh \xi, \quad (4.172)$$

$$N_{33} = -\frac{1}{\cosh^2 \xi}, \quad N_{44} = 1 - \xi \tanh \xi, \quad (4.173)$$

と書く。これらによって表される結晶出力端の基本波は、共振器内を進行した後、入出力ミラーで外部と結合し、再び非線型結晶に導入されることになる。ここで注意しなければならないのは、用いてきた表式に、進行に伴う位相回転が明示されていない点である。即ち、 $\Delta \tilde{a}(z, \delta\omega)$ の成分には、 $e^{i\delta\omega\tau}$ の、また、 $\Delta \tilde{a}^\dagger(z, \delta\omega)$ の成分には、 $e^{-i\delta\omega\tau}$ の位相因子が、各々乗じられなければならない。定義 (4.95), (4.96) から、 $\Delta \tilde{a}_1(z, \delta\omega)$, $\Delta \tilde{a}_2(z, \delta\omega)$, に乗じるべき位相因子は、いずれも $e^{i\delta\omega\tau}$ であることが分かる。そこで、一周回後の揺らぎ $\Delta a_1(0, \delta\omega)$ を計算し、これと周回前のものとが一致するという条件から、

$$\Delta a_1(0, \delta\omega) = \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} \{N_{11}\Delta a_1(0, \delta\omega) + N_{13}\Delta r_1(\delta\omega)\} + \sqrt{T} \Delta r_1(\delta\omega), \quad (4.174)$$

が成り立たなければならないことがわかる。ただし、

$$\Delta s_1(\delta\omega) = \frac{\Delta s(\delta\omega) + \Delta s^\dagger(-\delta\omega)}{2}, \quad (4.175)$$

$$\Delta s_2(\delta\omega) = \frac{\Delta s(\delta\omega) - \Delta s^\dagger(-\delta\omega)}{2i}, \quad (4.176)$$

とした。式 (4.174) は自己無撞着解として、

$$\Delta a_1(0, \delta\omega) = \frac{1}{1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} N_{11}} \times \left\{ \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} N_{13} \Delta r_1(0, \delta\omega) + \sqrt{T} \Delta s_1(\delta\omega) \right\}, \quad (4.177)$$

をもつ。ただし、

$$1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} N_{11} \neq 0, \quad (4.178)$$

が成り立つものとする。これを (4.177) に用いれば、出力第二高調波の振幅揺らぎ成分を

$$\Delta r_1(\xi, \delta\omega) = \frac{\sqrt{T} N_{31}}{1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} N_{11}} \Delta s_1(\delta\omega) + \frac{N_{33} + \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} (N_{13}N_{31} - N_{11}N_{33})}{1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} N_{11}} \Delta r_1(0, \delta\omega), \quad (4.179)$$

と求めることができる。

同様の議論により、直交位相揺らぎについても、

$$\Delta a_2(0, \delta\omega) = \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} \{N_{22}\Delta a_2(0, \delta\omega) + N_{24}\Delta r_2(\delta\omega)\} + \sqrt{T} \Delta r_2(\delta\omega), \quad (4.180)$$

が成り立ち、これより、

$$\begin{aligned} \Delta r_2(\xi, \delta\omega) = & \frac{\sqrt{T} N_{42}}{1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} N_{22}} \Delta s_2(\delta\omega) \\ & + \frac{N_{44} + \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} (N_{24}N_{42} - N_{22}N_{44})}{1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} N_{22}} \Delta r_2(0, \delta\omega), \end{aligned} \quad (4.181)$$

なる解を得る。ただし

$$1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} N_{22} \neq 0, \quad (4.182)$$

が成り立つものとする。

一方、基本波出力を、図 2.6 の out2 ポートから取り出されるものとし、(4.164)-(4.176) と同様に $\Delta s_{1\text{out}}(\delta\omega)$, $\Delta s_{2\text{out}}(\delta\omega)$ を定義する。すると、

$$\begin{aligned} \Delta s_{1\text{out}}(\delta\omega) = & -\sqrt{1-T} \Delta r_1(0, \delta\omega) + \sqrt{T} \Delta a_1(\xi, \delta\omega) e^{i\delta\omega\tau} \\ = & \left\{ -\sqrt{1-T} + \frac{TN_{11}e^{i\delta\omega\tau}}{1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} N_{11}} \right\} \Delta s_1(\delta\omega) \\ & + \frac{\sqrt{T} e^{i\delta\omega\tau} N_{13}}{1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} N_{11}} \Delta r_1(0, \delta\omega), \end{aligned} \quad (4.183)$$

$$\begin{aligned} \Delta s_{2\text{out}}(\delta\omega) = & -\sqrt{1-T} \Delta r_2(0, \delta\omega) + \sqrt{T} \Delta a_2(\xi, \delta\omega) e^{i\delta\omega\tau} \\ = & \left\{ -\sqrt{1-T} + \frac{TN_{22}e^{i\delta\omega\tau}}{1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} N_{22}} \right\} \Delta s_2(\delta\omega) \\ & + \frac{\sqrt{T} e^{i\delta\omega\tau} N_{24}}{1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} N_{22}} \Delta r_2(0, \delta\omega), \end{aligned} \quad (4.184)$$

と表されることが容易に分かる。ただし、 $\Delta s_{1\text{out}}(\delta\omega)$ と $\Delta s_{2\text{out}}(\delta\omega)$ を、 $\Delta s_1(\delta\omega)$ や $\Delta s_2(\delta\omega)$ と同様に定義した。

図 4.3 は、第二高調波出力の振幅雑音スペクトル

$$\mathcal{R}_{1\text{out}}(\delta\omega) \equiv \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle \Delta r_1(\xi, \delta\omega) r_1(\xi, -\delta\omega) \rangle_{T_0}}{T_0}, \quad (4.185)$$

を示したものである。ただし、入力ミラーの透過率を 0.5% とし、

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1\text{in}}(\delta\omega) & \equiv \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle \Delta r_1(0, \delta\omega) r_1(0, -\delta\omega) \rangle_{T_0}}{T_0} \\ & = \frac{1}{4} \\ & = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle \Delta s_1(\delta\omega) s_1(-\delta\omega) \rangle_{T_0}}{T_0} \\ & \equiv \mathcal{S}_{1\text{in}}(\delta\omega), \end{aligned} \quad (4.186)$$

(T_0 はスペクトルの観測時間、 $\langle \rangle_{T_0}$ は観測時間 T_0 にわたる信号のスペクトルであることを意味する) で与えられるショット雑音レベルを 0dB とした。周回パワーの増大に伴い、ス

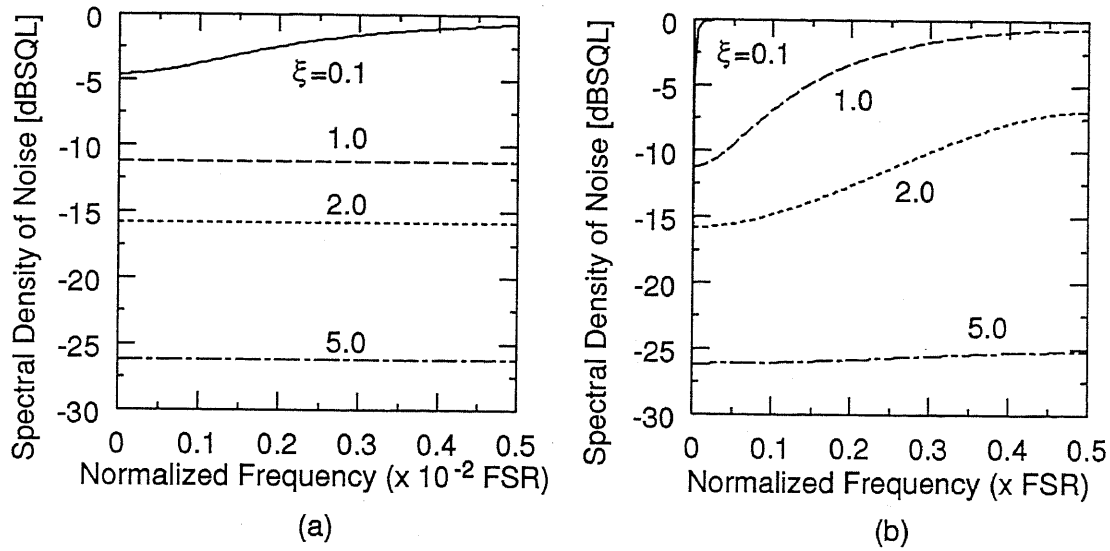


図 4.3: 第二高調波出力の振幅雑音スペクトル。ショット雑音レベルを 0dB とした。

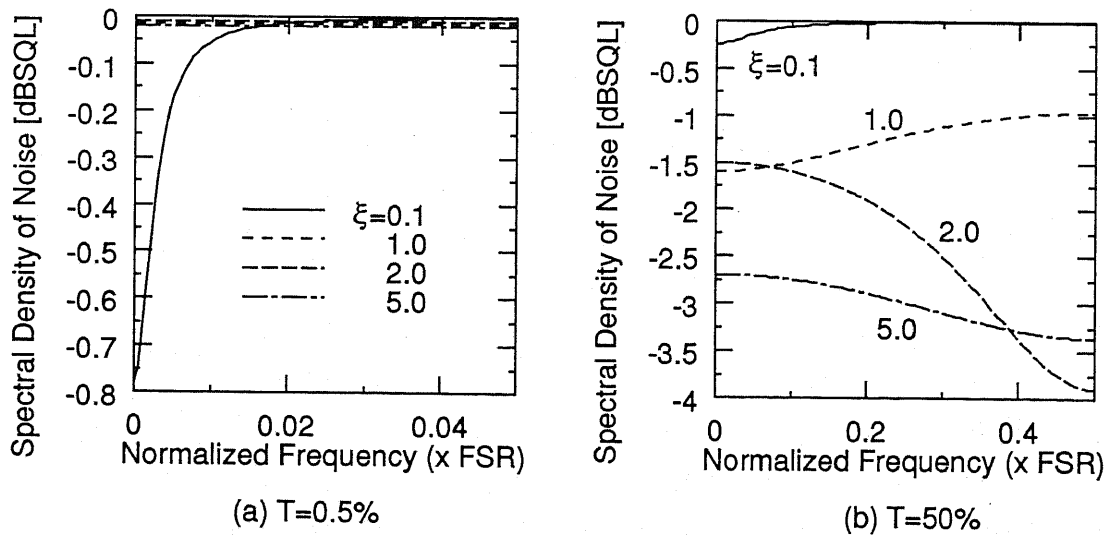


図 4.4: 基本波出力の振幅雑音スペクトル。ショット雑音レベルを 0dB とした。

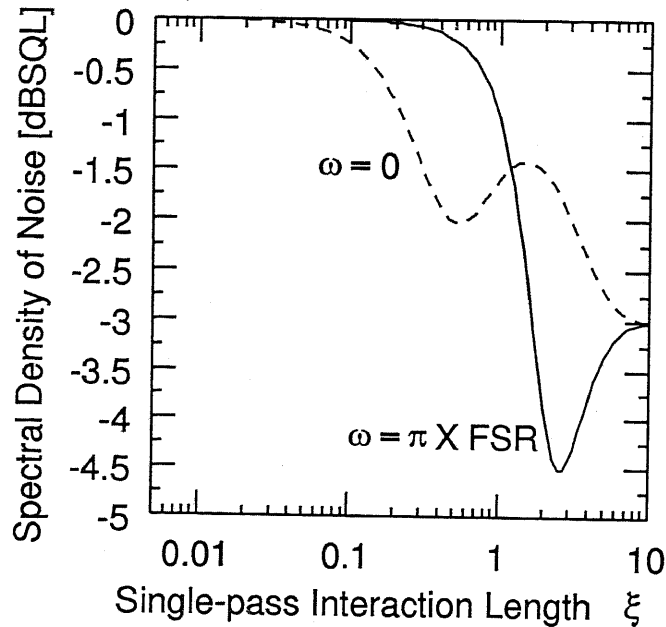


図 4.5: 基本波出力の DC 付近、および自由スペクトル領域の境界における振幅雑音スペクトル密度。T=50%。ショット雑音レベルを 0dB とした。

クイーキングが発現する周波数領域が広がっているが、これは、第二高調波発生による損失が増加し、共振器帯域が広がるためである。

一方、図 4.4 は、基本波出力の振幅雑音スペクトル

$$S_{1out}(\delta\omega) \equiv \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle \Delta s_1(\delta\omega) s_1(-\delta\omega) \rangle_{T_0}}{T_0}, \quad (4.187)$$

に関する図である。本図では、2種類の入力ミラー透過率: 0.5%, 50% の2例を示す。規格化相互作用長 ξ が比較的大きい場合 (図中では $\xi = 2.0, 5.0$)、スクイーキング量の最大値が DC 付近ではなく、自由スペクトル領域の境界、すなわち $0.5 \times \text{FSR}$ で生じている。これは、第 4.3 節で述べたように、基本波とその側波成分との和周波発生、および、基本波と第二高調波の側波成分との差周波発生が不可分に生じることが原因で、基本波揺らぎが結晶入射時と逆相になり得るためである。即ち、帰還される基本波揺らぎが逆相となってしまう (N_{11} の符号が反転する) ために、DC 付近では正帰還が構成され、逆に FSR の境界では負帰還となるのである。図 4.5 に、これら二つの周波数における雑音スペクトル密度の、相互作用長 ξ への依存性を示す。本図から、 $\xi \approx 1.2$ 、即ち、 N_{11} の符号が反転する点で両スペクトル密度の大小が逆転していることが分かる。

4.4.3 二光子損失モデルとの比較

前節で得られた結果は、二光子損失モデルによって導かれる結論とはかなり異なる。まず、第二高調波出力 (4.179) を、第 3 章の式 (3.75) で $\gamma_l = 0$ としたもの

$$\Delta \tilde{R}_{1out}(\omega) = -\frac{2\sqrt{\gamma\zeta I_0}}{-i\omega + \frac{\gamma}{2} + 3\zeta I_0} \Delta \tilde{S}_{1in}(0) + \frac{-i\omega + \frac{\gamma}{2} - \zeta I_0}{-i\omega + \frac{\gamma}{2} + 3\zeta I_0} \tilde{R}_{1in}(0), \quad (4.188)$$

と比較すると、明らかに異なる形となっている。しかし、両式は非線型相互作用と共振器ミラーの透過率が小さく ($\xi \sim 0, T \sim 0$)、かつ DC 付近のスペクトル成分について考える場合に一致することが示される。即ち (4.183) で、

$$\sqrt{1-T} \simeq 1 - \frac{T}{2}, \quad (4.189)$$

$$\frac{1 - \xi \tanh \xi}{\cosh \xi} \simeq 1 - \frac{3}{2}\xi^2, \quad (4.190)$$

$$\tanh \xi \simeq \sinh \xi \simeq \xi, \quad (4.191)$$

$$e^{-i\delta\omega} \simeq 1 - i\delta\omega, \quad (4.192)$$

を用いて、 $\xi, T, \delta\omega$ の高次項を適宜無視すると、

$$\Delta r_1(\xi, \delta\omega) \simeq \frac{\sqrt{2T}\xi}{-i\delta\omega\tau + \frac{T}{2} + \frac{3}{2}\xi^2} \Delta s_1(0, \delta\omega) + \frac{-i\delta\omega\tau + \frac{T}{2} - \frac{1}{2}\xi^2}{-i\delta\omega\tau + \frac{T}{2} + \frac{3}{2}\xi^2} \Delta r_1(0, \delta\omega), \quad (4.193)$$

が得られる。ここで

$$T = \gamma\Delta\tau, \quad \xi = \sqrt{2\zeta I_0\Delta\tau}, \quad \delta\omega = \omega, \quad (4.194)$$

とおけば、(3.84) と (4.193) は一致する。

同様に、基本波出力についても、(4.183) を近似すれば、

$$\Delta s_{1out}(\delta\omega) = \frac{-\sqrt{2T}\xi}{-i\delta\omega\tau + \frac{T}{2} + \frac{3}{2}\xi^2} \Delta r_1(0, \delta\omega) + \frac{-i\delta\omega\tau + \frac{T}{2} - \frac{3}{2}\xi^2}{-i\delta\omega\tau + \frac{T}{2} + \frac{3}{2}\xi^2} \Delta s_1(0, \delta\omega), \quad (4.195)$$

となり、(3.80) で $\gamma_l = 0$ としたものと一致することが示される。

以上より、二光子損失モデルによる解析は、結合が小さい場合にのみ同じ結果を導くことが分かった。しかし、共振器内周回パワーが大きい場合には、結晶内での電磁場の発展が無視できなくなり、二光子損失モデルの前提が成り立たなくなる。即ち、二光子損失モデルによる解析は、本解析の低次近似と考えることができる。

4.4.4 スペクトルの最小値

いま、式(4.179)のうち、第二高調波の周波数付近 ($\delta\omega \sim 0$) の成分に着目し、 $\Delta r_1(\xi, 0)$ を考える。このとき、 ξ の函数として、

$$\begin{aligned} \Delta r_1(\xi, 0) &= \sqrt{1-T} \frac{N_{13}}{1-\sqrt{1-T} N_{11}} \Delta r_1(0, 0) + \sqrt{T} \frac{N_{31}}{1-\sqrt{1-T} N_{11}} \Delta s_1(0, 0) \\ &= \left[\frac{1}{\cosh^2 \xi} + \sqrt{1-T} \frac{-\frac{\tanh \xi}{\cosh \xi} \left(\tanh \xi + \frac{\xi}{\cosh \xi} \right)}{1-\sqrt{1-T} \frac{1-\xi \tanh \xi}{\cosh \xi}} \right] \Delta r_1(0, 0) \\ &\quad + \sqrt{T} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tanh \xi + \frac{\xi}{\cosh \xi} \right)}{1-\sqrt{1-T} \frac{1-\xi \tanh \xi}{\cosh \xi}} \Delta s_1(0, 0), \end{aligned} \quad (4.196)$$

と表すことができる。特に $\xi \rightarrow \infty$ の場合、

$$\Delta r_1(\infty, 0) = \sqrt{\frac{T}{2}} \Delta r_1(0, 0), \quad (4.197)$$

で与えられる。即ち、 $T \rightarrow 0$ のとき、0 となり、スクイーミング量は 100% に近づく。

同様に、基本波出力の直流付近の成分のうち、 $\Delta s_{1\text{out}}(0)$ について考えれば、

$$\begin{aligned} \Delta s_{1\text{out}}(0) &= \frac{\sqrt{T} N_{13}}{1-\sqrt{1-T} N_{11}} \Delta r_1(0, 0) + \frac{N_{11}-\sqrt{1-T}}{1-\sqrt{1-T} N_{11}} \Delta s_1(0) \\ &= \frac{\sqrt{2T} \frac{\tanh \xi}{\cosh \xi}}{1-\sqrt{1-T} \frac{1-\xi \tanh \xi}{\cosh \xi}} \Delta r_1(0, 0) \\ &\quad + \frac{\frac{1-\xi \tanh \xi}{\cosh \xi} - \sqrt{1-T}}{1-\sqrt{1-T} \frac{1-\xi \tanh \xi}{\cosh \xi}} \Delta s_1(0), \end{aligned} \quad (4.198)$$

が得られる。ここで、ミラーの透過率を 1 とおけば、

$$\Delta s_{1\text{out}}(0) = \sqrt{2} \frac{\tanh \xi}{\cosh \xi} \Delta r_1(0, 0) + \frac{1-\xi \tanh \xi}{\cosh \xi} \Delta s_1(0), \quad (4.199)$$

となり、進行波と一致する。また、(4.198) で $\xi \rightarrow \infty$ とすれば、

$$\Delta s_{1\text{out}}(0) = -\sqrt{1-T} \Delta s_1(0), \quad (4.200)$$

となり、 $T \rightarrow 1$ のとき 0 に近づく。即ち、このシステムによる基本波の最大スクイーミング量は 100% であるが、閉じ込めを行わない進行波デバイスとして動作した場合に得られる。

なお、第二高調波出力に 100% 変換される動作点では、(4.168), (4.169) を用いれば、

$$\Delta r_{1\text{out}}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta s_1(0), \quad (4.201)$$

が得られ、第 3.3.2 節における議論がここでも成り立つことが確認される。

4.4.5 最大スクイーピング量

式 (4.197) から明らかなように、最大スクイーピング量は入力ミラーの透過率によって定まる。この解析は、損失が入力ミラーによってのみ与えられると仮定しているが、実際には回折損・吸収損などの線型損失が存在する。即ち、最大スクイーピング量は、これらの線型損失の混入度によって決まる。損失が小さければ小さい程、達成できるスクイーピング量は大きくなり、理想的には 100% に近づけることができる。

この結果は二光子吸収モデルが与える結果とは極めて対照的である。二光子吸収モデルの与える結果によると、揺らぎ成分のうち第二高調波付近の真空揺らぎのみが影響し、線型損失のパラメータは最大スクイーピング量には影響しないはずであった。しかしこの結論は、一回通過時の第二高調波への変換パワーが基本波光子数の二乗に比例するという仮定に基づくものである。実際には飽和が生じるため、基本波光子揺らぎに混入する第二高調波付近の真空揺らぎも有限になる。従って、飽和が問題になる動作範囲では、二光子吸収モデルによる雑音解析は無効である。

共振器による帰還を設けることで、進行波型よりも優れたスクイーピング特性が実現できる。この結論には多少の説明を要する。一回通過時の変換効率が極めて高ければ、非線型相互作用後の共振器内基本波の周回パワーと、第二高調波出力パワーとの間には極めて強い「負の」相関が現れる。基本波のこの揺らぎの情報は、次の周回に反映される。即ち、前の周回で第二高調波出力パワーが増大したならば、次の周回では共振器内基本波パワーが減少し、これに伴って変換効率も減少する。逆に第二高調波出力パワーが減少すれば、次の周回では基本波周回パワーが増大するため、変換効率も増大する。つまり、共振器は基本波による負帰還ループを構成していることになる。

この負帰還システムの特性を決めているのは、入力ミラーにおける透過をはじめとする、線型損失である。一般に、如何なる損失も揺らぎを混入させる。従って、ミラーの透過率が小さく、損失が小さい程、混入する揺らぎも小さくて済む。ただし、基本波を共振器内に導入ために、ミラーの透過率を零でない値にしておかなければならない。

図 4.6 に $\omega = 0$ における第二高調波出力の振幅雑音スペクトル密度を、また、図 4.7 には基本波出力の同密度を示す。ただし、真空の雑音電力スペクトル、即ちショット雑音レベルを 1 とした。本図では、入力ミラーの透過率を 0.5%, 50% の二種類について示している。

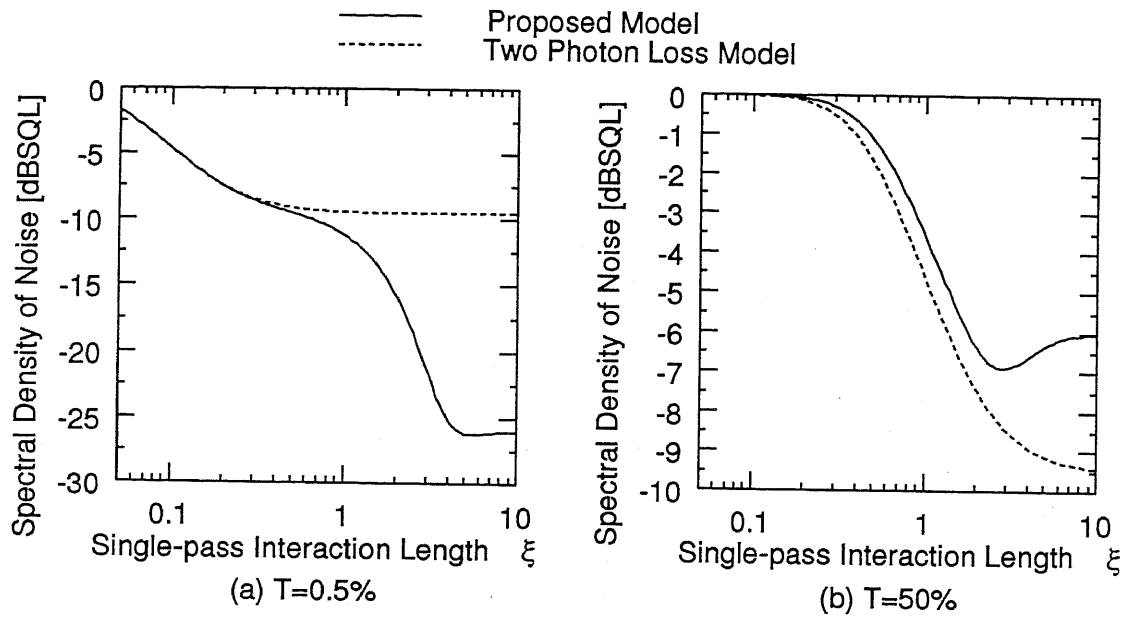


図 4.6: 第二高調波出力振幅雑音の直流成分の相互作用長依存性。ショット雑音レベルを 0dB とした。

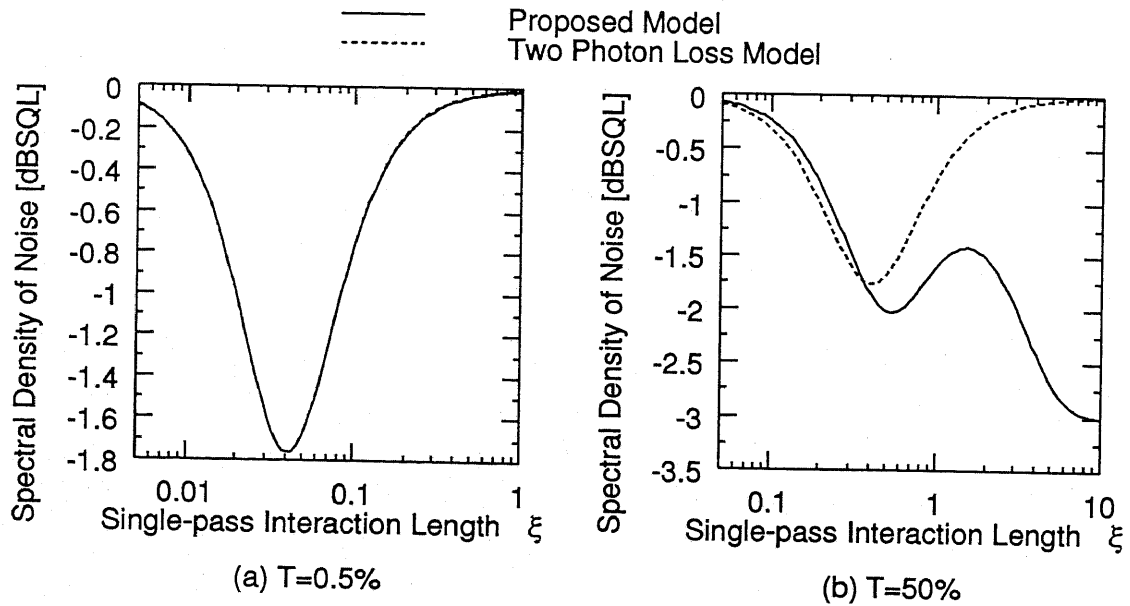


図 4.7: 基本波出力振幅雑音の直流成分の相互作用長依存性。ショット雑音レベルを 0dB とした。

本図から明らかなように、二光子吸収モデルによる解析では、それぞれ 9.54dB, 1.76dB の限界を与えているのに対し、いずれの場合でも更に大きいスキューニングを予測している。

4.5 パラメトリック同時発振によるスキューニング特性の劣化

第 3.4 節では、側波モード対のパラメトリック発振の可能性について、二光子損失モデルを用いて論じた。その結論は、側波モード対の発振は起こり得ないというものであった。また、Type II 位相整合を用いたシステムでは、直交する偏波モードが発振し、動作が不安定になる可能性があることを示した。本節では、進行波解析を用いてこれらの結論を確かめることにする。

4.5.1 周波数非縮退パラメトリック発振の可能性

一般に、パラメトリック発振はシステムの線型安定性が失われて発現する。本解析では、発振閾値は自己無撞着を与える式 (4.174) または (4.180) のいずれかの解が不定となる、即ち、(4.178) または (4.182) のいずれかが成立しなくなるという条件によって導かれる。ところが、任意の $\xi > 0$ に対して、

$$0 < \frac{1}{\cosh \xi} < 1, \quad (4.202)$$

かつ、

$$1 > \frac{1 - \xi \tanh \xi}{\cosh \xi} > -\frac{\xi}{\cosh \xi} \geq -0.66 \dots, \quad (4.203)$$

が成り立つ。これらは (4.178) および (4.182) のいずれもが、任意の $\phi, \xi > 0$ について成り立つことを意味する。即ち、側波モードのパラメトリック発振は発生しない。

以上の議論を別の角度から考える。

基本波の周波数から自由スペクトル間隔だけ離れた周波数の成分について考える。この周波数成分が正帰還を受け、パラメトリック発振を生じるためには、少なくとも、揺らぎが非線型光学結晶内で増幅されなければならない。ところが、パラメトリック増幅を受ける揺らぎ成分は、結晶の出力端で

$$\Delta a_2(\xi, 0) = \frac{1}{\cosh \xi} \Delta a_2(0, 0) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\sinh \xi + \xi \cosh \xi) \Delta \tilde{r}_2(0, 0), \quad (4.204)$$

となる。即ち、結晶の入力端での揺らぎ $\Delta a_2(0, \Delta\omega)$ と、その出力端における値 $\Delta a_2(\xi, \Delta\omega)$ とを比較すると、常に後者が前者に比べて小さい。この結果は、結晶内では和周波発生に伴う損失が常にパラメトリック発振を上回っており、一周回後に同じ成分が増幅されて戻ることとはあり得ないことを意味する。すなわち、基本波と側波周波数成分の和周波発生の間で

位相整合条件が満たされている場合には、側波周波数成分のパラメトリック発振は発生しない。

4.5.2 直交偏波モードのパラメトリック発振と最大スクイーミング量

非線型光学結晶が Type-II 位相整合条件の下で用いられる時には、同じ周波数で偏波モードの異なる二つの基本波が必要である。いま、これらを振幅 \hat{a} と \hat{b} で表し、第二高調波 \hat{r} との非線型結合を考える。すると、Type-I 位相整合の場合と同様に、

$$\frac{d\hat{a}(z, \omega)}{dz} = -\kappa \int_{[\omega_0]} d\omega' \hat{b}^\dagger(z, \omega) \hat{r}(z, \omega + \omega') e^{i\Delta k z}, \quad (4.205)$$

$$\frac{d\hat{b}(z, \omega)}{dz} = -\kappa \int_{[\omega_0]} d\omega' \hat{a}^\dagger(z, \omega) \hat{r}(z, \omega + \omega') e^{i\Delta k z}, \quad (4.206)$$

$$\frac{d\hat{r}(z, \omega)}{dz} = \kappa \int_{[\omega_0]} d\omega' \hat{a}(z, \omega') \hat{b}(z, \omega - \omega') e^{-i\Delta k z}, \quad (4.207)$$

という発展方程式が得られる。いま、基本波 (両偏波成分共)、第二高調波がいずれも単色で励振されているとして、

$$\hat{a}(z) = u'(z) \delta(\omega - \omega_0) + \Delta \hat{a}(z, \omega), \quad (4.208)$$

$$\hat{b}(z) = w'(z) \delta(\omega - \omega_0) + \Delta \hat{b}(z, \omega), \quad (4.209)$$

$$\hat{r}(z) = v'(z) \delta(\omega - 2\omega_0) + \Delta \hat{r}(z, \omega), \quad (4.210)$$

とおく。ここで、 Δ の 2 次以上の項を無視すると、

$$\begin{aligned} \frac{du'}{dz} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{d\Delta \hat{a}(z, \omega)}{dz} &= -\kappa [w'^*(z) v'(z) \delta(\omega - \omega_0) \\ &+ w'^*(z) \Delta \hat{r}(z, \omega + \omega_0) + v'(z) \Delta \hat{b}^\dagger(z, 2\omega_0 - \omega)], \end{aligned} \quad (4.211)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw'}{dz} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{d\Delta \hat{b}(z, \omega)}{dz} &= -\kappa [u'^*(z) v'(z) \delta(\omega - \omega_0) \\ &+ u'^*(z) \Delta \hat{r}(z, \omega + \omega_0) + v'(z) \Delta \hat{a}^\dagger(z, 2\omega_0 - \omega)], \end{aligned} \quad (4.212)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv'}{dz} \delta(\omega - 2\omega_0) + \frac{d\Delta \hat{r}(z, \omega)}{dz} &= \kappa [u'(z) w'(z) \delta(\omega - \omega_0) \\ &+ w'(z) \Delta \hat{a}(z, \omega - \omega_0) + u'(z) \Delta \hat{b}(z, \omega - \omega_0)], \end{aligned} \quad (4.213)$$

が得られる。そこで、 Δ の 0 次および 1 次の項を比較し、それぞれの発展を考える。

まず、0 次の項については、

$$\frac{du'}{dz} = -\kappa w'^* v', \quad (4.214)$$

$$\frac{dw'}{dz} = -\kappa u'^* v', \quad (4.215)$$

$$\frac{dv'}{dz} = \kappa u' w', \quad (4.216)$$

である。いま、

$$u'(z) = u(z)e^{i\phi_a}, \quad (4.217)$$

$$w'(z) = w(z)e^{i\phi_b}, \quad (4.218)$$

$$v'(z) = v(z)e^{i\phi_r}, \quad (4.219)$$

とおき、(4.214)–(4.216) に代入すると、

$$\frac{du}{dz} + iu \frac{d\phi_a}{dz} = -\kappa w v e^{i(\phi_r - \phi_a - \phi_b)}, \quad (4.220)$$

$$\frac{dw}{dz} + iw \frac{d\phi_b}{dz} = -\kappa u v e^{i(\phi_r - \phi_a - \phi_b)}, \quad (4.221)$$

$$\frac{dv}{dz} + iv \frac{d\phi_r}{dz} = \kappa u w e^{i(\phi_a + \phi_b - \phi_r)}, \quad (4.222)$$

が得られる。これを実虚部に分離すれば、

$$u \frac{d\phi_a}{dz} = -\kappa w v \sin(\phi_r - \phi_a - \phi_b), \quad (4.223)$$

$$w \frac{d\phi_b}{dz} = -\kappa u v \sin(\phi_r - \phi_a - \phi_b), \quad (4.224)$$

$$v \frac{d\phi_r}{dz} = \kappa u w \sin(\phi_a + \phi_b - \phi_r), \quad (4.225)$$

$$\frac{du}{dz} = -\kappa w v \cos(\phi_r - \phi_a - \phi_b), \quad (4.226)$$

$$\frac{dw}{dz} = -\kappa u v \cos(\phi_r - \phi_a - \phi_b), \quad (4.227)$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\kappa}{2} u^2 \cos(\phi_r - \phi_a - \phi_b), \quad (4.228)$$

を得る。ここで、 $\theta = \phi_a + \phi_b - \phi_r$ とおけば、

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{d}{dz} \ln u v w, \quad (4.229)$$

が計算され、これより直ちに、

$$u v w \sin \theta = \text{const.}, \quad (4.230)$$

となることがわかる。第二高調波発生では $v(0)=0$ より、常に $\theta=0$ である。これを (4.226), (4.228) に用いれば、

$$\frac{du}{dz} = -\kappa w v, \quad (4.231)$$

$$\frac{dw}{dz} = -\kappa u v, \quad (4.232)$$

$$\frac{dv}{dz} = \kappa u w, \quad (4.233)$$

なる包絡線の発展方程式を得る。ここで (4.231)× u , (4.232)× w , (4.233)× v を作り、適宜組み合わせることにより、

$$u \frac{du}{dz} + w \frac{dw}{dz} + 2v \frac{dv}{dz} = 0, \quad (4.234)$$

$$u \frac{du}{dz} + v \frac{dv}{dz} = 0, \quad (4.235)$$

$$w \frac{dw}{dz} + v \frac{dv}{dz} = 0, \quad (4.236)$$

$$u \frac{du}{dz} - w \frac{dw}{dz} = 0, \quad (4.237)$$

即ち、

$$u^2 + w^2 + 2v^2 = u_0^2 + w_0^2, \quad (4.238)$$

$$u^2 + v^2 = u_0^2 = m_1, \quad (4.239)$$

$$w^2 + v^2 = w_0^2 = m_2, \quad (4.240)$$

$$u^2 - w^2 = u_0^2 - w_0^2 = m_3, \quad (4.241)$$

なる恒等式が得られる。ただし、 $u_0 = u(0)$, $w_0 = w(0)$ とした。これらを用いて、 v に関する方程式を立てると、

$$\frac{dv^2}{dz} = 2\kappa \sqrt{v^2(m_1 - v^2)(m_2 - v^2)}, \quad (4.242)$$

が得られる。変数分離して積分すると、

$$\begin{aligned} 2\kappa z &= \int_{v_0^2}^{v(z)^2} \frac{d(v^2)}{\sqrt{v^2(m_1 - v^2)(m_2 - v^2)}} \\ &= \int_{v_0}^{v(z)} \frac{2dv}{\sqrt{(m_1 - v^2)(m_2 - v^2)}}, \end{aligned} \quad (4.243)$$

が得られるが、

$$v = \sqrt{m_2} y = w_0 y, \quad (4.244)$$

によって新しい変数 y を導入すると、

$$\kappa z = \int_{v_0^2/m_2}^{v^2(z)/m_2} \frac{dy}{\sqrt{m_1(1 - y^2)(1 - \gamma^2 y^2)}}, \quad (4.245)$$

と書き換えられる。ただし

$$\gamma = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}, \quad (4.246)$$

である。整理すれば

$$u_0 \kappa z = \int_{v_0^2/w_0^2}^{v(z)^2/w_0^2} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \gamma^2 y^2)}}, \quad \gamma = \frac{w_0}{u_0}, \quad (4.247)$$

となる。この右辺は第一種楕円積分である。

楕円積分を数値計算すれば、結晶入射時の直交二偏波の振幅が一致しない ($\gamma \neq 1$) 場合についても統計を計算することができるが、ここでは特に、第二高調波発生が安定して生じている場合、即ち、

$$u_0 = w_0, \quad (4.248)$$

の場合について考える。この場合、(4.247) の積分は解析的に解けて、

$$\begin{aligned} u_0 \kappa z &= \int_{v_0^2/w_0^2}^{v^2(z)/w_0^2} \frac{dy}{1-y^2} \\ &= \tanh^{-1} \frac{v(z)}{u_0}, \end{aligned} \quad (4.249)$$

となる。即ち、

$$v(z) = u_0 \tanh u_0 \kappa z, \quad (4.250)$$

である。これを用いれば $u(z)$ も

$$u(z) = \frac{u_0}{\cosh u_0 \kappa z}, \quad (4.251)$$

と求めることができる。

これを用いて揺らぎの発展を計算する。式 (4.211)–(4.213) 中の Δ の 1 次の項を抜き出すと、

$$\frac{d\Delta\hat{a}}{dz}(z, \omega) = -\kappa \left[v'(z) \Delta\hat{b}^\dagger(z, 2\omega_0 - \omega) + w'^*(z) \Delta\hat{r}(z, \omega - \omega_0) \right], \quad (4.252)$$

$$\frac{d\Delta\hat{b}}{dz}(z, \omega) = -\kappa \left[v'(z) \Delta\hat{a}^\dagger(z, 2\omega_0 - \omega) + u'^*(z) \Delta\hat{r}(z, \omega - \omega_0) \right], \quad (4.253)$$

$$\frac{d\Delta\hat{r}}{dz}(z, \omega) = \kappa \left[w'(z) \Delta\hat{a}(z, \omega - \omega_0) + u'(z) \Delta\hat{b}(z, \omega - \omega_0) \right], \quad (4.254)$$

となる。簡単のため、 $\phi_a(0) = \phi_b(0) = \phi_r(0) = 0$ とおけば、

$$\frac{d\phi_a}{dz} = \frac{d\phi_b}{dz} = \frac{d\phi_r}{dz} = 0, \quad (z > 0), \quad (4.255)$$

であるから、

$$\phi_a(z) = \phi_b(z) = \phi_r(z) = 0, \quad (z > 0), \quad (4.256)$$

となる。そこで、

$$\frac{d\Delta\hat{a}}{dz}(z, \omega) = -\kappa \left[v(z) \Delta\hat{b}^\dagger(z, 2\omega_0 - \omega) + w(z) \Delta\hat{r}(z, \omega - \omega_0) \right], \quad (4.257)$$

$$\frac{d\Delta\hat{b}}{dz}(z, \omega) = -\kappa \left[v(z) \Delta\hat{a}^\dagger(z, 2\omega_0 - \omega) + u(z) \Delta\hat{r}(z, \omega - \omega_0) \right], \quad (4.258)$$

$$\frac{d\Delta\hat{r}}{dz}(z, \omega) = \kappa \left[w(z) \Delta\hat{a}(z, \omega - \omega_0) + u(z) \Delta\hat{b}(z, \omega - \omega_0) \right], \quad (4.259)$$

が得られる。

ここで、

$$\Delta\tilde{a}_+(z, \delta\omega) = \frac{\Delta\tilde{a}(z, \omega_0 + \delta\omega) + \Delta\tilde{b}(z, \omega_0 + \delta\omega)}{\sqrt{2}}, \quad (4.260)$$

$$\Delta\tilde{a}_-(z, \delta\omega) = \frac{\Delta\tilde{a}(z, \omega_0 + \delta\omega) - \Delta\tilde{b}(z, \omega_0 + \delta\omega)}{\sqrt{2}}, \quad (4.261)$$

によって、 \hat{a} 、 \hat{b} の偏波方向から、 45° だけ傾いた偏波方向の成分を定義する。これによって (4.257)-(4.259) は、

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_+}{dz}(z, \delta\omega) = -\kappa u(z)\Delta\tilde{r}(z, \delta\omega) - \kappa v(z)\Delta\tilde{a}_+^\dagger(z, -\delta\omega), \quad (4.262)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_-}{dz}(z, \delta\omega) = \kappa v(z)\Delta\tilde{a}_-^\dagger(z, -\delta\omega), \quad (4.263)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{r}}{dz}(z, \delta\omega) = \kappa u(z)\Delta\tilde{a}_+(z, \delta\omega), \quad (4.264)$$

と書き換えられる。

このうち、(4.262) と (4.264) の組は、Type-I 位相整合の解析に用いた (4.91), (4.92) に全く一致する。即ち、共振器場 (4.260) は、あたかも Type-I 位相整合を用いた場合の (単一偏波の) 基本波として振舞い、第二高調波もこれとのみ非線型相互作用を行っているように振舞う。

一方、(4.263) は全く独立に発展する。そこで、

$$\Delta\tilde{a}_{1-} = \frac{\Delta\tilde{a}_-(z, \delta\omega) + \Delta\tilde{a}_-^\dagger(z, -\delta\omega)}{2}, \quad (4.265)$$

$$\Delta\tilde{a}_{2-} = \frac{\Delta\tilde{a}_-(z, \delta\omega) - \Delta\tilde{a}_-^\dagger(z, -\delta\omega)}{2i}, \quad (4.266)$$

とにおいて、これらの発展方程式

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_{1-}}{dz}(z, \delta\omega) = \kappa v(z)\Delta\tilde{a}_{1-}(z, \delta\omega), \quad (4.267)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_{2-}}{dz}(z, \delta\omega) = -\kappa v(z)\Delta\tilde{a}_{2-}(z, \delta\omega), \quad (4.268)$$

を考える。まず、(4.267) については、

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_{1-}}{dz}(z, \delta\omega) = \kappa u_0(\tanh \kappa u_0 z)\Delta\tilde{a}_{1-}(z, \delta\omega), \quad (4.269)$$

であるが、

$$\xi = \kappa u_0 z, \quad (4.270)$$

とおき、

$$\Delta a_{j-}(\xi, \delta\omega) = \Delta \tilde{a}_{j-}(z, \delta\omega), \quad j = 1, 2, \quad (4.271)$$

と書けば、

$$\frac{d\Delta a_{1-}}{dz}(\xi, \delta\omega) = \tanh \xi \Delta a_{1-}(\xi, \delta\omega), \quad (4.272)$$

となる。これは変数分離により、容易に

$$\Delta a_{1-}(\xi, \delta\omega) = \cosh \xi \Delta a_{1-}(0, \delta\omega), \quad (4.273)$$

と解くことができる。式 (4.268) についても同様に、

$$\Delta a_{2-}(\xi, \delta\omega) = \frac{\Delta a_{2-}(0, \delta\omega)}{\cosh \xi}, \quad (4.274)$$

と解くことができる。

いま、共振器内を進行することによるの位相変化を考えれば、一周後に再び結晶への入射点に戻ったときの揺らぎは、

$$\Delta a_{1-}(0, \delta\omega) = \sqrt{T} \Delta s_{1-}(\delta\omega) + \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} \frac{1}{\cosh \xi} \Delta a_{1-}(0, \delta\omega), \quad (4.275)$$

$$\Delta a_{2-}(0, \delta\omega) = \sqrt{T} \Delta s_{2-}(\delta\omega) + \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} \cosh \xi \Delta a_{2-}(0, \delta\omega), \quad (4.276)$$

と書くことができる。ただし、 Δs_{\pm} を、基本波入力ミラーにおいて偏波モード Δa_{\pm} とそれぞれ結合する自由空間内の場とし、結合する

$$\Delta s_{1\pm} = \frac{\Delta s_{\pm}(\delta\omega) + \Delta s_{\pm}^{\dagger}(-\delta\omega)}{2}, \quad (4.277)$$

$$\Delta s_{2\pm} = \frac{\Delta s_{\pm}(\delta\omega) - \Delta s_{\pm}^{\dagger}(-\delta\omega)}{2i}, \quad (4.278)$$

とおいた。

自己無撞着の式 (4.275)、(4.276) が解を持つのは、

$$1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} \frac{1}{\cosh \xi} \neq 0, \quad (4.279)$$

$$1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\omega\tau} \cosh \xi \neq 0, \quad (4.280)$$

のときである。ところが、第二式は

$$\cosh \xi = \frac{1}{\sqrt{1-T}}, \quad \delta\omega = 0, \quad (4.281)$$

のときに成り立たなくなる。これが直交偏波モードのパラメトリック発振閾値を与える。このとき、

$$\tanh \xi = \sqrt{T}, \quad (4.282)$$

であり、出力第二高調波の振幅揺らぎスペクトルは、直流付近で

$$\Delta r_1(\xi, 0) = 0 \times \Delta r_1(0, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta s_{1+}(0), \quad (4.283)$$

となる。即ち、最大スクイーミング量は 50% に留まる。この結果は第 3.4 節で得られた結果と全く一致するが、ミラー透過率が大きい場合でも、同様の結論が得られることが改めて示されたことになる。

4.6 基本波閉じ込め・レーザ内部型システムの出力雑音特性

レーザ内部型システムの量子雑音特性について、第 3.5 節で得られた結論を確認しておく：ポンプ率が極めて大きい場合には第二高調波出力とレーザ利得が釣り合い、この結果ほぼ 100% の量子変換効率を得ることができる。このとき、出力第二高調波の統計は、ショット雑音レベルの 50% に近づく。これは、ショット雑音レベルに達した基本波が、第二高調波に 100% 変換されている場合に成り立つ一般論である。

この結論が正しいかどうかを検証するのが本節の目的である。

4.6.1 レーザ内部型システムの解析方法

非線型損失が極めて大きい場合、これを補うだけの利得をレーザ媒質内部で得る必要があるが、そのためには、レーザ媒質そのものの分布定数的な扱いが必要になる。Lax-Louisell モデル [36] に基づく詳しい説明は付録 B に譲り、ここでは結果のみを示す。

式 (4.64) と同様に、光の場を平均と揺らぎとに分ける。すなわち、周波数領域の光の場を、

$$\hat{a}(z, \omega) = u(z)e^{i\phi}\delta(\omega - \omega_0) + \Delta \bar{a}(z, \delta\omega), \quad (4.284)$$

と書く。更に、周波数領域における振幅揺らぎと直交位相揺らぎをそれぞれ、

$$\Delta \bar{a}_1(z, \delta\omega) \equiv \frac{\Delta \bar{a}(z, \delta\omega)e^{-i\phi} + \Delta \bar{a}^\dagger(z, -\delta\omega)e^{i\phi}}{2}, \quad (4.285)$$

$$\Delta \bar{a}_2(z, \delta\omega) \equiv \frac{\Delta \bar{a}(z, \delta\omega)e^{-i\phi} - \Delta \bar{a}^\dagger(z, -\delta\omega)e^{i\phi}}{2i}, \quad (4.286)$$

とにおいて、 $u(z)$, $\Delta \bar{a}_1(z, \delta\omega)$, $\Delta \bar{a}_2(z, \delta\omega)$ に関する空間発展方程式を導く。ただし、原子系の運動は全て断熱排除できるものとし、また励起過程は Poisson 的であると仮定する。この結果、

$$\frac{du(z)}{dz} = \frac{G_0}{2\{1 + u^2(z)/i_s\}} u(z), \quad (4.287)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_1(z, \delta\omega)}{dz} = \left[\frac{G_0}{2\{1+u^2(z)/i_s\}} - \frac{G_0u^2(z)/i_s}{\{1+u^2(z)/i_s\}^2} \right] \Delta\tilde{a}_1(z, \delta\omega) + \tilde{f}_{a_1}(z, \delta\omega), \quad (4.288)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_2(z, \delta\omega)}{dz} = \frac{G_0}{2\{1+u^2(z)/i_s\}} \Delta\tilde{a}_2(z, \delta\omega) + \tilde{f}_{a_2}(z, \delta\omega), \quad (4.289)$$

という一組の発展方程式が得られる。

ここで、雑音力 $\tilde{f}_{a_1}(z, \delta\omega)$, $\tilde{f}_{a_2}(z, \delta\omega)$ の自己相関スペクトルは、それぞれ

$$\begin{aligned} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle \tilde{f}_{a_1}(z, \delta\omega) \tilde{f}_{a_1}(z', -\delta\omega') \rangle_{T_0}}{T_0} &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle \tilde{f}_{a_2}(z, \delta\omega) \tilde{f}_{a_2}(z', -\delta\omega') \rangle_{T_0}}{T_0} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left\{ \frac{2\pi \langle \tilde{f}_a(z, \delta\omega) \tilde{f}_{a^*}(z', \delta\omega') \rangle_{T_0}}{T_0} + \frac{2\pi \langle \tilde{f}_{a^*}(z, -\delta\omega) \tilde{f}_a(z', -\delta\omega') \rangle_{T_0}}{T_0} \right\} \\ &= \frac{G_0}{2\{1+u^2(z)/i_s\}} \times \frac{1}{4} \delta(z-z') \delta(\delta\omega, \delta\omega') \end{aligned} \quad (4.290)$$

と書かれる。ただし、

$$\delta(\omega, \omega') = \begin{cases} 1 & (\omega = \omega'), \\ 0 & (\omega \neq \omega'), \end{cases} \quad (4.291)$$

とおいた。この主成分雑音および直交位相成分雑音に対する自己相関スペクトルは、反射率 $-G_0/(1+u(z)/i_s)$ の部分透過ミラーが連続的に分布しているときに与えられるものと全く同等である。

上に示した結果を用いて、レーザシステムの動作を解析する。外部共振器型の場合と同様、共振器内の光の進行方向に沿って z 軸を設定し、非線型光学結晶の入射端を $z=0$ とする。また、長さ l_L のレーザ媒質の入射端を $z=z_0$ とおく。レーザ媒質内での平均値 $u(z)$ ($z_0 < z < z_0 + l_L$) は、(4.287) を解くことにより

$$\frac{1}{2} \{u^2(z) - u(z_0)^2\} + i_s \ln \frac{u(z)}{u(z_0)} = \frac{G_0 i_s (z - z_0)}{2}, \quad (4.292)$$

で与えられることが分かる。

いま、揺らぎ $\Delta\tilde{a}_1(z, \delta\omega)$ のドリフト係数を

$$H_1(z) \equiv \frac{G_0}{2\{1+u^2(z)/i_s\}} - \frac{G_0u^2(z)/i_s}{\{1+u^2(z)/i_s\}^2}, \quad (4.293)$$

とおく。また、Langevin 力を

$$\tilde{f}_{a_1}(z, \delta\omega) = F_1(z) t_1(z, \delta\omega) \quad (4.294)$$

$$F_1(z) = \sqrt{\frac{G_0}{1 + u^2(z)/i_s}}, \quad (4.295)$$

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle t_1(z, \omega) t_1(z', -\omega') \rangle_{T_0}}{T_0} = \frac{1}{4} \delta(z - z') \delta(\omega, \omega'), \quad (4.296)$$

とにおいて、システムの運動に依存する部分 F_1 と乱雑力 t_1 とに分離しておく。すると、レーザー媒質の出力端では、揺らぎ $\Delta a_1(l_L, \delta\omega)$ は、

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{a}_1(z_0 + l_L, \delta\omega) &= G_1 \Delta \tilde{a}_1(z_0, \delta\omega) \\ &+ G_1 \int_{z_0}^{z_0 + l_L} dz' f_{a_1}(z', \delta\omega) \exp\left\{-\int_{z_0}^{z'} H_1(z'') dz''\right\}, \end{aligned} \quad (4.297)$$

と表される。ただし、揺らぎの増幅率を

$$G_1 = \exp\left\{\int_{z_0}^{z_0 + l_L} H_1(z') dz'\right\}, \quad (4.298)$$

とおいた。一方、非線型結晶での基本波および第二高調波揺らぎの相互作用は、(4.162) より、

$$\Delta \tilde{a}_1(l, \omega) = N_{11} \Delta \tilde{a}_1(0, \delta\omega) + N_{13} \Delta \tilde{r}_1(0, \delta\omega), \quad (4.299)$$

$$\Delta \tilde{r}_1(l, \omega) = N_{31} \Delta \tilde{a}_1(0, \delta\omega) + N_{33} \Delta \tilde{r}_1(0, \delta\omega), \quad (4.300)$$

で表される。これらに加え、周回に伴う損失 $1 - T$ を考慮すれば、共振器場に関する $z = 0$ における無撞着条件を導くことができる。すなわち、平均値 $u(0)$ については、

$$\frac{1}{2} \left[u^2(0) - \frac{(1 - T)u^2(0)}{\cosh^2\{\kappa u(0)l/\sqrt{2}\}} \right] + i_s \ln \frac{\cosh\{\kappa u(0)l/\sqrt{2}\}}{\sqrt{1 - T}} = \frac{G_0 i_s l_L}{2}, \quad (4.301)$$

また、揺らぎ $\Delta \tilde{a}_1(0, \delta\omega)$ については

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{a}_1(0, \delta\omega) &= \frac{\sqrt{1 - T} G_1 N_{13} e^{i\delta\omega\tau}}{1 - \sqrt{1 - T} G_1 N_{11} e^{i\delta\omega\tau}} \Delta \tilde{r}_1(0, \delta\omega) \\ &+ \frac{\sqrt{1 - T} N_{31} G_1 e^{i\delta\omega\tau}}{1 - \sqrt{1 - T} G_1 N_{11} e^{i\delta\omega\tau}} \int_{z_0}^{z_0 + l_L} dz' F_1(z) \tilde{t}_1(z', \delta\omega) \\ &+ \frac{\sqrt{T} N_{31}}{1 - \sqrt{1 - T} G_1 N_{11} e^{i\delta\omega\tau}} \Delta \tilde{s}_1(\delta\omega), \end{aligned} \quad (4.302)$$

である。ただし、 $\Delta \tilde{s}_1(\delta\omega)$ を損失に伴う Langevin 力 (周波数領域) とした。

上によって導かれた $z = 0$ における成分を利用して、出力第二高調波の振幅雑音スペクトルは

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{r}_1(l, \delta\omega) &= \left\{ N_{33} + \frac{\sqrt{1 - T} G_1 N_{31} N_{13} e^{i\delta\omega\tau}}{1 - \sqrt{1 - T} G_1 N_{11} e^{i\delta\omega\tau}} \right\} \Delta r_1(0, \delta\omega) \\ &+ \frac{\sqrt{1 - T} G_1 N_{31} e^{i\delta\omega\tau}}{1 - \sqrt{1 - T} G_1 N_{11} e^{i\delta\omega\tau}} \int_{z_0}^{z_0 + l_L} dz' F_1(z') t_1(z', \delta\omega) \exp\left\{-\int_{z_0}^{z'} H_1(z'') dz''\right\} \\ &+ \frac{\sqrt{T} N_{31}}{1 - \sqrt{1 - T} G_1 N_{11} e^{i\delta\omega\tau}} \Delta s_1(\delta\omega), \end{aligned} \quad (4.303)$$

と書くことができ、その自己相関スペクトルは、

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{1\text{out}}(\delta\omega) &\equiv \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle \Delta \tilde{r}_1(l, \delta\omega) \Delta \tilde{r}_1(l, -\delta\omega) \rangle_{T_0}}{T_0} \\
&= \left[\left| N_{33} + \frac{\sqrt{1 - T} G_1 N_{31} N_{13} e^{i\delta\omega\tau}}{1 - \sqrt{1 - T} G_1 N_{11} e^{i\delta\omega\tau}} \right|^2 \right. \\
&\quad + \left. \frac{\sqrt{1 - T} G_1 N_{31} e^{i\delta\omega\tau}}{1 - \sqrt{1 - T} G_1 N_{11} e^{i\delta\omega\tau}} \right|^2 \int_{z_0}^{z_0+L} dz' F_1^2(z') \exp \left\{ -2 \int_{z_0}^{z'} H_1(z'') dz'' \right\} \\
&\quad + \left. \frac{\sqrt{T} N_{31}}{1 - \sqrt{1 - T} G_1 N_{11} e^{i\delta\omega\tau}} \right|^2 \right] \times \frac{1}{4}, \tag{4.304}
\end{aligned}$$

と表されることになる。同様にして直交振幅雑音スペクトルも求めることができ、その自己相関スペクトルは

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{2\text{out}}(\delta\omega) &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle \Delta \tilde{r}_2(l, \delta\omega) \Delta \tilde{r}_2(l, -\delta\omega) \rangle_{T_0}}{T_0} \\
&= \left[\left| N_{44} + \frac{\sqrt{1 - T} G_2 N_{42} N_{24} e^{i\delta\omega\tau}}{1 - \sqrt{1 - T} G_2 N_{22} e^{i\delta\omega\tau}} \right|^2 \right. \\
&\quad + \left. \frac{\sqrt{1 - T} G_2 N_{42} e^{i\delta\omega\tau}}{1 - \sqrt{1 - T} G_2 N_{22} e^{i\delta\omega\tau}} \right|^2 \int_{z_0}^{z_0+L} dz' F_2^2(z') \exp \left\{ -2 \int_{z_0}^{z'} H_2(z'') dz'' \right\} \\
&\quad + \left. \frac{\sqrt{T} N_{42}}{1 - \sqrt{1 - T} G_2 N_{22} e^{i\delta\omega\tau}} \right|^2 \right] \times \frac{1}{4}, \tag{4.305}
\end{aligned}$$

となることがわかる。ただし、

$$H_2(z) \equiv \frac{G_0}{2 \{ 1 + u^2(z)/i_s \}}, \tag{4.306}$$

$$F_2(z) \equiv \sqrt{\frac{G_0}{2 \{ 1 + u^2(z)/i_s \}}}, \tag{4.307}$$

$$G_2 \equiv \exp \left\{ \int_{z_0}^{z_0+L} H_2(z') dz' \right\}, \tag{4.308}$$

とおいた。

4.6.2 数値例

図 4.8 は、出力第二高調波の零周波数における雑音スペクトル密度を、励起率に対してプロットしたものである。ここで、共振器損失は 1%、飽和光子束 i_s は 1.23×10^{18} 1/s とした。この飽和光子束は、Nd³⁺:YAG を実効ビーム径 0.01mm² で運用した場合に相当する。図中の実線 ($\kappa l = 8.85 \times 10^{-12} \sqrt{s}$) は、5mm 長の MgO:LiNbO₃ を同じビーム径で運用した場合に相当する。

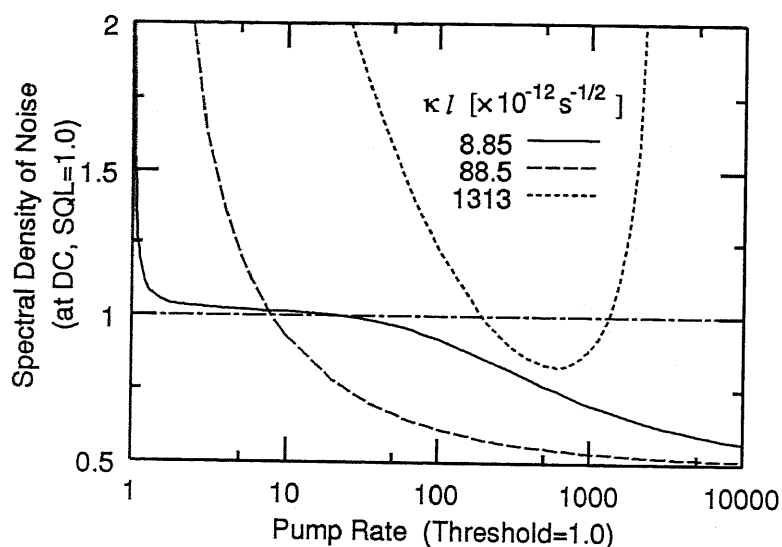


図 4.8: 出力第二高調波の零周波数における雑音スペクトル密度と励起率との関係。横軸は閾値のポンプ率で、縦軸はショット雑音レベル (SQL) で規格化している。

励起率の増加に伴う出力雑音の変化について考える。非線型相互作用長が比較的短い場合には、ショット雑音レベルに近付き、やがてこれを下回り、最小値 50% へと漸減する。ショット雑音レベルを下回するためには、共振器内周回中の線型損失を非線型損失が上回らなければならない。このため、限られた励起率で良好なスクイーミング特性を得るためには、非線型結合定数と相互作用長の距離の積 (κl 、以後「結合長」とする) を大きくしなければならない。図中破線は、結合長を 10 倍にした場合の特性であるが、実線に比べて比較的容易に、ショット雑音以下に抑圧できることが示されている。ところが、更に結合長が長くなる点線では、むしろ雑音は増大していることが分かる。

図 4.9 は結合長と雑音レベルの最小値との関係を示したものである。なお横軸は、非線型結晶入射端における光の振幅がレーザー媒質の飽和強度を達成した場合の無次元相互作用長

$$\xi_0 = \frac{\kappa l \sqrt{i_s}}{\sqrt{2}}, \quad (4.309)$$

(以後、飽和作用長) である。本図より、飽和作用長が 1 のとき、20% 程度のスクイーミングに留まっており、これ以上の非線型性は雑音を増加させるだけであることがわかる。

この解析結果は以下のように説明することができる。

一般に、レーザーの出力光がショット雑音レベルに達するためには、利得の飽和が生じ、自然放出による雑音が増加される必要がある。一方、共振器内部に非線型光学結晶を含むレー

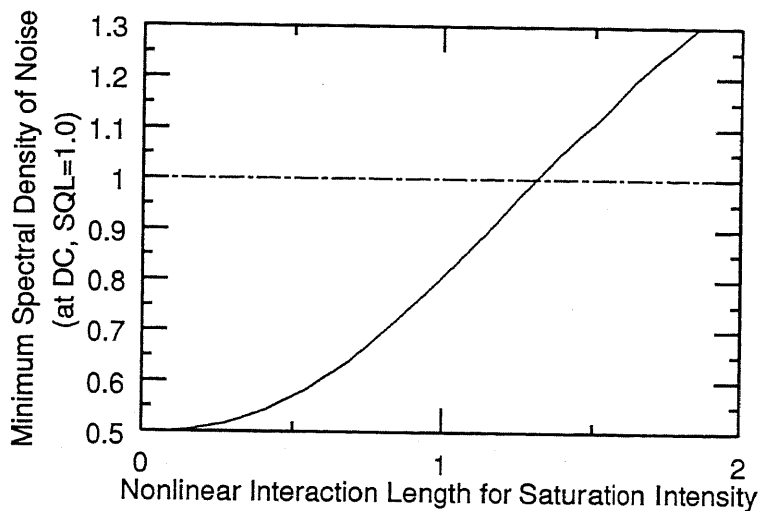


図 4.9: 出力第二高調波の零周波数における雑音スペクトル密度の最小値と非線型相互作用距離との関係。縦軸はショット雑音レベル (SQL) で規格化している

ザでは、レーザ利得の飽和以外に、共振器内の光の場を抑制する機構、すなわち非線型損失が存在している。

いま、非線型損失による光の場の抑制が、レーザ利得の飽和による抑制よりも大であるとする。すると、レーザ媒質自身による自然放出雑音の抑制も、相対的に小さくなる。このことは、レーザ増幅時に付加される雑音が、標準量子雑音限界に到達しないことを意味する。すなわち、基本波自身の過剰な雑音によって、第二高調波出力の雑音特性も劣化してしまうのである。従って、本システムによってスクイーミングを実現するためには、レーザ媒質の飽和が非線型損失による飽和以前に生じていなければならない。

レーザ媒質の飽和を決定するのは飽和光子束 i_s であり、一方、非線型結合の強さを示すパラメータは無次元相互作用長 ξ である。後者は結晶への入射地点における光子束の関数である。共振器内を周回している光子束が飽和光子束に等しくなった時、すでに十分な無次元相互作用長が達成されているとすれば、この場合には非線型損失による飽和の方が大きかったことになる。逆に、十分な無次元相互作用長が達成されていなければ、レーザ媒質自身による飽和が生じる。その目安を与えるのが式 (4.309) で与えられる飽和作用長である。

なお、このパラメータは非線型結晶、レーザ媒質、共振器などのパラメータによって一意に定まる定数である。すなわち、システムが達成可能なスクイーミング量の目安と云うことができる。

4.7 まとめ

本章では、光共振器を用いたデバイスの出力量子雑音特性を評価するため、共振器内部における光波の発展を考慮した解析法を確立し、これを用いて基本波閉じ込め型第二高調波発生システムの量子雑音特性を評価した。その手法は、1. 全ての光波をフーリエ変換によって表し、2. 自己無撞着条件によって共振器場の統計を算出し、3. これを用いて出力場の統計を導くものである。

その結果、基本波出力および第二高調波出力で100%のスケーリングが可能であることを予測した。これは通常のアVERAGE場近似による解析では予測し得なかったことである。

また、パラメトリック同時発振現象の蓋然性を調べ、Type-I位相整合の場合は生じにくく、Type-II位相整合の場合は最大変換効率を与える点で発振を生じることを明らかにした。これはアVERAGE場近似で得られたものと同様の結論である。

次に同様の手法を用いてレーザ内部型システムの解析を行い、50%までのスケーリングが可能であることを確認した。しかし、非線型結合長が過大であると、むしろ雑音が増大しスケーリングが消失することが予想された。これはアVERAGE場近似では得られなかった結論である。

第 5 章

パラメトリック同時発振による二重閉じ込め型システムの雑音特性劣化

第 2 章で述べた通り、比較的低い光パワーで効率良い高調波発生を行うためには、基本波だけでなく、第二高調波も閉じ込める二重閉じ込め型が有利である。また、スクイージングの面からも、有限の光パワーで極めて大きいスクイージング量が期待できるという、大きな利点を持つ。最近では、非線型光学結晶内部で全反射を生じさせるモノリシック型デバイス (MOTIRR) が開発され、従来問題とされていた共振器の安定度が著しく改善された。[34,45]

二重閉じ込め型システムでは、基本波・第二高調波モード間でやりとりされるエネルギー率がシステム全体の損失率を上回ると、共振器場振幅が自励振動することが知られている。[46,47] 有限のパワーで大きいスクイージング量が得られるのは、この自励振動による不安定性が、共転量の大きい揺らぎを保証するからである。[32]

ところが、発生した第二高調波をポンプ光源として、空の共振器モード内 (以下これを側波モードと呼ぶ) にパラメトリック利得が生じ、やがて発振を生じることが報告された。[34] この現象については、基本波モード、第二高調波モード、それと側波モード 2 つ、計 4 つを対象とした解析が行われている。[34,35,48] その結論は、比較的広い周波数範囲で位相整合条件が満たされ、側波モードと基本波モードの損失が同程度の場合には、必ず側波モードの発振閾値が下になるというものである。このため、システムの最大スクイージング量が制限される可能性がある。

ところで、上に挙げた解析で用いられたモデルには、第二高調波モードの周波数近傍に存在する縦モードは考慮されていなかった。これらのモードは、側波モードと基本波によって発生する和周波成分と結合し得るため、全モードを励振するのに必要なエネルギーが増加する可能性がある。

本章の目的は、この高周波域のモードが、側波モードのパラメトリック発振閾値に及ぼす影響を調べ、スクイーミング量が制限されるか否かを調べることにある。まず、二重閉じ込め型システムによるスクイーミングと線型安定性の関係、および側波モードのパラメトリック発振閾値に関する従来の予測を述べる。次に、解析に供するモデルと基本方程式を示し、その線型安定性解析から、パラメトリック発振の閾値と、自励振動の閾値とを求め、両者の関係を議論する。最後に、閾値付近における出力場の雑音特性を計算し、パラメトリック発振の影響について考察する。

5.1 二重閉じ込め型システムのスクイーミング特性

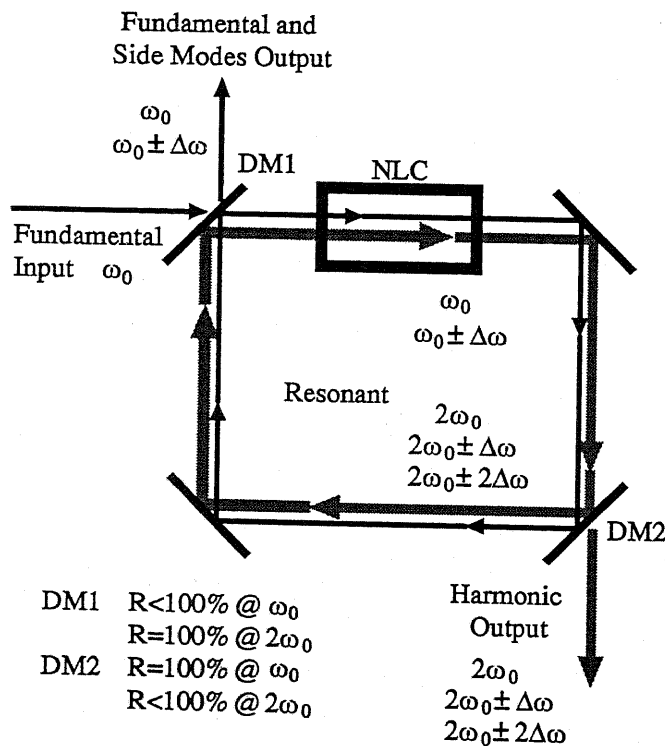


図 5.1: 二重閉じ込め型第二高調波発生システムの模式図。DM1, DM2: ダイクロミックミラー、NLC: 非線型光学結晶。

図 5.1 に二重閉じ込め型第二高調波発生システムの模式図を再掲する。共振器は基本波入力の周波数 ω_0 及び $2\omega_0$ で同時に共振しており、そのモード間隔 (FSR) は $\Delta\omega$ であるとする。また、結晶は完全に位相整合条件を満足している、即ち、基本波、第二高調波の両者に対して同じ大きさの屈折率を有しているとする。更に、結晶内での波長分散は、FSR 程

度の周波数差内では無視できるものと仮定する。

いま、基本波モード \tilde{a} とその側波モード \tilde{a}_{\pm} 、第二高調波モード \tilde{b} の3つのモードを考える。その運動方程式は、

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = \sqrt{\gamma_a} E_0 - \frac{\gamma_a}{2} \tilde{a} - \kappa \tilde{a}^\dagger \tilde{b} - \sqrt{\gamma_a} \tilde{s}_{in}, \quad (5.1)$$

$$\frac{d\tilde{a}_{\pm}}{dt} = -\frac{\gamma_a}{2} \tilde{a}_{\pm} - \kappa \tilde{a}_{\mp}^\dagger \tilde{b} - \sqrt{\gamma_a} \tilde{s}_{\pm in}, \quad (5.2)$$

$$\frac{d\tilde{b}}{dt} = -\frac{\gamma_b}{2} \tilde{b} - \frac{\kappa}{2} \tilde{a}^2 - \sqrt{\gamma_b} \tilde{r}_{in}, \quad (5.3)$$

となる。ここで E_0 は共振器ミラーを通じて基本波を励振する力であり、入射基本波電界の振幅に比例する。各変数の位相は、この励振力の位相を基準にとり、 E_0 を実数とする。また、 \tilde{s}_{in} 、 $\tilde{s}_{\pm in}$ 、 \tilde{r}_{in} はそれぞれ、共振器の入出力ミラーで結合する開放場のうち、揺らぎ分を表す。また簡単のため、非線型結合定数 κ は、第二高調波発生/縮退パラメトリック増幅と、非縮退パラメトリック増幅で同一とし、更に、基本波モードと側波モードの共振器損失は等しいとした。

いま、側波モードの発振が生じていない、すなわち、 $\langle \tilde{a}_{\pm}^\dagger \tilde{a}_{\pm} \rangle = 0$ とする。このとき、各変数を平均値と揺らぎ成分とに分け、

$$\tilde{a} = \alpha_0 + \Delta \tilde{a}, \quad \tilde{a}^\dagger = \alpha_0^* + \Delta \tilde{a}^\dagger, \quad (5.4)$$

$$\tilde{b} = \beta_0 + \Delta \tilde{b}, \quad \tilde{b}^\dagger = \beta_0^* + \Delta \tilde{b}^\dagger, \quad (5.5)$$

$$\tilde{a}_{\pm} = \Delta \tilde{a}_{\pm}, \quad \tilde{a}_{\pm}^\dagger = \Delta \tilde{a}_{\pm}^\dagger, \quad (5.6)$$

$$\tilde{x}_{in} = \Delta \tilde{x}_{in}, \quad \tilde{x}_{in}^\dagger = \Delta \tilde{x}_{in}^\dagger, \quad (x = s, r, s_{\pm}), \quad (5.7)$$

とにおいて、 Δ に関して0次および1次の項を比較する。まず、平均値の間に次の関係が得られる。

$$0 = \sqrt{\gamma_a} E_0 - \frac{\gamma_a}{2} \alpha_0 - \kappa \alpha_0^* \beta, \quad (5.8)$$

$$0 = -\frac{\gamma_b}{2} \beta + \frac{\kappa}{2} \alpha_0^2. \quad (5.9)$$

これより、

$$\beta_0 = \frac{\kappa \alpha_0}{\gamma_b}, \quad (5.10)$$

$$0 = \sqrt{\gamma_a} E_0 - \frac{\gamma_a}{2} \alpha_0 - \frac{\kappa^2 |\alpha_0|^2}{\gamma_b} \alpha_0, \quad (5.11)$$

が得られる。 E_0 は実数としているから、式(5.11)より α_0 は実数、従って(5.10)より、 β_0 も実数となる。

これを用いて Δ の1次の項を書き下すと、

$$\frac{d\Delta\bar{a}}{dt} = -\frac{\gamma_a}{2}\Delta\bar{a} - \kappa\beta_0\Delta\bar{a}^\dagger - \kappa\alpha_0\Delta\bar{b} - \sqrt{\gamma_a}\Delta\bar{s}_{in}, \quad (5.12)$$

$$\frac{d\Delta\bar{b}}{dt} = -\frac{\gamma_b}{2}\Delta\bar{b} + \kappa\alpha_0\Delta\bar{a} - \sqrt{\gamma_b}\Delta\bar{r}_{in} \quad (5.13)$$

$$\frac{d\Delta\bar{a}_\pm}{dt} = -\frac{\gamma_a}{2}\Delta\bar{a}_\pm - \kappa\beta_0\Delta\bar{a}_\mp^\dagger - \sqrt{\gamma_a}\Delta\bar{s}_{\pm in}, \quad (5.14)$$

が得られる。ここで新たに、

$$\Delta\bar{a}_1 = \frac{\Delta\bar{a} + \Delta\bar{a}^\dagger}{2}, \quad \Delta\bar{a}_2 = \frac{\Delta\bar{a} - \Delta\bar{a}^\dagger}{2i}, \quad (5.15)$$

$$\Delta\bar{b}_1 = \frac{\Delta\bar{b} + \Delta\bar{b}^\dagger}{2}, \quad \Delta\bar{b}_2 = \frac{\Delta\bar{b} - \Delta\bar{b}^\dagger}{2i}, \quad (5.16)$$

$$\Delta\bar{a}_{1s} = \frac{\Delta\bar{a}_+ + \Delta\bar{a}_+^\dagger}{2}, \quad \Delta\bar{a}_{2s} = \frac{\Delta\bar{a}_+ - \Delta\bar{a}_+^\dagger}{2i}, \quad (5.17)$$

$$\Delta\bar{s}_{in1} = \frac{\Delta\bar{s}_{in} + \Delta\bar{s}_{in}^\dagger}{2}, \quad \Delta\bar{s}_{in2} = \frac{\Delta\bar{s}_{in} - \Delta\bar{s}_{in}^\dagger}{2i}, \quad (5.18)$$

$$\Delta\bar{r}_{in1} = \frac{\Delta\bar{r}_{in} + \Delta\bar{r}_{in}^\dagger}{2}, \quad \Delta\bar{r}_{in2} = \frac{\Delta\bar{r}_{in} - \Delta\bar{r}_{in}^\dagger}{2i}, \quad (5.19)$$

$$\Delta\bar{s}_{in1s} = \frac{\Delta\bar{s}_{+in} + \Delta\bar{s}_{-in}^\dagger}{2}, \quad \Delta\bar{s}_{in2s} = \frac{\Delta\bar{s}_{+in} - \Delta\bar{s}_{-in}^\dagger}{2i}, \quad (5.20)$$

を定義すると、 $\tau(\Delta\bar{a}_1, \Delta\bar{b}_1)$, $\tau(\Delta\bar{a}_2, \Delta\bar{b}_2)$, $\tau(\Delta\bar{a}_{1s}, \Delta\bar{a}_{2s})$ の運動は分離できて、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta\bar{a}_1 \\ \Delta\bar{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_a/2 - \kappa\beta_0 & -\kappa\alpha_0 \\ \kappa\alpha_0 & -\gamma_b/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\bar{a}_1 \\ \Delta\bar{b}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_a}\Delta\bar{s}_{in1} \\ \sqrt{\gamma_b}\Delta\bar{r}_{in1} \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta\bar{a}_2 \\ \Delta\bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_a/2 + \kappa\beta_0 & -\kappa\alpha_0 \\ \kappa\alpha_0 & -\gamma_b/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\bar{a}_2 \\ \Delta\bar{b}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_a}\Delta\bar{s}_{in2} \\ \sqrt{\gamma_b}\Delta\bar{r}_{in2} \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta\bar{a}_{1s} \\ \Delta\bar{a}_{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_a/2 - \kappa\beta_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_a/2 + \kappa\beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\bar{a}_{1s} \\ \Delta\bar{a}_{2s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_a}\Delta\bar{s}_{in1s} \\ \sqrt{\gamma_b}\Delta\bar{s}_{in2s} \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

と書くことができる。

5.1.1 自励振動現象とスクイーピング特性

まず、側波モードの影響を考えず、(5.21), (5.22) のみを考える。これらによって表されるシステムの線型安定性は、両式に見られる 2×2 行列の固有値が負の実部を持つことで判定される。このうち、(5.21) は常に安定となるが、(5.22) は

$$\kappa\beta_0 = \frac{\kappa^2\alpha_0^2}{\gamma_b} > \frac{\gamma_a + \gamma_b}{2}, \quad (5.24)$$

の時に固有値の実部が正になる。すなわち、

$$\alpha_c^2 = \frac{\gamma_b(\gamma_a + \gamma_b)}{2\kappa^2}, \quad (5.25)$$

を超えると線型不安定となり、自励振動を開始する。振動開始時の発振周波数はその時の虚部から求めることができ、

$$\omega_c = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma_b(2\gamma_a + \gamma_b)}, \quad (5.26)$$

である。

次に、基本波および第二高調波出力のスクイーミング特性を算出する。式(5.21)をフーリエ変換すると、

$$-i\omega \begin{pmatrix} \Delta\tilde{A}_1 \\ \Delta\tilde{B}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_a/2 - \kappa\beta_0 & -\kappa\alpha_0 \\ \kappa\alpha_0 & -\gamma_b/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tilde{A}_1 \\ \Delta\tilde{B}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_a} \Delta\tilde{S}_{in1} \\ \sqrt{\gamma_b} \Delta\tilde{R}_{in1} \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

が得られる。ここで、大文字の変数は、対応する小文字の変数のフーリエ変換である。これから直ちに、

$$\begin{pmatrix} \Delta\tilde{A}_1 \\ \Delta\tilde{B}_1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\text{Det}(\omega)} \begin{pmatrix} -i\omega + \gamma_b/2 & -\kappa\alpha_0 \\ \kappa\alpha_0 & -i\omega + \gamma_a/2 + \kappa\beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_a} \Delta\tilde{S}_{in1} \\ \sqrt{\gamma_b} \Delta\tilde{R}_{in1} \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

$$\text{Det}(\omega) = \left(-i\omega + \frac{\gamma_b}{2}\right) \left(-i\omega + \frac{\gamma_a}{2} + \kappa\beta_0\right) + \kappa^2\alpha_0^2, \quad (5.29)$$

が得られる。出力基本波、第二高調波の特性は、第2章で述べた入出力の関係(2.44)を用いて、

$$\Delta\tilde{S}_{out1} = \Delta\tilde{S}_{in1} + \sqrt{\gamma_a} \Delta\tilde{A}_1, \quad (5.30)$$

$$\Delta\tilde{R}_{out1} = \Delta\tilde{R}_{in1} + \sqrt{\gamma_b} \Delta\tilde{B}_1, \quad (5.31)$$

によって求めることができる。 $\Delta\tilde{S}_{out1}$, $\Delta\tilde{R}_{out1}$ の示すパワースペクトルを、それぞれ S_{out1} , R_{out1} とすれば、

$$S_{out1} = \frac{1}{|\text{Det}(\omega)|^2} \left[\gamma_a\gamma_b\kappa^2\alpha_0^2 + \left| \kappa^2\alpha_0^2 + \left(-i\omega + \frac{\gamma_b}{2}\right) \left(-i\omega - \frac{\gamma_a}{2} + \kappa\beta_0\right) \right|^2 \right] \times \frac{1}{4}, \quad (5.32)$$

$$R_{out1} = \frac{1}{|\text{Det}(\omega)|^2} \left[\gamma_a\gamma_b\kappa^2\alpha_0^2 + \left| \kappa^2\alpha_0^2 + \left(-i\omega - \frac{\gamma_b}{2}\right) \left(-i\omega + \frac{\gamma_a}{2} + \kappa\beta_0\right) \right|^2 \right] \times \frac{1}{4}, \quad (5.33)$$

が得られる。

このシステムのスクイーミングは、上で述べた自励振動現象と密接に関連していることが知られている。[32] 式(5.25)で与えられる振動の閾値付近では、振動周波数(5.26)にお

ける直交位相成分 \tilde{a}_2, \tilde{b}_2 、およびその出力 $\tilde{s}_{out2}, \tilde{r}_{out2}$ の揺らぎが極めて大きくなる。このため、共軛物理量 \tilde{a}_1, \tilde{b}_1 またはその出力 $\tilde{s}_{out1}, \tilde{r}_{out1}$ の揺らぎが極めて小さくなる可能性がある。実際、自励振動周波数付近では、閾値における出力の振幅揺らぎとして、

$$S_{out1}(\omega_c; \alpha_c) = \frac{\gamma_b}{\gamma_a + \gamma_b} \times \frac{1}{4}, \quad (5.34)$$

$$R_{out1}(\omega_c; \alpha_c) = \frac{\gamma_a}{\gamma_a + \gamma_b} \times \frac{1}{4}, \quad (5.35)$$

なるスペクトル成分が得られる。 $\gamma_a \ll \gamma_b$ であれば、第二高調波出力の雑音は 0 に近付き、他方、 $\gamma_a \gg \gamma_b$ であれば、基本波出力の雑音が 0 に近づくことが分かる。すなわち、共振器損失の比を適当に選べば、基本波または第二高調波のいずれかで任意のスクイーピング量が得られるのである。

5.1.2 側波モードのパラメトリック発振とスクイーピング

システムが線型安定に保たれるためには、(5.21), (5.22) に加え、(5.23) の行列の固有値も負の実部を持たなければならない。ところが、式 (5.23) は、第 2 章の式 (2.68), (2.69) と全く同様であり、共振器内のパラメトリック増幅を表している。その固有値は直ちに

$$-\frac{\kappa^2 \alpha_0^2}{\gamma_b} - \frac{\gamma_a}{2}, \quad \frac{\kappa^2 \alpha_0^2}{\gamma_b} - \frac{\gamma_a}{2}, \quad (5.36)$$

と得られる。前者は必ず負であり、後者は α_0 によって符号が変わる。すなわち、

$$\alpha_0^2 > \frac{\gamma_a \gamma_b}{2\kappa^2}, \quad (5.37)$$

のときに符号が正となり、システムは不安定になる。これが側波モードのパラメトリック発振である。

ここで得られた側波モードのパラメトリック発振閾値は、(5.25) で与えられる自励振動の閾値よりも常に小さい。すなわち、側波モードの線型損失が基本波モードの線型損失と等しい時には、システムの最大スクイーピング量はパラメトリック発振の閾値で規定されてしまうことになる。

なお、側波モードのスクイーピングは、共振器内パラメトリック増幅のスクイーピング特性に他ならない。式 (5.23) のフーリエ変換と入出力の関係 (2.44) を用いれば、

$$\Delta \tilde{R}_{out1s} = \frac{-i\omega - \frac{\gamma_a}{2} + \frac{\kappa^2 \alpha_0^2}{\gamma_b}}{-i\omega + \frac{\gamma_a}{2} + \frac{\kappa^2 \alpha_0^2}{\gamma_b}} \tilde{R}_{in1s}, \quad (5.38)$$

$$\tilde{R}_{out2s} = \frac{-i\omega - \frac{\gamma_a}{2} - \frac{\kappa^2 \alpha_0^2}{\gamma_b} \tilde{R}_{in2s}}{-i\omega + \frac{\gamma_a}{2} - \frac{\kappa^2 \alpha_0^2}{\gamma_b}} \quad (5.39)$$

が得られる。これより、パラメトリック発振の閾値で、 \tilde{R}_{out1s} の DC 付近における雑音スペクトルが最小値 0 (100% スクイーミング) となることが分かる。

5.2 高調波の側波モードを考慮したモデルによる閾値の導出

位相整合条件が完全に満足されていれば、基本波・第二高調波の結晶内部での位相速度は等しくなる。従って、共振器の実効長は、基本波、第二高調波共に等しくなる。媒質の分散が極めて小さければ、これらより $n \times \text{FSR}$ (n は整数) だけ離れた側波モードの実効長もほぼ等しくなる。即ち、基本波と第二高調波の共振条件が同時に満たされれば、これらの全モードも同時に共振することになる。

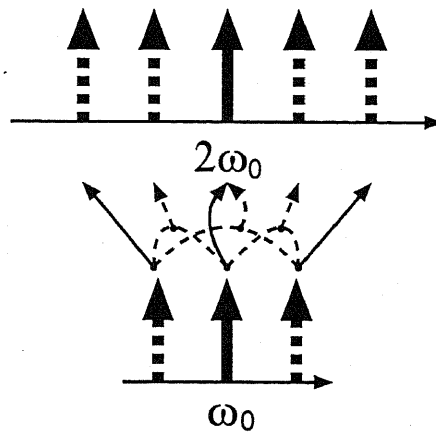


図 5.2: 本解析で考慮したモードの周波数の関係。上段: 第二高調波付近、下段: 基本波付近。実線矢印は第二高調波発生、点線矢印は和周波発生による結合を表す。

図 5.2 に、以下の解析で考慮するモードの関係を示す。図中上段が第二高調波モード付近、下段が基本波モード付近を表す。周波数 ω_0 を有する基本波モードは、第二高調波発生によって高調波モードと結合する他、側波モードとの和周波発生によって、高調波付近のモードと結合する。一方、側波モードは、基本波モードとの和周波発生と、自身の第二高調波発生によって、それぞれ別の、高調波付近のモードと結合する。

以後、側波モードと基本波モードが結合して発生する高周波モードを「和周波モード」、側波モードの第二高調波のモードを「側波第二高調波モード」と名付けることにする。

簡単のため、基本波および側波モードの損失率を同一の γ_a 、また第二高調波および和周波モード、側波第二高調波モードの損失率を同一の γ_b とおく。また、基本波・側波モードの和周波数と、和周波モードの共振周波数との差を $\delta\omega$ とする。特に、 $\delta\omega = 0$ が成り立つ場合を、全8本のモードが同時に共振しているという意味で「8重共振」と呼ぶことにする。このとき、モード振幅の間には、次の方程式が成り立つ。

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \sqrt{\gamma_a} E_0 - \frac{\gamma_a}{2} \bar{a} - \sqrt{\gamma_a} \bar{s}_{in} - \kappa \bar{a}^\dagger \bar{b} - \kappa \bar{a}_\pm^\dagger \bar{b}_\pm - \kappa \bar{a}_\pm^\dagger \bar{b}_{\pm 2}, \quad (5.40)$$

$$\frac{d\bar{a}_\pm}{dt} = -\frac{\gamma_a}{2} \bar{a}_\pm - \sqrt{\gamma_a} \bar{s}_{\pm in} - \kappa \bar{a}_\pm^\dagger \bar{b}_\pm - \kappa \bar{a}_\pm^\dagger \bar{b}_{\pm 2}, \quad (5.41)$$

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = -\frac{\gamma_b}{2} \bar{b} - \sqrt{\gamma_b} \bar{r}_{in} + \frac{\kappa}{2} \bar{a}^2 + \kappa \bar{a}_\pm \bar{a}_{\mp}, \quad (5.42)$$

$$\frac{d\bar{b}_\pm}{dt} = \left(-\frac{\gamma_b}{2} - i\delta\omega \right) \bar{b}_\pm - \sqrt{\gamma_b} \bar{r}_{\pm in} + \kappa \bar{a} \bar{a}_\pm, \quad (5.43)$$

$$\frac{d\bar{b}_{\pm 2}}{dt} = \left(-\frac{\gamma_b}{2} - 2i\delta\omega \right) \bar{b}_{\pm 2} - \sqrt{\gamma_b} \bar{r}_{\pm 2in} + \frac{\kappa}{2} \bar{a}_\pm^2, \quad (5.44)$$

ただし、 \bar{a} は基本波、 \bar{a}_\pm は側波モード対、 \bar{b} は第二高調波、 \bar{b}_\pm は和周波モード、 $\bar{b}_{\pm 2}$ 側波第二高調波モードを、それぞれ表す。また、 $E_0 > 0$ を基本波モードの励振力、 \bar{s}_{in} , $\bar{s}_{\pm in}$, \bar{r}_{in} , $\bar{r}_{\pm in}$, $\bar{r}_{\pm 2in}$ を順に、 \bar{a} , \bar{a}_\pm , \bar{b} , \bar{b}_\pm , $\bar{b}_{\pm 2}$ が共振器ミラーで結合する開放場とする。

本節では閾値を線型安定性解析によって求める。即ち、パラメトリック発振も自励振動も生じておらず、純粹に第二高調波発生システムとして動作している状態の安定性が、パラメトリック発振によって崩れる点を求めることである。なお、発振状態の定常点から求める方法は付録Cで述べる。

まず、各モード振幅を

$$\bar{a} = \alpha_0 + \Delta\bar{a}, \quad (5.45)$$

$$\bar{a}_\pm = \Delta\bar{a}_\pm, \quad (5.46)$$

$$\bar{b} = \beta_0 + \Delta\bar{b}, \quad (5.47)$$

$$\bar{b}_\pm = \Delta\bar{b}_\pm, \quad (5.48)$$

とおく。ここで、側波モードと和周波モードの平均値は0とし、また側波第二高調波モードの運動は無視した。これは、発振閾値以下で議論を行うためである。

式(5.45)―(5.48)を(5.40)―(5.44)に代入すると、線型揺らぎの方程式として

$$\frac{d\Delta\bar{a}}{dt} = -\frac{\gamma_a}{2} \Delta\bar{a} - \kappa(\beta_0 \Delta\bar{a}^\dagger + \alpha_0 \Delta\bar{b}) - \sqrt{\gamma_a} \Delta\bar{s}_{in}, \quad (5.49)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_+}{dt} = -\frac{\gamma_a}{2}\Delta\tilde{a}_+ - \kappa(\beta_0\Delta\tilde{a}_-^\dagger + \alpha_0\Delta\tilde{b}_{+1}) - \sqrt{\gamma_a}\Delta\tilde{s}_{+in}, \quad (5.50)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_-^\dagger}{dt} = -\frac{\gamma_a}{2}\Delta\tilde{a}_-^\dagger - \kappa(\beta_0\Delta\tilde{a}_+ + \alpha_0\Delta\tilde{b}_{-1}^\dagger) - \sqrt{\gamma_a}\Delta\tilde{s}_{-in}^\dagger, \quad (5.51)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{b}}{dt} = -\frac{\gamma_b}{2}\Delta\tilde{b} + \kappa\alpha_0\Delta\tilde{a} - \sqrt{\gamma_b}\Delta\tilde{r}_{in}, \quad (5.52)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{b}_+}{dt} = \left(-\frac{\gamma_b}{2} - i\delta\omega\right)\Delta\tilde{b}_+ + \kappa\alpha_0\Delta\tilde{a}_+ - \sqrt{\gamma_b}\Delta\tilde{r}_{+in}, \quad (5.53)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{b}_-^\dagger}{dt} = \left(-\frac{\gamma_b}{2} + i\delta\omega\right)\Delta\tilde{b}_-^\dagger + \kappa\alpha_0\Delta\tilde{a}_-^\dagger - \sqrt{\gamma_b}\Delta\tilde{r}_{-in}^\dagger, \quad (5.54)$$

が得られる。ここでは第二高調波発生のみが生じており、側波モードの振幅が 0 の場合を考えていることから、側波第二高調波の運動は無視してよい。

上式から明らかに、(5.49), (5.52) の組と、(5.50), (5.51), (5.53), (5.54) の組とは独立である。そこで二つを分けて考える。

5.2.1 側波モードのパラメトリック発振

まず、(5.50), (5.51), (5.53), (5.54) の組を考え、パラメトリック発振の閾値を求める。いま、

$$\Delta\tilde{a}_{1s} = \frac{\Delta\tilde{a}_+ + \Delta\tilde{a}_-^\dagger}{2}, \quad \Delta\tilde{a}_{2s} = \frac{\Delta\tilde{a}_+ - \Delta\tilde{a}_-^\dagger}{2i}, \quad (5.55)$$

$$\Delta\tilde{b}_{1s} = \frac{\Delta\tilde{b}_+ + \Delta\tilde{b}_-^\dagger}{2}, \quad \Delta\tilde{b}_{2s} = \frac{\Delta\tilde{b}_+ - \Delta\tilde{b}_-^\dagger}{2i}, \quad (5.56)$$

$$\Delta\tilde{s}_{1s} = \frac{\Delta\tilde{s}_{+in} + \Delta\tilde{s}_{-in}^\dagger}{2}, \quad \Delta\tilde{s}_{2s} = \frac{\Delta\tilde{s}_{+in} - \Delta\tilde{s}_{-in}^\dagger}{2i}, \quad (5.57)$$

$$\Delta\tilde{r}_{1s} = \frac{\Delta\tilde{r}_{+in} + \Delta\tilde{r}_{-in}^\dagger}{2}, \quad \Delta\tilde{r}_{2s} = \frac{\Delta\tilde{r}_{+in} - \Delta\tilde{r}_{-in}^\dagger}{2i}, \quad (5.58)$$

を定義すると、それぞれ

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_{1s}}{dt} = -\frac{\gamma_a}{2}\Delta\tilde{a}_{1s} - \kappa(\beta_0\Delta\tilde{a}_{1s} + \alpha_0\Delta\tilde{b}_{1s}) - \sqrt{\gamma_a}\Delta\tilde{s}_{1s}, \quad (5.59)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_{2s}}{dt} = -\frac{\gamma_a}{2}\Delta\tilde{a}_{2s} - \kappa(\beta_0\Delta\tilde{a}_{2s} + \alpha_0\Delta\tilde{b}_{2s}) - \sqrt{\gamma_a}\Delta\tilde{s}_{2s}, \quad (5.60)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{b}_{1s}}{dt} = \left(-\frac{\gamma_b}{2} - i\delta\omega\right)\Delta\tilde{b}_{1s} + \kappa\alpha_0\Delta\tilde{a}_{1s} - \sqrt{\gamma_b}\Delta\tilde{r}_{1s}, \quad (5.61)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{b}_{2s}}{dt} = \left(-\frac{\gamma_b}{2} - i\delta\omega\right)\Delta\tilde{b}_{2s} + \kappa\alpha_0\Delta\tilde{a}_{2s} - \sqrt{\gamma_b}\Delta\tilde{r}_{2s}, \quad (5.62)$$

と書き直すことができる。このとき、2つのベクトル $\tau(\Delta\tilde{a}_{1s}, \Delta\tilde{b}_{1s})$, $\tau(\Delta\tilde{b}_{2s}, \Delta\tilde{a}_{2s})$ の運動は独立となり、後者の運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta\tilde{a}_{2s} \\ \Delta\tilde{b}_{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_a/2 + \kappa\beta_0 & -\kappa\alpha_0 \\ \kappa\alpha_0 & -\gamma_b/2 - i\delta\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tilde{a}_{2s} \\ \Delta\tilde{b}_{2s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_a} \Delta\tilde{s}_{2s} \\ \sqrt{\gamma_b} \Delta\tilde{r}_{2s} \end{pmatrix}, \quad (5.63)$$

で表される。

システムの線型安定性は、(5.63)中の 2×2 行列の固有値が正の実部を持つ時に失われる。即ち、

$$0 < -\frac{\gamma_a + \gamma_b}{2} + \kappa\beta_0 + \left| \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\gamma_a + \gamma_b}{2} + i\delta\omega - \kappa\beta_0 \right)^2 - 4 \left(\frac{\gamma_a}{2} - \kappa\beta_0 \right) \left(\kappa^2 \alpha_0^2 + \frac{\gamma_b}{2} + i\delta\omega \right) \right]^{1/2} \right|, \quad (5.64)$$

の時である。

特に8重共振($\delta\omega = 0$)の時は、

$$\kappa\beta_0 > \frac{\gamma_a + \gamma_b}{2}, \quad (5.65)$$

である。第二高調波モードの定常振幅は $\beta_0 = \kappa\alpha_0^2/\gamma_b$ で与えられるから、

$$\frac{\kappa^2 \alpha_0^2}{\gamma_b} > \frac{\gamma_a + \gamma_b}{2}, \quad (5.66)$$

が不安定領域ということになる。すなわち、8重共振条件が満たされている場合、側波モードのパラメトリック発振閾値は

$$\alpha_0^2 = \frac{\gamma_b(\gamma_a + \gamma_b)}{2\kappa^2}, \quad (5.67)$$

で与えられることが分かる。

5.2.2 自励振動との関係

一方、式(5.49)および(5.52)は、基本波モードと第二高調波モードだけを考慮した時の、揺らぎの時間発展を表すものであり、(5.12), (5.13)と全く一致する。従って、その線型安定性が失われるのは、(5.25)より

$$\alpha_c^2 = \frac{\gamma_b(\gamma_a + \gamma_b)}{2\kappa^2}, \quad (5.68)$$

の時である。これは、(5.67)に一致する。

これは偶然の一致ではなく、(5.22)と(5.63)で $\delta\omega = 0$ としたものが全く同一の方程式であることに由来する。この事実は、自励発振現象がパラメトリック発振の一種として解釈

可能であることを意味する。即ち、自励振動現象は、基本波モードそのものに生じるパラメトリック発振と考えることができる。文献 [48] で述べられている「非線型性の競合」は、パラメトリック発振を生じるモード競合に他ならない。

もし、和周波発生の効果を見れば、パラメトリック発振の閾値は (5.37) で与えられる。これは側波モードと和周波モードが同時には共振しない場合 ($\delta\omega \gg \gamma_a, \gamma_b$) に相当する。

基本波・側波モードの和周波数と、和周波モードの共振周波数との差 ($\delta\omega \neq 0$) が存在する場合、側波モードの発振閾値 α_c は、(5.64) より

$$0 = -\frac{\gamma_a + \gamma_b}{2} + \frac{\kappa^2 \alpha_c^2}{\gamma_b} + \left| \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\gamma_a + \gamma_b}{2} + i\delta\omega - \frac{\kappa^2 \alpha_c^2}{\gamma_b} \right)^2 - 4 \left(\frac{\gamma_a}{2} - \frac{\kappa^2 \alpha_c^2}{\gamma_b} \right) \left(\kappa^2 \alpha_c^2 + \frac{\gamma_b}{2} + i\delta\omega \right) \right]^{1/2} \right|, \quad (5.69)$$

で与えられ、(5.66), (5.37) の間:

$$\frac{\gamma_a \gamma_b}{2\kappa^2} < \alpha_c^2 < \frac{\gamma_a \gamma_b}{2\kappa^2} \left(1 + \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \right), \quad (5.70)$$

に存在することが分かる。

5.3 閾値の変化と雑音特性

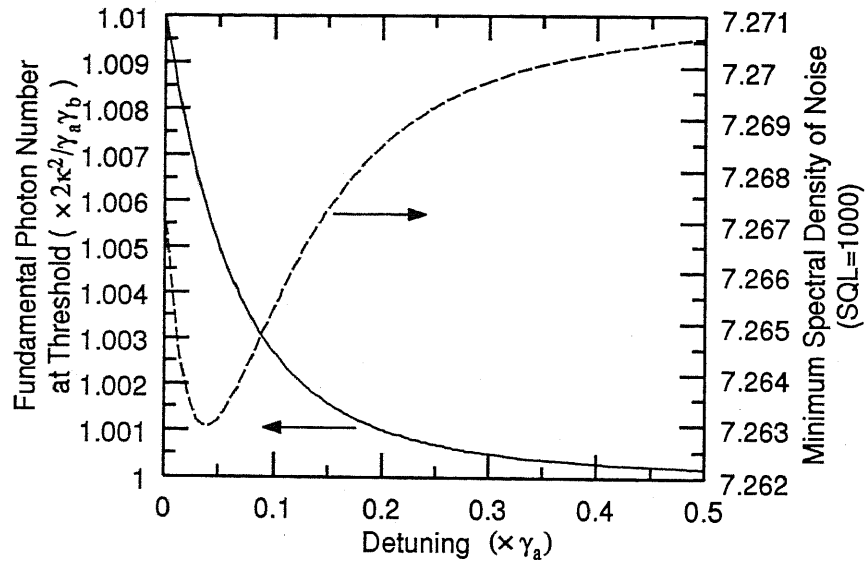
5.3.1 スクイーミング特性の変化

達成可能なスクイーミング量は、基本波光子数 α_0^2 とほぼ正の相関を持ち、特に第二高調波では α_0^2 の単調増加関数となる。そこで、閾値の変化はスクイーミング量の限界に何らかの影響を与えるはずである。

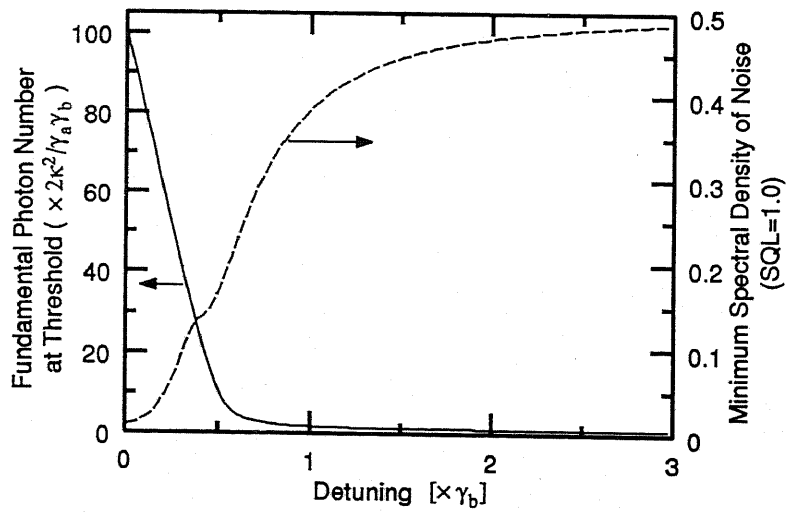
式 (5.70) から明らかなように、閾値に大きな差が生じるのは $\gamma_a \ll \gamma_b$ の場合であるが、これは第二高調波出力のスクイーミング特性が良好なシステムである (式 (5.35) による)。すなわち、第二高調波出力が達成可能なスクイーミング量は、和周波モードの離調度に大きく依存することが予想される。

図 5.3 は、 $\gamma_b \ll \gamma_a$ なるシステムの基本波出力揺らぎ、および、 $\gamma_a \ll \gamma_b$ なるシステムの第二高調波出力揺らぎについて、離調度 $\delta\omega$ との関係を計算したものである。ここで、 $\kappa=400\text{s}^{-1}$ 、図 (a) では $\gamma_a = 100\gamma_b = 6.28 \times 10^7 \text{s}^{-1}$ 、図 (b) では $\gamma_b = 100\gamma_a = 6.28 \times 10^7 \text{s}^{-1}$ 、とした。両図とも、実線は閾値の変化を、破線は閾値におけるスペクトルの最小値を示す。

図から明らかなように、 $\gamma_b \ll \gamma_a$ なるシステムでは閾値の変化は小さく、得られる基本波出力の雑音特性も、変化が小さい。一方、 $\gamma_a \ll \gamma_b$ なるシステムでは、極めて大きな変化が見られる。離調 $\delta\omega = 0$ のときは 99% 程度のスクイーミングが予測されているところが、 $\delta\omega = 3\gamma_b$ 程度では、閾値の大幅な低下に伴い、51% 程度まで減少している。



(a)



(b)

図 5.3: 和周波モードの離調度に対する、パラメトリック発振閾値と出力雑音スペクトルの最小値。(a): $\gamma_b \ll \gamma_a$ 、閾値と基本波出力雑音のスペクトル、(b): $\gamma_a \ll \gamma_b$ 、閾値と第二高調波出力雑音のスペクトル。

以上より、側波モードのパラメトリック発振は、第二高調波のスケーリングを目的としたシステムに大きな影響を与え、その大きさは和周波モードの離調度に大きく依存することが示された。

5.3.2 発振可能な側波モードと発振閾値との関係

ポンプ光、信号光、アイドラ光全てを閉じ込める「三重共振型」パラメトリック発振器では、クラスタと呼ばれる周波数的に不連続的な共振モード群で発振することが知られている。[49] このように発振する周波数帯が限られるのは、パラメトリック発振の要請する周波数の対称性と、波長分散によるモード間隔の非対称化が原因である。

第二高調波発生における二重共振条件（基本波モードと第二高調波モードの離調が共に0）とは、逆過程である縮退パラメトリック発振の実現条件に他ならない。これと同一のクラスタ内での近縮退パラメトリック発振が生じる場合には、基本波、信号光、アイドラ光は、ほぼ同一のモード間隔で並ぶ一群の共振モードに属することになる。一方、位相整合条件はポンプ光（第二高調波）付近のモード間隔を、上記のモード間隔に一致させている。これは8重共振のモデルに適合する。

一方、これ以外のクラスタで発振する場合には、基本波、第二高調波、信号光、アイドラ光全ての周波数域で、モード間隔が異なる。特に、和周波モードが同時に共振する見込みはほとんど無い。従って、これらの非縮退発振を考慮する場合には、従来の4重共振モデルを用いる必要がある。しかし、第二高調波発生の二重共振条件を満たし、同時に他のクラスタでの発振条件を満足することは、一般には不可能である。実際、Schillerらによる実験[34]では、側波モードのパラメトリック発振は、二重共振条件を緩め、第二高調波モードに離調を加えた場合に観測されている。この結果は、動作点の安定化によって、これらのクラスタでのパラメトリック発振が抑圧できることを意味する。

以上の議論を整理する：位相整合条件と二重閉じ込め条件が同時に満足されているシステムにおいて、縮退パラメトリック発振と同一のクラスタ以外では発振が生じにくい。一方、縮退パラメトリック発振と同一のクラスタでは、和周波モードの存在により発振閾値が上昇し、自励振動の閾値に近づく。従って、本システムの安定化が十分に行われれば、自励振動直前における運用が実現でき、極めて良好なスケーリング特性が得られるものと予見される。

5.4 まとめ

本章では、二重閉じ込め型第二高調波発生システムにおける、側波モードのパラメトリック発振に関して解析を行い、達成可能なスクイーピング量を検討した。従来の理論では無視されていた和周波発生の効果を考慮すると、側波モードの発振閾値が上方に修正され、特に和周波でも共振条件が満足されると、線型安定性解析から導かれていた自励振動現象の閾値と一致することが分かった。また、閾値の変化とスクイーピング量の関係を調べたところ、第二高調波に大きいスクイーピングをもたらすシステムほど影響が大きいことが明らかになった。

従来、側波モードのパラメトリック発振は、共振器損失とパラメトリック利得のみによって議論されてきた。しかし、これらに加えて和周波発生が、その閾値特性に大きな影響を与えることが明らかになった。即ち、スクイーピングの限界を与えることになるこの発振現象を評価するためには、和周波発生への配慮が不可欠であることが明らかになったのである。

第 6 章

結言

本論文では、光共振器を用いた第二高調波発生システムの量子雑音特性を理論的に検討し、解析手法の確立と、量子雑音の理論的限界の体系化を目指した。具体的には、システムの達成可能なスクイーミング特性と、これを劣化させる側波モードのパラメトリック発振の可能性の解析である。

まず、スクイーミング特性について新たに得られた結論を述べる。

従来、基本波のみ閉じ込めるシステムの解析に用いられてきた二光子損失モデルは、低次の摂動近似であり、共振器内を周回する基本波パワーが大きい場合には適用することができない。この不具合を克服する手段として、一周回後に同一の特性となる条件からシステムの特性を導く「自己無撞着法」を、揺らぎにまで適用する方法を提案した。

この結果、従来得られていたスクイーミング特性の限界は誤りであることが明らかになった。すなわち、基本波・第二高調波とも、スクイーミング量に限界はなく、基本波を導入する入力ミラーの透過率のみによって決まる。

また、レーザ内部に非線形結晶を含むシステムでは、最大スクイーミング量 (50%) を達成するためには、ある一定の関係がシステムパラメータに必要であることを予見した。二光子損失モデルによる解析では、非線形性が大きいほどスクイーミング量が増大すると結論されていたが、本解析によって、過剰な非線形性はむしろ雑音を増大させ、スクイーミングを消失させ得ることが示された。

次に、側波モードのパラメトリック発振に関連した結論を述べる。

基本波のみ閉じ込めるシステムについて検討したところ、第二高調波発生・パラメトリック増幅・和周波発生 of 全てに位相整合条件が満たされている場合には、入射基本波と同一偏波をもつ共振器モードは発振しにくいことが予見された。一方、入射基本波と直交する偏波モードが空になっている Type-II 位相整合を用いたシステムでは、この直交する偏波モードが発振し、出力の雑音特性を著しく劣化させることも明らかになった。

表 6.1: 第二高調波発生システムの最大スクイーピング量と不安定性

		基本波 供給	最大スクイーピング量		パラメトリック 発振 (Type-I/II)
			基本波	第二高調波	
進行波型	—	外部	100% [35]	50% [35]	×/×
基本波閉じ込め型	外部共振器型	外部	100%†	100%†	×/○†
	レーザ内部型	内蔵	12.5% [39]	50% [33]	×/×
二重閉じ込め型	外部共振器型	外部	100% [32]	100% [32]	○/○
	レーザ内部型	内蔵	12.5% [39]	50% [39]	△/△

表中の [] 内の数字は対応する文献番号。† は本論文で新たに明らかにされた項目。

×: 発振せず、○: 発振のおそれあり、△ 発振 (定常分岐) のおそれあり

また、第二高調波をも閉じ込めるシステムについては、基本波の側波モードのみではなく、第二高調波の側波モードも同時に考慮することにより、自励発振現象と空のモードのパラメトリック発振との関係を議論した。この結果、自励発振現象は、基本波モードそのものに生じたパラメトリック発振であり、空のモードのパラメトリック発振とまったく同一のメカニズムで生じていることを明らかにした。また、各側波モードのモード間隔の差によって、パラメトリック発振の閾値が変化し、これに応じて達成可能なスクイーピング量が変化することを明らかにした。

これまでに得られている、各システムの最大スクイーピング量とパラメトリック同時発振の可能性について、表 6.1 にまとめる。表中、本論文で取り扱わなかったのは、二重閉じ込め型システムの進行波解析である。その運動特性については、既に文献 [44] で詳細に解析されており、定量的には平均場近似とは異なるものの、定性的には同様の振動現象が発生し得ることが知られている。第 5 章で示した通り、スクイーピング特性については、既に平均場近似の下で 100% の抑圧が可能であることが知られている。しかも、自励発振開始点の直前という、有限の光強度で実現される。共振器損失が小さい場合には、発振開始点における一回通過時の共振器場の変化も小さくて済む。即ち、このスクイーピング特性に関する予見は、平均場近似の成立し得る範囲でのものである。このため、進行波解析を行ったとしても、大幅な訂正は無いものと考えられる。

以上により、共振器を用いた第二高調波発生システムが、振幅のスクイーピングに極めて有望であることが、あらためて確認された。特に、これまで限界があるとされてきた基本波閉じ込め型システムのスクイーピング特性に、本質的な限界が存在しないとする結論は、

安定性に問題のある二重閉じ込め型以外の選択肢を増やすことになった。今後のより一層の実験上の展開が期待できる。

最後に、基本波閉じ込め型第二高調波発生によるスクイーピングの実現に関して私見を述べる。本論文で述べた通り、振幅のスクイーピングは強度が大きくなるにつれて最大値に近づく。しかし、ショット雑音の性質から明らかなように、信号対雑音比は信号強度が大きいほど改善される。すなわち、光強度が大きい場合には、ショット雑音レベルであっても既に極めて小さくなっている。従って、むしろ強度の小さいスクイズド光が望まれるところであるが、これを実現するためには、より低いパワーで同様の効果を得なければならない。

現状では、非線形定数の大きい材料は多数発見されているものの、損失が大きい、位相整合が満足されない、という2つの大きな問題が存在し、実用化に至っていない。損失と非線形性の間には Kramers-Krönig の関係が存在するため、これによってもたらされる何らかの理論限界が存在すると思われる。しかし、位相整合については純粋に素材の問題であり、解決に向けた今後の展開が期待される。

一つの解決法は、周期的に屈折率の異なる領域を設けることで、人工的に位相速度を補正する疑似位相整合を用いる方法である。この非線形デバイスは、変換効率の面からは、すでに角度/温度制御による位相整合だけを用いたものに比べ、遜色無い性能を有するようになっている。また、導波路型デバイスを作成すれば、その閉じ込め効果によって、低い光パワーながら極めて高い非線形性が期待できる。問題は、屈折率の異なる領域間の界面における反射、欠陥や不純物による散乱等が生じる損失である。損失は量子相関を壊すため、スクイーピングに取っては致命的となる。本デバイスのスクイーピングデバイスとしての活用は、損失の排除にかかっていると言えよう。スタンフォード大学の Serkland らは、疑似位相整合 LiNbO_3 導波路を用いたパラメトリック増幅を行い、14% 程度の雑音低減を達成している。[50] 共振器内第二高調波発生への応用も、近い将来に期待できる。

世界初の実験的成功から既に 10 年が経過した現在、スクイズド光に対する関心は、物理的な側面から応用面へと向いて来ている。如何に安定に良好なスクイーピングを実現できるか。その相反する要求の接点を見付けるためにも、システムの正しい特性評価は不可欠である。本論文で得られた結論が、将来実現されるデバイスの可能性を拡大し、その発展を促進することを願う。

付録 A

非縮退非線形相互作用のマルコフ近似

A.1 非縮退パラメトリック過程の定式化

和周波発生の影響を記述するために、非縮退パラメトリック過程の相互作用ハミルトニアン

$$V_P = i\hbar\kappa\left\{\sum_j \hat{d}_j^\dagger 2\hat{a}\hat{c} - 2\hat{c}^\dagger \hat{a}^\dagger \sum_j \hat{d}_j\right\}, \quad (\text{A.1})$$

を考える。ただし、 a, c は相互作用にあずかる独立な共振器モードであり、 $\sum_j \hat{d}_j$ は和周波付近の開放場を表す。

ここで回転波近似を用いて、

$$\hat{a} = \tilde{a} e^{-i\omega_a(t-t_0)}, \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{c} = \tilde{c} e^{-i\omega_c(t-t_0)}, \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{d}_j = \tilde{d}_j e^{-i\omega_j(t-t_0)}, \quad (\text{A.4})$$

と書くことにすれば、モード振幅 $\tilde{a}, \tilde{c}, \tilde{d}_j$ の運動方程式は、

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = -2\kappa \sum_j \tilde{c}^\dagger \tilde{d}_j e^{i(\omega_a + \omega_b - \omega_j)(t-t_0)}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d\tilde{c}}{dt} = -2\kappa \sum_j \tilde{a}^\dagger \tilde{d}_j e^{i(\omega_b + \omega_a - \omega_j)(t-t_0)}, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d\tilde{d}_j}{dt} = 2\kappa \tilde{a} \tilde{c} e^{i(\omega_j - \omega_a - \omega_b)(t-t_0)}, \quad (\text{A.7})$$

となる。ここで (A.7) を積分して、

$$\frac{d\tilde{d}_j}{dt} = \tilde{d}_j(t_0) + 2\kappa \int_{t_0}^t \tilde{a}(t') \tilde{c}(t') e^{i(\omega_j - \omega_a - \omega_b)(t-t_0)} dt', \quad (\text{A.8})$$

としておく。これを (A.5) に代入し、マルコフ近似を用いると、

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{a}}{dt} &= -2\kappa \sum_j \tilde{c}^\dagger(t) e^{i(\omega_a + \omega_b - \omega_j)(t-t_0)} \\
&\quad \times \left\{ \tilde{d}_j(t_0) + 2\kappa \int_{t_0}^t dt' \tilde{a}(t') \tilde{c}(t') e^{i(\omega_j - \omega_a - \omega_b)(t'-t_0)} \right\} \\
&\simeq -\tilde{c}^\dagger(t) \sum_j 2\kappa \tilde{d}_j(t_0) e^{i(\omega_a + \omega_b - \omega_j)(t-t_0)} \\
&\quad - \int_0^\infty 4\kappa^2 g d\omega_j \int_{t_0}^t dt' \tilde{c}^\dagger(t) \tilde{c}(t') \tilde{a}(t') e^{i(\omega_a + \omega_b - \omega_j)(t-t')} \\
&= -\tilde{c}^\dagger(t) \sum_j 2\kappa \tilde{d}_j(t_0) e^{i(\omega_a + \omega_b - \omega_j)(t-t_0)} - 2\pi \times 4\kappa^2 g \int_{t_0}^t dt' \tilde{c}^\dagger(t) \tilde{c}(t') \tilde{a}(t') \delta(t-t') \\
&= -\tilde{c}^\dagger(t) \sum_j 2\kappa \tilde{d}_j(t_0) e^{i(\omega_a + \omega_b - \omega_j)(t-t_0)} - 2\zeta (\tilde{c}^\dagger(t) \tilde{c}(t)) \tilde{a}(t), \tag{A.9}
\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\zeta \equiv 2\pi\kappa^2 g, \tag{A.10}$$

と置いた。和周波付近の開放場を

$$\tilde{t}_{\text{in}} \equiv \sum_j \frac{\tilde{d}_j(t_0)}{\sqrt{2\pi g}} e^{i(\omega_a + \omega_b - \omega_j)(t-t_0)}, \tag{A.11}$$

で書き換えれば、

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = -2\zeta (\tilde{c}^\dagger(t) \tilde{c}(t)) \tilde{a}(t) - 2\sqrt{\zeta} \tilde{c}^\dagger(t) \tilde{t}_{\text{in}}, \tag{A.12}$$

を得る。同様に \tilde{c} についても

$$\frac{d\tilde{c}}{dt} = -2\zeta (\tilde{a}^\dagger(t) \tilde{a}(t)) \tilde{c}(t) - 2\sqrt{\zeta} \tilde{a}^\dagger(t) \tilde{t}_{\text{in}}, \tag{A.13}$$

が導かれる。

A.2 第二高調波発生/非縮退パラメトリック相互作用の同時発生現象の定式化

同様の議論を、発生した第二高調波をポンプとする非縮退パラメトリック増幅に用いる。相互作用ハミルトニアンとして、

$$V_S = i\hbar\kappa \left\{ \sum_j \hat{d}_j^\dagger (2\hat{a}\hat{b} + \hat{c}^2) - (\hat{c}^\dagger{}^2 + 2\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger) \sum_j \hat{d}_j \right\}, \tag{A.14}$$

を採用する。ここで、モード振幅 \hat{c} を基本波モード、 \hat{a} , \hat{b} を隣接する側波モード対とする。即ち、共振器の自由スペクトル間隔を $\Delta\omega$ 、基本波周波数を $\Delta\omega_0$ としたとき、 \hat{a} , \hat{c} の共振周波数はそれぞれ $\omega_0 - \Delta\omega$, $\omega_0 + \Delta\omega$ である。

第 A.1 節と同様に回転波近似を導入して、

$$\hat{a} = \bar{a} e^{-i(\omega_0 - \Delta\omega)(t-t_0)}, \quad (\text{A.15})$$

$$\hat{b} = \bar{b} e^{-i(\omega_0 + \Delta\omega)(t-t_0)}, \quad (\text{A.16})$$

$$\hat{c} = \bar{c} e^{-i\omega_0(t-t_0)}, \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{d}_j = \bar{d}_j e^{-i\omega_j(t-t_0)}, \quad (\text{A.18})$$

とする。これらの運動方程式は

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = -2 \sum_j \kappa \bar{b}^\dagger \bar{d}_j e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)}, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = -2 \sum_j \kappa \bar{a}^\dagger \bar{d}_j e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)}, \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = - \sum_j \kappa \bar{c}^\dagger \bar{d}_j e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)}, \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{d\bar{d}_j}{dt} = \kappa (2\bar{a}\bar{b} + \bar{c}^2) e^{-i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)}, \quad (\text{A.22})$$

となる。第 A.1 節の議論と最も異なるのは、高調波モードが

$$\bar{d}_j(t) = \bar{d}_j(t_0) + \kappa \int_{t_0}^t dt' (2\bar{a}\bar{b} + \bar{c}^2) e^{i(\omega_j - 2\omega_0)(t-t_0)}, \quad (\text{A.23})$$

で表される点である。これを (A.19) に代入して、マルコフ近似を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= -2\kappa \sum_j \bar{b}^\dagger(t) e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)} \\ &\quad \times \left\{ \bar{d}_j(t_0) + \kappa \int_{t_0}^t dt' (2\bar{a}(t')\bar{b}(t') + \bar{c}(t')^2) e^{i(\omega_j - 2\omega_0)(t'-t_0)} \right\} \\ &\simeq -\bar{b}^\dagger(t) \sum_j 2\kappa \bar{d}_j(t_0) e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)} \\ &\quad - \int_0^\infty 2\kappa^2 g d\omega_j \int_{t_0}^t dt' \bar{b}^\dagger(t) (2\bar{a}(t')\bar{b}(t') + \bar{c}(t')^2) e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t')} \\ &= -\bar{b}^\dagger(t) \sum_j 2\kappa \bar{d}_j(t_0) e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)} \\ &\quad - 2\pi \times 2\kappa^2 g \int_{t_0}^t dt' \bar{b}^\dagger(t) (2\bar{a}(t')\bar{b}(t') + \bar{c}(t')^2) \delta(t-t') \\ &= -\bar{b}^\dagger(t) \sum_j 2\kappa \bar{d}_j(t_0) e^{i(\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)} - \zeta(\bar{b}^\dagger(t)\bar{c}(t))\bar{a}(t) \\ &= -2\zeta(\bar{b}^\dagger\bar{b})\bar{a} - \zeta\bar{b}^\dagger\bar{c}^2 - 2\sqrt{\zeta}\bar{b}^\dagger\bar{r}_{\text{in}}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

となる。ここで

$$\bar{r}_{\text{in}} \equiv \sum_j \frac{\bar{d}_j(t_0)}{\sqrt{2\pi g}} e^{i(2\omega_0 - \omega_j)(t-t_0)}, \quad (\text{A.25})$$

とおいた。同様にして、他の成分についても

$$\frac{d\tilde{b}}{dt} = -2\zeta(\tilde{a}^\dagger\tilde{a})\tilde{b} - \zeta\tilde{a}^\dagger\tilde{c}^2 - 2\sqrt{\zeta}\tilde{a}^\dagger\tilde{r}_{\text{in}}, \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{d\tilde{c}}{dt} = -\zeta(\tilde{c}^\dagger\tilde{c})\tilde{c} - \zeta\tilde{c}^\dagger\tilde{a}\tilde{b} - 2\sqrt{\zeta}\tilde{c}^\dagger\tilde{r}_{\text{in}}, \quad (\text{A.27})$$

が得られる。

付録 B

光増幅過程における振幅および雑音の空間発展

ある一様なホストの中に、レーザ作用を生じる原子が不純物としてまばらに埋め込まれているようなレーザ媒質を想定する。通常、ホストの結晶と不純物原子との相互作用によって、原子のエネルギー準位が変化するが、ここでは簡単のため、これを無視するか、あるいは相互作用まで含んだ上で一つの原子と見做すことにする。以後、これを「レーザ原子」と呼ぶ。

この媒質の電気分極を、ホストの大部分が決定する線形分極 $P^L(z, t)$ と、レーザ原子が決定する分 $P_{\text{las}}(z, t)$ とに分離できるものと仮定する。また、輻射遷移は上位準位 #2 と下位準位 #1 との間で生じ、その後、即座に基底準位 #0 へと非輻射遷移するものとする。

いま、位置 z の微小体積中に存在するレーザ原子について考える。共振器内を周回する光の進行方向を z 軸の向きと一致しているものとし、 x, y 方向へは一様であるとする。単位体積あたりの #2 準位にある原子密度、#1 準位にある原子密度、準位反転演算子密度をそれぞれ、

$$\mu = \frac{1}{V} \sum_V \{ |1\rangle \langle 2| \} \quad (\text{B.1})$$

$$\nu_1 = \frac{1}{V} \sum_V \{ |1\rangle \langle 1| \} \quad (\text{B.2})$$

$$\nu_2 = \frac{1}{V} \sum_V \{ |2\rangle \langle 2| \} \quad (\text{B.3})$$

とおく。ただし、 V は微小体積とし、和はこの体積内の原子についてとるものとする。

いま、伝播方向に垂直な面内では一様であると仮定し (実効面積 S)、伝播方向についてのみ依存性を考える。そこで、光の場と原子の集合との相互作用ハミルトニアン (体積) 密度を、

$$\mathcal{V}_{\text{a-f}} = \hbar \kappa \left[\mu(z, t) E^{(+)}(z, t) + E^{(-)}(z, t) \mu^\dagger(z, t) \right], \quad (\text{B.4})$$

と書くことにする。関係

$$\mu^\dagger(t, z)\mu(t, z') = \nu_2(t, z)\delta(z - z')/S, \quad (\text{B.5})$$

$$\mu(t, z)\mu^\dagger(t, z') = \nu_1(t, z)\delta(z - z')/S, \quad (\text{B.6})$$

$$\nu_1(t, z)\mu^\dagger(t, z') = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\nu_1(t, z)\mu(t, z') = \mu(t, z)\delta(z - z')/S, \quad (\text{B.8})$$

$$\nu_2(t, z)\mu^\dagger(t, z') = \mu^\dagger(t, z)\delta(z - z')/S, \quad (\text{B.9})$$

$$\nu_2(t, z)\mu(t, z') = 0, \quad (\text{B.10})$$

$$\mu^\dagger(t, z)\nu_2(t, z') = 0, \quad (\text{B.11})$$

$$\mu(t, z)\nu_2(t, z') = \mu(t, z)\delta(z - z')/S, \quad (\text{B.12})$$

$$\mu^\dagger(t, z)\nu_1(t, z') = \mu^\dagger(t, z)\delta(z - z')/S, \quad (\text{B.13})$$

$$\mu(t, z)\nu_1(t, z') = 0 \quad (\text{B.14})$$

を用いると、交換関係(連続系)はつぎのようになる。

$$[\mu(t, z), \nu_1(t, z')] = -\mu(t, z)\delta(z - z')/S, \quad (\text{B.15})$$

$$[\mu^\dagger(t, z), \nu_1(t, z')] = \mu^\dagger(t, z)\delta(z - z')/S, \quad (\text{B.16})$$

$$[\mu(t, z), \nu_2(t, z')] = \mu(t, z)\delta(z - z')/S, \quad (\text{B.17})$$

$$[\mu^\dagger(t, z), \nu_2(t, z')] = -\mu^\dagger(t, z)\delta(z - z')/S, \quad (\text{B.18})$$

$$[\nu_1(t, z), \nu_2(t, z')] = 0, \quad (\text{B.19})$$

$$[\mu(t, z), \mu^\dagger(t, z')] = [\nu_1(t, z) - \nu_2(t, z)]\delta(z - z')/S. \quad (\text{B.20})$$

ここで、レーザ媒質中に蓄えられるエネルギーのうち、光の場と分極とが寄与する分を考えると、

$$\int S dz \nu_{a-f} = \iiint_V dv \epsilon \mathbf{P}(z, t) \cdot \mathbf{E}(z, t), \quad (\text{B.21})$$

となる。電気分極は、単位体積あたりに発生する双極子モーメントに対応するから、 μ は光周波数で振動する電気分極のうち、負の周波数分を表すことになる。すなわち、(B.21) の右辺は、

$$\iiint_V dv \epsilon \mathbf{P}(z, t) \cdot \mathbf{E}(z, t) \simeq \int dz S \epsilon_0 [\mu(z, t) E^{(+)}(z, t) + E^{(-)}(z, t) \mu^\dagger(z, t)], \quad (\text{B.22})$$

となる。式(B.21)の両辺を見比べて、電気分極のうち正および負の周波数分は

$$P_{\text{las}}^{(+)}(z, t) = \frac{\hbar \kappa}{\epsilon} \mu^\dagger(z, t), \quad (\text{B.23})$$

$$P_{\text{las}}^{(-)}(z, t) = \frac{\hbar \kappa}{\epsilon} \mu(z, t), \quad (\text{B.24})$$

で表されることがわかる。

ここで原子系の運動方程式を書くと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial t}(z, t) = & [i(\omega_0 - \omega_a) - \Gamma_{12}]\mu(z, t) \\ & + i\kappa[\nu_2(z, t) - \nu_1(z, t)]E^{(-)}(z, t) + g_\mu(z, t), \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_2}{\partial t}(z, t) = & \Lambda_{20} - \Gamma_2 \nu_2(z, t) \\ & + i\kappa[\mu(z, t)E^{(+)}(z, t) - E^{(-)}(z, t)\mu^\dagger(z, t)] + g_{\nu_2}(z, t), \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_1}{\partial t}(z, t) = & -\Gamma_1 \nu_1(z, t) \\ & - i\kappa[\mu(z, t)E^{(+)}(z, t) - E^{(-)}(z, t)\mu^\dagger(z, t)] + g_{\nu_1}(z, t), \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

となる。ここで、 ω_a は利得の中心周波数、 Λ_{20} は準位 #2 への励起率、 Γ_{12} は双極子 μ の緩和率、 Γ_1, Γ_2 はそれぞれ準位 #1, #2 から他準位への自然放出減衰率、 $g_\mu(z, t), g_{\nu_1}(z, t), g_{\nu_2}$ はそれぞれ、双極子、準位 #1, #2 の緩和過程に伴う Langevin 力である。

簡単のため、レーザ発振は利得線幅の中心で生じているものとする ($\omega_a = \omega_0$)。また、原子系の応答は極めて速く、全て断熱近似可能であると仮定する。

いま全ての変数を、その平均値と揺らぎとに分解し、

$$E^{(\pm)}(z, t) = E_0^{(\pm)}(z) + \Delta E^{(\pm)}(z, t), \quad (\text{B.28})$$

$$\nu_i(z, t) = \nu_{i0}(z) + \Delta \nu_i(z, t), \quad (i = 1, 2), \quad (\text{B.29})$$

$$\mu(z, t) = \mu_0(z) + \Delta \mu(z, t), \quad (\text{B.30})$$

$$\mu^\dagger(z, t) = \mu_0^*(z) + \Delta \mu^\dagger(z, t), \quad (\text{B.31})$$

と書くことにする。このとき、

$$\mu_0(z) = \frac{i\kappa}{\Gamma_{12}}[\nu_{20}(z) - \nu_{10}(z)]E_0^{(-)}(z), \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \Delta \mu(z, t) = & \frac{i\kappa}{\Gamma_{12}} \left\{ [\nu_{20}(z) - \nu_{10}(z)]\Delta E^{(-)}(z, t) + E_0^{(-)}(z)[\Delta \nu_2(z, t) - \Delta \nu_1(z, t)] \right\} \\ & + \frac{g_\mu(z, t)}{\Gamma_{12}}, \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\nu_{20}(z) = \frac{1}{\Gamma_2} \left\{ \Lambda_{20} + i\kappa[\mu_0(z)E_0^{(+)}(z) - \mu_0^*E_0^{(-)}(z)] \right\} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned} \Delta \nu_2(z, t) = & \frac{1}{\Gamma_2} \left\{ i\kappa[\mu_0(z)\Delta E^{(+)}(z, t) - \mu_0^*(z)\Delta E^{(-)}(z, t)] \right. \\ & \left. + E_0^{(+)}(z)\Delta \mu(z, t) - E_0^{(-)}(z)\Delta \mu^\dagger(z, t) \right\} + \frac{g_{\nu_2}(z, t)}{\Gamma_2} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

$$\nu_{10}(z) = \frac{1}{\Gamma_1} \left\{ -i\kappa[\mu_0(z)E_0^{(+)}(z) - \mu_0^*E_0^{(-)}(z)] \right\} \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned} \Delta\nu_1(z, t) = & \frac{1}{\Gamma_1} \left\{ -i\kappa[\mu_0(z)\Delta E^{(+)}(z, t) - \mu_0^*(z)\Delta E^{(-)}(z, t) \right. \\ & \left. + E_0^{(+)}(z)\Delta\mu(z, t) - E_0^{(-)}(z)\Delta\mu^\dagger(z, t)] \right\} + \frac{g\nu_1(z, t)}{\Gamma_1} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

が得られる。

まず、(B.32) を (B.34), (B.36) に代入することにより、反転分布の平均値が

$$\begin{aligned} \nu_{20}(z) - \nu_{10}(z) &= \frac{\Lambda_{20}/\Gamma_2}{1 + \left(\frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2} \right) \frac{2\kappa^2}{\Gamma_{12}} E_0^{(-)}(z)E_0^{(+)}(z)} \\ &= \frac{\Lambda_{20}/\Gamma_2}{1 + E_0^{(-)}(z)E_0^{(+)}(z)/I_S}, \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$$I_S \equiv \frac{\Gamma_{12}}{2\kappa^2} \left(\frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2} \right)^{-1} \quad (\text{B.39})$$

と求められる。これを (B.32) に用いると、準位反転演算子の平均値は、

$$\mu_0(z) = \left[\frac{i\kappa\Lambda_{20}}{\Gamma_{12}\Gamma_2} \left\{ 1 + E_0^{(+)}(z)E_0^{(-)}(z)/I_S \right\} \right] E_0^{(-)}(z), \quad (\text{B.40})$$

となる。同様にして、反転分布の揺らぎは、

$$\begin{aligned} \Delta\nu_2(z, t) - \Delta\nu_1(z, t) &= - \frac{\Lambda_{20}/(\Gamma_2 I_S)}{\left\{ 1 + E_0^{(-)}(z)E_0^{(+)}(z)/I_S \right\}^2} \left\{ E_0^{(-)}(z)\Delta E^{(+)}(z, t) + E_0^{(+)}(z)\Delta E^{(-)}(z, t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

$$+ \frac{g\nu_2(z, t)}{\Gamma_2} - \frac{g\nu_1(z, t)}{\Gamma_1} \quad (\text{B.42})$$

と書くことができる。

準位反転演算子の揺らぎは、(B.42) を用いて、

$$\begin{aligned} \Delta\mu(z, t) = & \frac{i\kappa}{\Gamma_{12}} \left[\frac{\Lambda_{20}/\Gamma_2}{1 + E_0^{(-)}(z)E_0^{(+)}(z)/I_S} \Delta E^{(-)}(z, t) \right. \\ & \left. - \frac{\Lambda_{20}/(\Gamma_2 I_S)}{\left\{ 1 + E_0^{(-)}(z)E_0^{(+)}(z)/I_S \right\}^2} \left\{ (E_0^{(-)}(z))^2 \Delta E^{(+)}(z, t) + E_0^{(-)}(z)E_0^{(+)}(z)\Delta E^{(-)}(z, t) \right\} \right] \\ & + \frac{i\kappa}{\Gamma_{12}} E_0^{(-)}(z) \left\{ \frac{g\nu_2(z, t)}{\Gamma_2} - \frac{g\nu_1(z, t)}{\Gamma_1} \right\} + \frac{g\mu(z, t)}{\Gamma_{12}}, \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

と表される。ここで、周波数領域の光の場を、

$$\hat{a}(z, \omega) = u(z)e^{i\phi}\delta(\omega - \omega_0) + \Delta\hat{a}(z, \omega), \quad (\text{B.44})$$

と表せば、その時間領域における平均値と揺らぎは

$$E_0^{(+)}(z) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 Snc}} u(z) e^{i\phi - i\omega_0(t-nz/c)}, \quad (\text{B.45})$$

$$\Delta E^{(+)}(z, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 Snc}} \int_0^\infty d\omega \Delta \hat{a}(z, \omega) e^{i\omega(t-nz/c)}, \quad (\text{B.46})$$

で表されることになる。これを用いて準位反転演算子の平均を表せば、

$$\mu_0(z) = \frac{\mu' u(z)}{1 + u^2(z)/i_s} e^{-i\phi + i\omega_0(t-nz/c)}, \quad (\text{B.47})$$

$$i_s = I_S \frac{2\epsilon_0 Snc}{\hbar\omega_0}, \quad (\text{B.48})$$

$$\mu' = \frac{\kappa\Lambda_{20}}{\Gamma_{12}\Gamma_2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 Snc}}, \quad (\text{B.49})$$

となる。一方、その揺らぎは、

$$\begin{aligned} \Delta\mu(z, t) = & \int_0^\infty d\omega \frac{\mu'}{1 + u^2(z)/i_s} \Delta \hat{a}^\dagger(z, \omega) e^{i\omega(t-nz/c)} \\ & - \int_0^\infty d\omega \frac{2\mu' u^2(z)/i_s}{\{1 + u^2(z)/i_s\}^2} e^{-i\phi + i\omega_0(t-nz/c)} \\ & \times \frac{\Delta \hat{a}(z, \omega) e^{-i(\omega-\omega_0)(t-nz/c) - i\phi} + \Delta \hat{a}^\dagger(z, \omega) e^{i(\omega-\omega_0)(t-nz/c) + i\phi}}{2} \\ & + \frac{g_\mu(z, t)}{\Gamma_{12}}, \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

で与えられる。ここで、高次の Langevin 力は無視した。同様に、その共軛は

$$\begin{aligned} \Delta\mu^\dagger(z, t) = & \int_0^\infty d\omega \frac{\mu'}{1 + u^2(z)/i_s} \Delta \hat{a}(z, \omega) e^{-i\omega(t-nz/c)} \\ & - \int_0^\infty d\omega \frac{2\mu' u^2(z)/i_s}{\{1 + u^2(z)/i_s\}^2} e^{i\phi - i\omega_0(t-nz/c)} \\ & \times \frac{\Delta \hat{a}(z, \omega) e^{-i(\omega-\omega_0)(t-nz/c) - i\phi} + \Delta \hat{a}^\dagger(z, \omega) e^{i(\omega-\omega_0)(t-nz/c) + i\phi}}{2} \\ & + \frac{g_{\mu^\dagger}(z, t)}{\Gamma_{12}}, \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

と表される。

ここで再び、光の一次元伝播方程式

$$\frac{\partial^2 E^{(+)}(z, t)}{\partial z^2} - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 E^{(+)}(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_{\text{las}}^{(+)}(z, t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.52})$$

を考える。左辺に緩慢変化近似 (4.58) を用い、(B.49), (B.51) を代入すると、

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\omega_0 n}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 S c n}} \left[\frac{du(z)}{dz} e^{i\phi} e^{-i\omega_0(t-nz/c)} + \int_0^\infty d\omega \frac{\partial \Delta \hat{a}(z, \omega)}{\partial z} e^{-i\omega(t-nz/c)} \right] \\
& = -\frac{\omega_0^2 \mu' \hbar \kappa u(z) / (\epsilon_0 c^2)}{1 + u^2(z)/i_s} e^{i\phi} e^{-i\omega_0(t-nz/c)} \\
& - \int_0^\infty d\omega \left[\frac{\omega_0^2 \mu' \hbar \kappa / (\epsilon_0 c^2)}{1 + u^2(z)/i_s} \Delta \hat{a}(z, \omega) e^{-i\omega(t-nz/c)} - \frac{2\omega_0^2 \mu' \hbar \kappa u^2(z) / (\epsilon_0 i_s c^2)}{(1 + u^2(z)/i_s)^2} e^{i\phi - i\omega_0(t-nz/c)} \right. \\
& \times \frac{\Delta \hat{a}(z, \omega) e^{-i(\omega - \omega_0)(t-nz/c) - i\phi} + \Delta \hat{a}^\dagger(z, \omega) e^{i(\omega - \omega_0)(t-nz/c) + i\phi}}{2} \\
& \left. + \omega_0^2 \frac{\hbar \kappa g_{\mu^\dagger}(z, \omega)}{\epsilon_0 \Gamma_{12}} e^{-i\omega(t-nz/c)} \right], \tag{B.53}
\end{aligned}$$

が得られる。ここで、Langevin 力 $g_{\mu^\dagger}(z, t)$ のフーリエ変換 $g_{\mu^\dagger}(z, \omega)$ を

$$g_{\mu^\dagger}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega g_{\mu^\dagger}(z, \omega) e^{-i\omega(t-nz/c)}, \tag{B.54}$$

で定義した。揺らぎ Δ に関して 0 次と 1 次の項を分離して比較すると、

$$\frac{du(z)}{dz} = \frac{G_0}{2\{1 + u^2(z)/i_s\}} u(z), \tag{B.55}$$

$$G_0 = \frac{\omega_0 \mu' \hbar \kappa}{\epsilon_0 c n} \sqrt{\frac{2\epsilon_0 S c n}{\hbar\omega_0}} = \frac{\hbar \kappa^2 \omega_0 \Lambda_{20}}{\epsilon_0 n c \Gamma_2 \Gamma_{12}}, \tag{B.56}$$

および

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta \bar{a}(z, \delta\omega)}{dz} & = \frac{G_0}{2\{1 + u^2(z)/i_s\}} \Delta \bar{a}(z, \delta\omega) \\
& - \frac{G_0 u^2(z)/i_s}{\{1 + u^2(z)/i_s\}^2} e^{i\phi} \Delta \bar{a}_1(z, \delta\omega) + \bar{f}_a(z, \delta\omega), \tag{B.57}
\end{aligned}$$

$$\bar{f}_a(z, \delta\omega) \equiv \frac{\omega_0 \hbar \kappa}{2\epsilon_0 c n \Gamma_{12}} \sqrt{\frac{2\epsilon_0 S c n}{\hbar\omega_0}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty dt g_{\mu^\dagger}(z, t) e^{i(\omega_0 + \delta\omega)(t-nz/c)}, \tag{B.58}$$

が得られる。ただし、回転波の演算子として

$$\Delta \bar{a}(z, \delta\omega) \equiv \Delta a(z, \omega_0 + \delta\omega), \tag{B.59}$$

$$\Delta \bar{a}^\dagger(z, \delta\omega) \equiv \Delta a^\dagger(z, \omega_0 + \delta\omega), \tag{B.60}$$

$$\Delta \bar{a}_1(z, \delta\omega) \equiv \frac{\Delta \bar{a}(z, \delta\omega) e^{-i\phi} + \Delta \bar{a}^\dagger(z, -\delta\omega) e^{i\phi}}{2}, \tag{B.61}$$

を定義した。主成分方向の揺らぎ $\Delta \bar{a}_1(z, \delta\omega)$ に対し、これと位相が直交する成分 $\Delta \bar{a}_2(z, \delta\omega)$ を

$$\Delta \bar{a}_2(z, \delta\omega) \equiv \frac{\Delta \bar{a}(z, \delta\omega) e^{-i\phi} - \Delta \bar{a}^\dagger(z, -\delta\omega) e^{i\phi}}{2i}, \tag{B.62}$$

によって定義すれば、これらの揺らぎに関する発展方程式として

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_1(z, \delta\omega)}{dz} = \left[\frac{G_0}{2\{1+u^2(z)/i_s\}} - \frac{G_0u^2(z)/i_s}{\{1+u^2(z)/i_s\}^2} \right] \Delta\tilde{a}_1(z, \delta\omega) + \tilde{f}_{a_1}(z, \delta\omega), \quad (\text{B.63})$$

$$\frac{d\Delta\tilde{a}_2(z, \delta\omega)}{dz} = \frac{G_0}{2\{1+u^2(z)/i_s\}} \Delta\tilde{a}_2(z, \delta\omega) + \tilde{f}_{a_2}(z, \delta\omega), \quad (\text{B.64})$$

が得られる。ただし、

$$\tilde{f}_{a_1}(z, \delta\omega) = \frac{\tilde{f}_a(z, \delta\omega)e^{-i\phi} + \tilde{f}_{a^\dagger}(z, -\delta\omega)e^{i\phi}}{2} \quad (\text{B.65})$$

$$\tilde{f}_{a_2}(z, \delta\omega) = \frac{\tilde{f}_a(z, \delta\omega)e^{-i\phi} - \tilde{f}_{a^\dagger}(z, -\delta\omega)e^{i\phi}}{2i} \quad (\text{B.66})$$

とおいた。

ここで、(B.65), (B.66) の相関スペクトルを求めておく。関係 (B.5)–(B.14) を用いれば、Einstein の関係は

$$\begin{aligned} \langle 2\mathcal{D}_{\mu^\dagger\mu} \rangle &= \left\langle \frac{\partial\nu_2}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \mu^\dagger \frac{\partial\mu}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial\mu^\dagger}{\partial t} \mu \right\rangle \\ &= [\Lambda_{20} + (2\Gamma_{12} - \Gamma_2)\nu_{20}]\delta(z-z')/S, \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

$$\begin{aligned} \langle 2\mathcal{D}_{\mu\mu^\dagger} \rangle &= \left\langle \frac{\partial\nu_1}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \mu \frac{\partial\mu^\dagger}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial\mu}{\partial t} \mu^\dagger \right\rangle \\ &= [(2\Gamma_{12} - \Gamma_1)\nu_{10}]\delta(z-z')/S, \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

$$\langle 2\mathcal{D}_{\mu\mu} \rangle = \langle 2\mathcal{D}_{\mu^\dagger\mu^\dagger} \rangle = 0, \quad (\text{B.69})$$

となる。一方、(B.34), (B.36) に (B.40) を代入すれば、各準位の分布密度はそれぞれ

$$\nu_{20}(z) = \frac{\Lambda_{20}}{\Gamma_2} \left\{ 1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \times \frac{u^2(z)/i_s}{1+u^2(z)/i_s} \right\}, \quad (\text{B.70})$$

$$\nu_{10}(z) = \frac{\Lambda_{20}}{\Gamma_1} \times \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \times \frac{u^2(z)/i_s}{1+u^2(z)/i_s}, \quad (\text{B.71})$$

で表されることが分かる。これらを用いれば、各相関係数は

$$\langle 2\mathcal{D}_{\mu^\dagger\mu} \rangle = \frac{2\Gamma_{12}\Lambda_{20}}{\Gamma_2} + \Lambda_{20} \left(1 - \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_2} \right) \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \times \frac{u^2(z)/i_s}{1+u^2(z)/i_s} \delta(z-z')/S, \quad (\text{B.72})$$

$$\langle 2\mathcal{D}_{\mu\mu^\dagger} \rangle = \left(\frac{\Lambda_{20}(2\Gamma_{12} - \Gamma_1)}{\Gamma_1} \right) \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \times \frac{u^2(z)/i_s}{1+u^2(z)/i_s} \delta(z-z')/S, \quad (\text{B.73})$$

と求めることができる。ここで特に、準位 #1 から基底準位への非輻射遷移が極めて速い、すなわち $\Gamma_1 \gg \Gamma_2, \Gamma_{12}$ と仮定すれば、両者の和が、

$$\langle 2\mathcal{D}_{\mu^\dagger\mu} \rangle + \langle 2\mathcal{D}_{\mu\mu^\dagger} \rangle = \frac{2\Lambda_{20}\Gamma_{12}}{\Gamma_2} \times \frac{1}{1+u^2(z)/i_s} \delta(z-z')/S, \quad (\text{B.74})$$

と表されることが分かる。

得られた相関係数から相関スペクトルを導く。記号 $\langle \rangle_T$ を時間 T 内での平均とすれば、

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \langle \tilde{f}_{a^\dagger}(z, -\delta\omega) \tilde{f}_a(z, \delta\omega') \rangle_T \\ = \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c n} \left(\frac{\kappa}{\Gamma_{12}} \right)^2 \langle 2D_{a^\dagger a} \rangle \delta(z - z') \delta(\delta\omega, \delta\omega'), \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

$$\delta(\omega, \omega') = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(\omega - \omega')t} = \begin{cases} 1 & (\omega = \omega'), \\ 0 & (\omega \neq \omega'), \end{cases} \quad (\text{B.76})$$

と表される。その他の相関スペクトルも同様に求められる。以上より、(B.65), (B.66) の自己相関スペクトルは

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle \tilde{f}_{a_1}(z, \delta\omega) \tilde{f}_{a_1}(z', -\delta\omega') \rangle_T}{T} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle \tilde{f}_{a_2}(z, \delta\omega) \tilde{f}_{a_2}(z', -\delta\omega') \rangle_T}{T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left\{ \frac{2\pi \langle \tilde{f}_a(z, \delta\omega) \tilde{f}_{a^\dagger}(z', \delta\omega') \rangle_T}{T} + \frac{2\pi \langle \tilde{f}_{a^\dagger}(z, -\delta\omega) \tilde{f}_a(z', -\delta\omega') \rangle_T}{T} \right\} \\ &= \frac{G_0}{2\{1 + u^2(z)/i_s\}} \frac{1}{4} \delta(z - z') \delta(\delta\omega, \delta\omega'), \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

と導かれる。

付録 C

定常動作点解析によるパラメトリック発振閾値の導出

本付録では、二重閉じ込め・外部共振型システムにおけるパラメトリック発振時の定常振幅を求める。閾値は、側波モードの共振器内の光子数を正とする最小の基本波光子数で与えられる。

まず、第 5.2 節の表式に基づき、以下のように各モード振幅を平均値と揺らぎ成分に分ける。

$$\tilde{a} = \alpha_0 + \Delta\tilde{a}, \quad (\text{C.1})$$

$$\tilde{a}_{\pm} = p e^{i\phi_{\pm}} + \Delta\tilde{a}_{\pm}, \quad (\text{C.2})$$

$$\tilde{b} = \beta_0 + \Delta\tilde{b}, \quad (\text{C.3})$$

$$\tilde{b}_{\pm} = q_1 e^{i\phi_{\pm 1}} + \Delta\tilde{b}_{\pm}, \quad (\text{C.4})$$

$$\tilde{b}_{\pm 2} = q_2 e^{i\phi_{\pm 2}} + \Delta\tilde{b}_{\pm 2}. \quad (\text{C.5})$$

ここで、基本波および第二高調波を中心とするモードの対称性を用い、対応するモードの平均光子数は等しいとした。また、側波モードの平均値に位相項を明示しているのは以下の理由による:これらのモードに光子が生じるのは、パラメトリック発振が生じる場合に限られる。一般に、パラメトリック発振ではモード間の相対位相のみが固定され、単独のモードは定常的な位相を持たない。そこで、このように振幅の大きさと位相角を分けて、振幅およびモード間の相対位相が定常になる状態を求める。

更に、基本波モードと第二高調波モードの平均値は、励振力 E_0 と同相であると仮定する。これは、側波モードや離調の影響が無視できる場合、これらのモードの定常点が励振力と同相となることを考慮したものである。

まず、側波モードおよび和周波モードの振幅の定常条件を求める。式 (5.40)–(5.44) の揺動項を無視して、これに式 (C.1)–(C.5) を代入する。各平均値に関する時間微分を 0 と置

くことにより、以下の代数方程式を得る。

$$0 = E_0 - \frac{\gamma_a}{2}\alpha_0 - \frac{2\kappa^2}{\gamma_b}\alpha_0\left(\frac{\alpha_0^2}{2} - p^2\right) - \kappa p q_1 [\cos(\phi_{-1} - \phi_-) + \cos(\phi_{+1} - \phi_+)], \quad (\text{C.6})$$

$$0 = -\frac{\gamma_b}{2}\beta_0 + \kappa\left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \cos(\phi_+ + \phi_-)\right], \quad (\text{C.7})$$

$$0 = \sin(\phi_+ + \phi_-), \quad (\text{C.8})$$

$$0 = -\frac{\gamma_a}{2}p - \kappa\left[pq_2 \cos(\phi_{+2} - 2\phi_+) + \alpha_0 q_1 \cos(\phi_{+1} - \phi_+) + \beta_0 p \cos(\phi_+ + \phi_-)\right], \quad (\text{C.9})$$

$$0 = -\frac{\gamma_b}{2}q_1 + \kappa\alpha_0 p \cos(\phi_{\pm} - \phi_{\pm 1}), \quad (\text{C.10})$$

$$0 = -\frac{\gamma_b}{2}q_2 + \frac{\kappa}{2}p^2 \cos(2\phi_{\pm} - \phi_{\pm 2}), \quad (\text{C.11})$$

式(C.8)より、ただちに $\phi_+ + \phi_- = 0$ または π 。いま、側波モードの発振する条件 [式(C.9)で $p, q_1, q_2 > 0$] を求めていることから、

$$\phi_+ + \phi_- = \pi, \quad (\text{C.12})$$

が得られる。これと(C.10),(C.11)を(C.6),(C.7),(C.9)に用いることにより、

$$E_0 = \frac{\gamma_a}{2}\alpha_0 + \frac{2\kappa^2}{\gamma_b}\alpha_0\left(\frac{\alpha_0^2}{2} - p^2\right) + \frac{\gamma_b}{\alpha_0}q_1^2, \quad (\text{C.13})$$

$$\left(\kappa\beta_0 - \frac{\gamma_b}{2}\right)p^2 = \gamma_b\left(\frac{q_1^2}{2} + q_2^2\right), \quad (\text{C.14})$$

$$\beta_0 = \frac{2\kappa}{\gamma_b}\left(\frac{\alpha_0^2}{2} + p^2\right), \quad (\text{C.15})$$

を得る。

次に、相対位相の定常条件を求める。上と同様の議論により、

$$p \frac{d\phi_+}{dt} = -\kappa[pq_2 \sin(\phi_{+2} - 2\phi_+) + \alpha_0 q_1 \sin(\phi_{+1} - \phi_+)], \quad (\text{C.16})$$

$$q_1 \frac{d\phi_{+1}}{dt} = \kappa\alpha_0 p \sin(\phi_+ - \phi_{+1}), \quad (\text{C.17})$$

$$q_2 \frac{d\phi_{+2}}{dt} = \frac{\kappa p^2}{2} \sin(2\phi_+ - \phi_{+2}), \quad (\text{C.18})$$

ここで(C.16)-(C.17)と $2 \times$ (C.16)-(C.18)を作り、 $\phi_{+2} - 2\phi_+, \phi_{+1} - \phi_+$ が定常値を持つ条件を計算すると、

$$p^2 = q_1^2 + 4q_2^2, \quad (\text{C.19})$$

$$3\gamma_b^2 q_1^2 q_2^2 = 16\kappa^2 \alpha_0^2 p^2 q_2^2 - \kappa^2 p^4 q_1^4, \quad (\text{C.20})$$

が得られる。

式 (C.14)-(C.20) から順次変数を消去することにより、側波モードの光子数 p^2 に関する次の二次方程式が得られる:

$$14(\lambda p^2) - \left(5\lambda\alpha_0^2 - \frac{19}{4} - \frac{13}{2}\xi\right)(\lambda p^2) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \lambda\alpha_0^2\right)\left(\lambda\alpha_0^2 + \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\xi\right) = 0 \quad (\text{C.21})$$

ただし、 $\xi = \gamma_a/\gamma_b$, $\lambda = \kappa^2/\gamma_b^2$ と置いた。この二次方程式が正の根をもつ条件のうち、 α_0^2 を最小とするものは、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi - \lambda\alpha_0^2 < 0, \quad (\text{C.22})$$

であることが導かれる。即ち、

$$\frac{\kappa^2\alpha_0^2}{\gamma_b} > \frac{\gamma_a + \gamma_b}{2}, \quad (\text{C.23})$$

である。すなわち、パラメトリック発振閾値を与える基本波光子数は

$$\alpha_c^2 = \frac{\gamma_b(\gamma_a + \gamma_b)}{2\kappa^2}, \quad (\text{C.24})$$

である。これは、(5.67) に一致する。

参考文献

- [1] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, and J. F. Valley, "Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, pp. 2409–2412, Nov. 1985.
- [2] L.-A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall, and H. Wu, "Generation of squeezed states by parametric down conversion," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 2520–2523, Nov. 1986.
- [3] R. M. Shelby, M. D. Levenson, S. H. Perlmutter, R. G. DeVoe, and D. F. Walls, "Broad-band parametric deamplification of quantum noise in an optical fiber," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 691–694, Aug. 1986.
- [4] R. E. Slusher, B. Yurke, P. Grangier, A. LaPorta, D. F. Walls, and M. Reid, "Squeezed-light generation by four-wave mixing near an atomic resonance," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 4, pp. 1453–1464, Oct. 1987.
- [5] P. Grangier, R. E. Slusher, B. Yurke, and A. LaPorta, "Squeezed-light-enhanced polarization interferometer," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 59, pp. 2153–2156, Nov. 1987.
- [6] M. M. Maeda, P. Kumar, and J. H. Shapiro, "Squeezed experiments in sodium vapor," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 4, pp. 1501–1513, Oct. 1987.
- [7] G. J. Milburn, M. D. Levenson, R. M. Shelby, S. H. Permutter, R. G. DeVoe, and D. F. Walls, "Optical-fiber media for squeezed-state generation," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 4, pp. 1476–1489, Oct. 1987.
- [8] L. A. Orozco, M. G. Raizen, M. Xiao, R. J. Brecha, and H. J. Kimble, "Squeezed-state generation in optical bistability," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 4, pp. 1490–1500, Oct. 1987.

- [9] S. F. Pereira, M. Xiao, H. J. Kimble, and J. L. Hall, "Generation of squeezed light by intracavity frequency doubling," *Phys. Rev. A*, vol. 38, pp. 4931-4934, Nov. 1988.
- [10] R. Paschotta, M. Collett, P. Kürz, K. Fiedler, H. A. Bachor, and J. Mlynek, "Bright squeezed light from a singly resonant frequency doubler," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, pp. 3807-3810, June 1994.
- [11] T. C. Ralph, M. S. Taubman, A. G. White, D. E. McClelland, and H. A. Bachor, "Squeezed light from second-harmonic generation: experiment versus theory," *Opt. Lett.*, vol. 20, pp. 1316-1318, Jun. 1995.
- [12] H. Tsuchida, "Generation of amplitude-squeezed light at 431 nm from a singly resonant frequency doubler," *Opt. Lett.*, vol. 20, pp. 2240-2242, Nov. 1995.
- [13] Y. Yamamoto and N. Imoto, "Internal and external field fluctuations of a laser oscillator: Part I - quantum mechanical Langevin treatment," *IEEE J. of Quantum Electron.*, vol. QE-22, pp. 2032-2042, Oct. 1986.
- [14] S. Machida, Y. Yamamoto, and Y. Itaya, "Observation of amplitude squeezing in a constant-current-driven semiconductor laser," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 1000-1003, Mar. 1987.
- [15] S. Machida and Y. Yamamoto, "Ultrabroadband amplitude squeezing in a semiconductor laser," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, pp. 792-794, Feb. 1988.
- [16] W. H. Richardson and R. M. Shelby, "Nonclassical light from a semiconductor laser operating at 4 K," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, pp. 400-403, Jan. 1990.
- [17] S. Inoue, H. Ohzu, S. Machida, and Y. Yamamoto, "Quantum correlation between longitudinal-mode intensities in a multimode squeezed semiconductor laser," *Phys. Rev. A*, vol. 46, pp. 2757-2765, Sept. 1992.
- [18] M. J. Freeman, H. Wang, D. G. Steel, R. Craig, and D. R. Scifres, "Amplitude-squeezed light from quantum-well lasers," *Opt. Lett.*, vol. 18, pp. 379-381, Mar. 1993.
- [19] N. Tornau and A. Bach, "Quantum statistics of two-photon absorption," *Opt. Commun.*, vol. 11, pp. 46-49, May 1974.

- [20] H. Paul, U. Mohr, and W. Brunner, "Change of photon statistics due to multi-photon absorption," *Opt. Commun.*, vol. 17, pp. 145-148, May 1976.
- [21] A. Bandilla and H.-H. Ritze, "Einfluss einer inneren Zwei-Photonen-Absorptionszelle auf die Photonenstatistik eines Ein-Moden-Lasers," *Opt. Commun.*, vol. 19, pp. 169-171, Nov. 1976. In German.
- [22] L. Mandel, "Squeezing and photon antibunching in harmonic generation," *Opt. Commun.*, vol. 42, pp. 437-439, Aug. 1982.
- [23] L. A. Lugiato, G. Strini, and F. D. Martini, "Squeezed states in second-harmonic generation," *Opt. Lett.*, vol. 8, pp. 256-258, May 1983.
- [24] Z. Y. Ou, "Propagation of quantum fluctuations in single-pass second-harmonic generation for arbitrary interaction length," *Phys. Rev. A*, vol. 49, pp. 2106-2116, Mar. 1994.
- [25] R.-D. Li and P. Kumar, "Quantum-noise reduction in traveling-wave second-harmonic generation," *Phys. Rev. A*, vol. 49, pp. 2157-2166, Mar. 1994.
- [26] R. Lang, M. O. Scully, and J. Willis E. Lamb, "Why is laser line so narrow? a theory of single-quasimode laser operation," *Phys. Rev. A*, vol. 7, pp. 1788-1797, May 1976.
- [27] B. Yurke, "Use of cavities in squeezed-state generation," *Phys. Rev. A*, vol. 29, pp. 408-410, Jan. 1984.
- [28] M. J. Collett and C. W. Gardiner, "Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification," *Phys. Rev. A*, vol. 30, pp. 1386-1391, Sept. 1984.
- [29] C. W. Gardiner and M. J. Collett, "Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and master equation," *Phys. Rev. A*, vol. 31, pp. 3761-3774, June 1985.
- [30] H. J. Carmichael, "Spectrum of squeezing and photo current shot noise: a normally ordered treatment," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 4, pp. 1588-1603, Oct. 1987.
- [31] J. Gea-Banacloche, N. Lu, L. M. Pedrotti, S. Prasad, M. O. Scully, and K. Wodkiewicz, "Treatment of the spectrum of squeezing based on the modes of the universe. I. Theory and a physical picture.," *Phys. Rev. A*, vol. 41, pp. 369-387, Jan. 1990.

- [32] M. J. Collett and D. F. Walls, "Squeezing spectra for nonlinear optical systems," *Phys. Rev. A*, vol. 32, pp. 2887-2892, Nov. 1985.
- [33] M. J. Collett and R. B. Levien, "Two-photon-loss model of intracavity second-harmonic generation," *Phys. Rev. A*, vol. 43, pp. 5068-72, May 1991.
- [34] S. Schiller and R. L. Byer, "Quadruply resonant optical parametric oscillation in a monolithic total-internal-reflection resonator," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 10, pp. 1696-1707, Sept. 1993.
- [35] Z. Y. Ou, "Quantum-nondemolition measurement and squeezing in type-II harmonic generation with triple resonance," *Phys. Rev. A*, vol. 49, pp. 4902-4911, June 1994.
- [36] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*. New York: John Wiley & Sons, 1973.
- [37] H. P. Yuen and V. W. S. Chan, "Noise in homodyne and heterodyne detection," *Opt. Lett.*, vol. 8, pp. 177-179, Mar. 1983.
- [38] J. H. Shapiro, "Quantum noise and excess noise in optical homodyne and heterodyne receivers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. QE-21, pp. 237-250, Mar. 1985.
- [39] D. F. Walls, M. J. Collett, and A. S. Lane, "Amplitude-noise reduction in lasers with intracavity nonlinear elements," *Phys. Rev. A*, vol. 42, pp. 4366-4373, Oct. 1990.
- [40] S. Reynaud and A. Heidmann, "A semiclassical linear input output transformation for quantum fluctuations," *Opt. Commun.*, vol. 71, pp. 209-214, May 1989.
- [41] J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, and P. S. Pershan, "Interactions between light waves in a nonlinear dielectric," *Phys. Rev.*, vol. 177, pp. 1918-1939, Sept. 1962.
- [42] K. Ikeda, "Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system," *Opt. Commun.*, vol. 30, pp. 257-261, Aug. 1979.
- [43] C. W. Gardiner and C. M. Savage, "A multimode quantum theory of a degenerate parametric amplifier in cavity," *Opt. Commun.*, vol. 50, pp. 173-178, Jun. 1984.
- [44] P. Pliszka and P. P. Banerjee, "Propagational model of second/sub harmonic generation in a ring cavity," *Opt. Commun.*, vol. 103, pp. 130-144, Nov. 1993.

- [45] P. Kürz, R. Paschotta, K. Fiedler, A. Sizmann, G. Leuchs, and J. Mlynek, "Squeezing by second-harmonic generation in a monolithic resonator," *Appl. Phys. B*, vol. 55, pp. 216–225, 1992.
- [46] P. D. Drummond and D. F. Walls, "Quantum theory of optical bistability. I: Nonlinear polarisability model," *J. Phys. A*, vol. 13, pp. 725–741, 1980.
- [47] C. M. Savage and D. F. Walls, "Optical chaos in second-harmonic generation," *Opt. Acta*, vol. 30, no. 5, pp. 557–561, 1983.
- [48] M. A. M. Marte, "Competing nonlinearities," *Phys. Rev. A*, vol. 49, pp. R3166–R3169, May 1994.
- [49] J. A. Giordmaine and R. C. Miller, "Tunable coherent parametric oscillation in LiNbO_3 ," in *Physics of Quantum Electronics* (P. L. Kelley, B. Lax, and P. E. Tannenwald, eds.), pp. 31–42, New York: McGraw-Hill, 1966.
- [50] D. K. Serkland, M. M. Fejer, R. L. Byer, and Y. Yamamoto, "Squeezing in a quasi-phase-matched LiNbO_3 waveguide," *Opt. Lett.*, vol. 20, pp. 1649–1651, Aug. 1995.

研究公表

本研究に関する論文発表

- [A1] J. Maeda and K. Kikuchi, "Bright squeezing by singly resonant second-harmonic generation: Effect of fundamental depletion and feedback," *Opt. Lett.*, vol.21, pp.821-823, Jun. 1996.
- [A2] J. Maeda and K. Kikuchi, "Squeezing characteristics analysis of fundamental-confined second-harmonic generation system by means of self-consistent method," *J. Opt. Soc. Am. B* 誌に投稿中。

本研究に関する学会研究会発表

- [B1] 前田譲治, 菊池和朗, "共振器内第二高調波発生器の振幅スクイーミング特性," 電子情報通信学会技術研究報告「光・量子エレクトロニクス」OQE93-22, May 1993.
- [B2] 前田譲治, "共振器内第二高調波発生システムにおけるパラメトリック不安定性の理論解析," 電子情報通信学会技術研究報告「レーザ・量子エレクトロニクス」LQE95-98, Nov. 1995.

本研究に関する学会年次大会発表

- [C1] 前田譲治, 菊池和朗, "レーザ共振器内2次高調波発生による光の振幅スクイーミング実現の条件に関する検討," 1992年電子情報通信学会春期大会 C-289.

本研究以外の論文発表

- [D1] 前田譲治, "波長多重化ピコ秒光ソリトンの入射時間制御による周波数シフトの抑制," レーザー研究, vol. 23, no. 9, pp.795-800, 1995.

本研究以外の学会研究会発表

- [E1] 菊池和朗, 前田譲治, “パラメトリック自然放出光における光量子相関,” 電子情報通信学会技術研究報告「光・量子エレクトロニクス」OQE90-2, Apr. 1993.
- [E2] 阿部秀士, 前田譲治, 大越孝敬, “光ソリトンの波長多重伝送に対する各種非線形光学効果の影響,” 電子情報通信学会技術研究報告「レーザ・量子エレクトロニクス」LQE94-61, Dec. 1994.
- [E3] 宮本学, 前田譲治, “レーザ共振器内部第二高調波発生システムの雑音低減,” 電子情報通信学会技術研究報告「レーザ・量子エレクトロニクス」LQE95-128, Jan. 1996.

本研究以外の学会年次大会発表

- [F1] 前田譲治, 大越孝敬, “非線形複屈折の存在する光ファイバのパルス伝送特性,” 1994年電子情報通信学会春季大会 C-405.
- [F2] 前田譲治, 大越孝敬, “中継増幅を用いた光ソリトン伝送に対するファイバ複屈折の影響,” 1994年電子情報通信学会秋季大会 C-288.
- [F3] 阿部秀士, 前田譲治, “波長多重された光ソリトン間相互位相変調効果による周波数シフトの抑制,” 1995年電子情報通信学会総合大会 C-402.
- [F4] 野村博, 小川義信, 前田譲治, “植物の葉表面における自励発振波形のリアブノフスペクトラム解析,” 1995年電子情報通信学会総合大会 D-183.
- [F5] 柳本友弥, 前田譲治, “二重共振型第二高調波発生システムの自励発振時におけるスキューニング特性,” 1995年電子情報通信学会エレクトロニクスソサイエティ大会 C-264.
- [F6] 阿部秀士, 前田譲治, “波長多重化光ソリトンの伝送制御,” 1995年電子情報通信学会エレクトロニクスソサイエティ大会 C-268.
- [F7] 阿部秀士, 前田譲治, “分散揺らぎをもつファイバ伝送路における波長多重化ピコ秒光ソリトンの伝送特性,” 1996年電子情報通信学会総合大会 C-341.
- [F8] 柳本友弥, 前田譲治, “二重共振型第二高調波発生システムの双安定発振現象とスキューニング特性,” 1996年電子情報通信学会総合大会 C-350.

謝辞

本論文は、菊池和朗教授のきめ細やかな御指導のもとに、完成させることができたものです。菊池先生には、時には厳しい、しかし極めて的を射た御指摘を賜りましたが、その度に自分の未熟さを痛感致し、ともすると易きに流れようとする自分を引き留めることができました。深く御礼申し上げます。

学部生時代の卒業論文の指導教官として、また東京理科大学における上司として常に御指導して下さいました、故大越孝敬名誉教授には、研究者としてのみならず、教育者として、あるいは研究室を運営する者としての心構えについて、有形無形の御指導を賜りました。心より御礼申し上げますと共に、御冥福をお祈り申し上げます。

公私ともに懇意にさせていただいております東京理科大学の周英明教授は、学生の指導と自らの研究の狭間で苦しんでいる私を、いつも励まして下さいました。ありがとうございました。本論文の完成が遅れ、御心痛をお掛けしましたことをお詫び申し上げます。

現在の私の上司である小越澄雄 東京理科大学助教授には、私に最大限の自由を下さって、研究の進行を助けて頂きました。大変感謝しております。

先端科学技術研究センターの保立和夫教授、山下真司講師には、常に温かく見守って頂き、また、東京理科大学へ移る際にもさまざまな援助を賜りました。ありがとうございました。

私がそもそも量子光学の道に足を踏み入れたのは、大学・大学院時代の同級生である、磯島隆史君、菅原宏治君の影響があったからです。磯島君が卒業研究で取り組んでおられたパラメトリック自然放出光の光子相関に関する研究は、私の修士時代での研究の基礎になりましたし、スクイズド光に関する興味を育ててくれたのでした。駒場時代からの悪友となる菅原君と3人で交わした議論、実は光のことよりも秋葉原に関する冗談の方が多かったのですが、その楽しさの中に、自分の興味を次第に見付けていったような気がします。それをいや強くしたのは、NTT 基礎研究所の山本喜久氏が東京大学の非常勤講師として招かれたときに下さった御講義でした。現代量子光学の贅沢なレビューであったその講義は、大変強い印象となって私の脳裏に焼き付いております。山本氏には講義の終了後や、学会の場で

も、長々と御討議頂くなど、大変お世話になりました。

光の研究が如何に幅広いものであるかを教えて下さったのは、藤井陽一 生産技術研究所 名誉教授でした。先生には、量子光学の古典的名著である W. H. Louisell 「輻射場の量子統計」の詳しい解説をいただいたり、また研究以外でも様々なユニークなアドバイスをいただきました。

田宮寿美子元講師、石橋隆一助手、北沢清子助手、加藤一弘技官には、大学院在学中の研究生活を支えて頂きました。また、丁明氏、箱守克彦氏をはじめ、大越・菊池研究室の大学院生、研究生の皆様には、いつも快く相談を引き受けて頂きました。先端科学技術センターの大越・保立研究室の皆様にも、公私に渡り大変お世話になりました。東京理科大学の大越研究室・小越研究室の学生諸君には、人の価値観の多様さと客観性の大切さを教えていただきました。

これまでお世話頂いた方々皆様に心より御礼申し上げます。最後に、蔭で支えてくれ、時には厳しく叱責してくれた私の母に、この論文を心待ちにして大変辛い思いすらさせてしまった私の妻に、そして、自らの無念を託してくれた私の父に、ありがとう。