

東京大学 大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系
先端エネルギー工学専攻

平成 27 年度

修士論文

コースティングを含んだ低推力軌道のモデル化と
VILM への応用

2016 年 2 月 2 日提出
指導教員 川勝 康弘 准教授

47146045 小倉 聡司

要約

本研究では、コースティングを含んだ低推力軌道のモデル化を行い、それを応用して VILM の解析解を求めた。具体的には、推力ベクトルが一定の角速度で回転するようなモデル化を Hill 方程式で行った。また、軌道上をコースティング区間とスラスト区間に分割し、それぞれの区間で運動方程式を解き、それらを境界条件で連結することでコースティングを含んだ低推力を用いた VILM の解析解を求めた。得られた解析解を DCNLP を用いた数値最適化による解と比較、検証し、先行研究で得られていたフルスラスト解析解よりも良い精度で数値的最適解を再現できることが示された。コースティングを含んだ低推力を用いた VILM の解析解を求める試みは、世界でもはじめての試みである。この解析解により、DCNLP 等の大規模で複雑な低推力軌道最適化のためのコーディングを行うこと無く、EDVEGA 軌道の簡易的な見積もりを行うことが可能となった。また、短時間で網羅的に軌道の解析を行えることから、VILM の特性解析が可能となる。

本論文では、

フルスラスト コースティングを含まない VILM

シングルスラスト スラスト区間の前後にコースティング区間を含む VILM

マルチスラスト 任意のスラスト区間とコースティング区間を含む VILM

の順で解析解を求め、DCNLP を用いた数値最適化による解と比較することで得られた解析解の検証を行った。その結果、数個の推力パラメータを設計変数とするだけで、ある程度良い精度で DCNLP の最適化結果を再現できることが示された。

目次

要約	i
第 1 章 序論	1
1.1 太陽系探査の展望	1
1.2 研究目的	4
第 2 章 VILM と DCNLP	6
2.1 VILM	6
2.2 DCNLP	12
第 3 章 Full Thrust	20
3.1 定式化	20
3.2 求解	22
3.3 検証	29
第 4 章 Single Thrust	42
4.1 方法	42
4.2 求解	45
4.3 検証	55
第 5 章 Multi Thrust	60
5.1 方法	60
5.2 求解	61
5.3 検証	63
第 6 章 結論	73
6.1 本研究の成果	73
6.2 今後の課題	73
参考文献	74
謝辞	75
修士論文発表リスト	76

第1章

序論

1.1 太陽系探査の展望

1.1.1 太陽系探査の動向

太陽系探査において、日本が力を入れようとしているのは「太陽系小天体」等への探査と「サンプルリターン」等の日本独自技術の育成である [1]。アメリカやヨーロッパに比べて圧倒的に少ない日本の宇宙開発予算 [2] で、世界第一級の成果を出すためには「選択と集中」が必要になる。図 1.1.1 に近年世界で実施・検討されているミッションを示す。

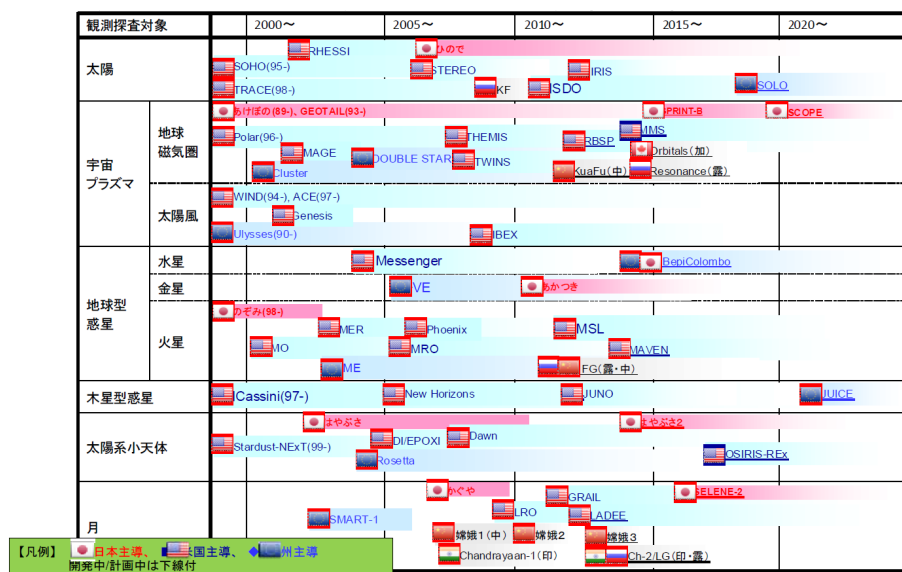


図 1.1.1 世界で実行されるミッションと日本の実行するプロジェクト（太陽系探査科学探査機ミッション）
出所）科学技術・学術審議会，研究計画・評価分科会，宇宙開発利用部会『文部科学省における宇宙分野の推進方策について [参考資料 3]』2012 年 12 月 [2]

図 1.1.1 に示す通り，アメリカとヨーロッパには多くの天体・技術で先行されている。しかし，世界的にも十分に探査されておらず，技術的にも日本が先行している分野がある。それが「太陽系小天体」であり，「サンプルリターン」である。太陽系小天体には太陽系ができた当時の情報がつまっており，探査を行う価値は十二分にある。しかし，数えるほどの探査しかなされていない。また，探査を行うにあたっては，「観測」，「その場実験」，「地球に持ち帰り実験（サンプルリターン）」の 3 種類に大別されるが，最も多くの情報を精度よく引き出せるのは，言うまで

もなく「サンプルリターン」である。しかし、同時に難度も最も高くなる。月を除く地球外の天体から「物質」を持ち帰ったのはたったの3機であり、「ジェネシス」、「スターダスト」、そして「はやぶさ」である。しかし、ジェネシスとスターダストは宇宙空間に漂っていた塵を集めてきただけであり、「天体」から直接サンプルを持ち帰ったわけではない。「はやぶさ」は、月以外の天体から直接サンプルを採取して持ち帰ってきたただ唯一の探査機なのである。この、まだまだ探査された実績の浅い「太陽系小天体」に対して、世界でも日本が先行している「サンプルリターン」技術を集中して磨くことで、世界をリードしていくことを目指している。

この「サンプルリターン」を可能にした、最も重要な技術が「電気推進」であり、はやぶさが世界で初めて実施した「EDVEGA (Electric Delta-V Earth Gravity Assist)」である。

1.1.2 宇宙科学・探査プロジェクトの推進方策

今後の宇宙科学・探査プロジェクトの推進方策として、以下の3本柱が示されている [3]。

戦略的に実施する中型計画（300 億程度） 世界第一級の成果創出を目指し、各分野のフラッグシップ的なミッションを日本がリーダとして実施する。

公募型小型計画（100 億-150 億規模） 高頻度な成果創出を目指し、機動的かつ挑戦的に実施する小型ミッション。地球周回/深宇宙ミッションを機動的に実施。現行小型衛星計画から得られた経験等を活かし、衛星・探査機の高度化による軽量高機能化に取り組む。等価な規模の多様なプロジェクトも含む。

多様な小規模プロジェクト群（10 億/年程度） 海外ミッションへのジュニアパートナーとしての参加、海外も含めた衛星・小型ロケット・気球など飛翔機会への参加、小型飛翔機会の創出、ISS を利用した科学研究など、多様な機会を最大に活用し成果創出を最大化する。

今後 10 年間で、戦略的に実施する中型計画を 3 機、公募型小型計画を 2 年に 1 機のペースで計 5 機打ち上げることが宇宙基本計画の中で示されている。また、渡邊誠一郎氏の「宇宙科学・探査ロードマップと惑星科学」[4] の中では、「太陽系探査科学分野は、最初の約 10 年を機動性の高い小型ミッションによる工学課題克服・技術獲得と先鋭化したミッション目的を立て、10 年後以降の大型ミッションによる本格探査に備える」のように示されている。また、「宇宙科学・探査ロードマップ 検討の現状」[1] の「太陽系探査科学分野の将来構想」中でも、「惑星周回探査や重力天体着陸探査については、小型探査により日本独自の技術を育成した上で、欧米とは差別化された本格的探査を立案・実施する」のように記されている。まとめると、当面の日本の太陽系探査においては、まず 2 年に 1 機打ち上げる小型計画で日本独自の技術を育成し、その後、中型計画での探査に注力していくことになる。

1.1.3 太陽系探査科学ミッション

現在 JAXA で検討されている太陽系探査科学ミッションを幾つか簡単に紹介する。1 つ目は、第 1 回公募型小型計画で採択された「SLIM」。2 つ目は、第 2 回公募型小型計画での採択を目指している「DESTINY+」。3 つ目は、トップダウン形式で検討がはじまり、戦略的中型計画での打ち上げを目指している「火星衛星サンプルリターン計画」。最後に、戦略的中型計画として現在選定中の段階にある「ソーラー電力セイルによる木星トロヤ群サンプルリターン計画」である。どれも前節までに記述してきた計画・方針に則ったものであり、特に「DESTINY+」と「トロヤ群サンプルリターン計画」、加えて「火星衛星サンプルリターン計画」では、「電気推進」がキモの技術となっており、日本の深宇宙探査において欠かせない技術となっていることが伺える。

SLIM (Smart Lander for Investigating Moon) [5], [6] 「降りたいところに降りる」着陸技術を工学的に実証することで、将来の科学探査の可能性を広げることを目指している。打上げ時重量は 650kg で、推奨が 500kg を占める。500N 級メインスラスター 1 基と 20N 級の RCS を 8 基搭載する。SLIM では、以下に示す 7 つの先端技術の実証を行

う。着陸誘導制御系，着陸衝撃吸収システム，障害物検知手法，障害物検知手法，障害物検知手法，画像照合航法，先端電源系，先進熱制御系，タンクを主構体とする構造の7つである。イプシロンによる打ち上げ後，自らの化学推進で月遷移軌道に乗り換え（消費推薬 232kg），その後月周回軌道に乗り換える（消費推薬 54kg）。何度かの軌道制御を行った後，月面へのランディングを行う（消費推薬 150kg）。打ち上げからランディングで1ヶ月程度の短期ミッションを予定している。

SLIM は技術習得を目的としているが，小型探査機である SLIM のシステム技術は，将来様々な月惑星探査への発展が可能である。「複数ランダによる分散型探査への応用」，「オービタ + ランダ構成ミッションのランダへの応用」，「サンプルリターンミッションでの，月面からの帰還機への応用」等である。低リソースでの着陸探査の実現により，探査機会を増やすことが可能であり，科学的に評価の定まっていない挑戦的な探査対象への着陸も実現しやすくなる。

DESTINY+ (Demonstration and Experiment of Space Technology for IN terplanetary voYage Phaethon fLyby with reUSable probe) 「高性能深宇宙航行」，「小型・軽量・低消費電力機器」，「理想的な理学ミッション」，「子機による近接探査」の4項目を売りとしている。具体的には，高効率高性能な薄膜軽量太陽電池パドル，超高性能イオンエンジン，先端的熱制御を実証する「高性能宇宙航行」，質量・電力・発熱・個数等のアビオニクスを半分にする「小型・軽量・低消費電力機器」，大きな宇宙航行能力を要するミッションとして「小惑星 Phaethon フライバイ」からその後他天体へのマルチフライバイを狙う「理想的な理学ミッション」，最後に，親機の代わりに危険な小惑星近傍に接近する子機「PROCYON mini」の「子機による接近探査」である。

DESTINY+ では，まずイプシロンによって地球を周回する超楕円軌道へ投入される。その後，1年程度の時間を掛けて電気推進で加速し，自力で地球重力圏を脱出する。さらに電気推進で軌道変更を行い，Phaethon への小惑星フライバイを目指す。イプシロンでは地球周回軌道投入が限界であるが，地球重力圏を脱出し，さらには小惑星フライバイを実現するまでの軌道変更能力を電気推進は可能にする。小惑星フライバイだけではなく，金星や火星への周回軌道投入すらもが，イプシロン打ち上げの小型計画であっても，DESTINY ならその能力を有していると考えられている。



図 1.1.2 SLIM

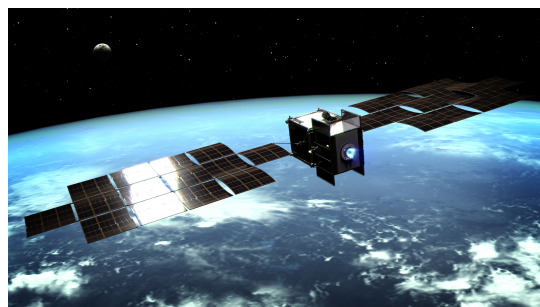


図 1.1.3 DESTINY

火星衛星サンプルリターン計画 [7] 火星の衛星「フォボス」からサンプルリターンする計画で，2020 年代前半の打ち上げを計画している。化学推進と電気推進のどちらを積むか，あるいは両方共積むかについては検討中の段階にあり，後述するようなトレードオフの関係にある。

ソーラー電力セイルによる木星トロヤ群サンプルリターン計画 [8] 太陽からの光の粒子を反射する力で推進する「ソーラーセイル」と高性能な電気推進を組み合わせる木星のトロヤ群まで到達し，サンプルリターンを行う計画。打ち上げ後，地球で2年同期の EDVEGA を実行し，まずは木星へ向かう。木星でのスイング・バイ後，トロヤ群に到達する。往復で30年前後を要する壮大な計画である。ここでも「電気推進」がキモの技術であり，効率的に燃料を節約し，加速することのできる EDVEGA を実行している。

1.2 研究目的

1.2.1 電気推進と VILM

上述してきたように、電気推進等の低推力は近年の深宇宙探査ミッションにおいて無くてはならない大変重要な技術となっている。なぜなら、従来から存在した化学推進では I_{sp} が数百秒と小さく、軌道変更に大量の燃料を必要としていたが、 I_{sp} が数千秒と非常に大きい電気推進を用いれば、少量の燃料で大きな軌道変更を可能にするからである。

従来から存在した有用な増速手法に VILM がある。VILM は、化学推進を用いたインパルス的な増速と天体のスイングバイを組み合わせた増速手法である。この手法において、化学推進を電気推進に置き換えたものが低推力を用いた VILM である。高効率な電気推進を用いることで、化学推進を用いた VILM よりも少ない燃料で同等の増速を得る。特に、地球をスイングバイする場合には、化学推進の場合が「 $\Delta VEGA$ (Delta-V Earth Gravity Assist)」, 電気推進の場合が「EDVEGA (Electric Delta-V Earth Gravity Assist)」と呼ばれる。世界ではじめて EDVEGA を実施したのは「はやぶさ」であり、世界にその有用性を示した。「はやぶさ」の成功を皮切りに、2016 年度に打ち上げ予定のベピコロポでも EDVEGA の実施が予定されており、また、DESTINY+ の応用ミッションや次期ソーラー電力セイルなどにおいても EDVEGA の活用が検討されている。

1.2.2 低推力軌道設計の現状と問題点

現在は通常、EDVEGA 等の低推力軌道最適化には、DCNLP[9] をはじめとする数値最適化手法により、ある評価関数を最適にする解を数値的に求めるという手法で軌道設計が行われている。しかし、最適化プログラムのコーディングとチューニングには熟達した知識と経験が必要であり、ハードルは高いものになっている。また、1 つの最適化計算に長い時間を要したり、求めている解が得られなかったり、得られたとしてもその解がローカルミニマムとグローバルミニマム、どちらの解なのか判断するのが困難である等の問題がある。

VILM の定式化は、幾つかの論文 [10], [11] で試みられてきているが、どれもフルスラスト（地球を出発してから再会合するまでの全区間でスラスト）の場合であり、コースティング区間を複数含む実用の VILM を正しく再現できているとは言いがたい状態にある。また、2 年同期以上の VILM (EDVEGA) に関してはほとんど定式化が試みられていない状態にある。これは、2 年同期以上の VILM (EDVEGA) においては、

- 第 2 天体（探査機がスイングバイする天体）の軌道を真円と仮定した Hill 方程式を用いているため、第 2 天体から探査機が遠く離れる問題を扱えない
- 一般的に、2 年同期軌道では非常に長いコースティング期間を含む

等の問題に起因すると考えられる。

1.2.3 本研究の目的と手法

本研究では、コースティングを含んだ低推力軌道のモデル化を行い、それを応用して VILM の解析解を求めた。具体的には、推力ベクトルが一定の角速度で回転するようなモデル化を Hill 方程式で行った。また、軌道上をコースティング区間とスラスト区間に分割し、それぞれの区間で運動方程式を解き、それらを境界条件で連結することでコースティングを含んだ低推力を用いた VILM の解析解を求めた。得られた解析解を DCNLP を用いた数値最適化による解と比較、検証し、先行研究で得られていたフルスラスト解析解よりも良い精度で数値的最適解を再現できることが示された。コースティングを含む VILM の解析解を求める試みは、世界でも今だに取り組みれてこなかった試

みである。また、本研究の手法を応用することで、今まで触れられてこなかった 2 年同期以上の VILM (EDVEGA) においても解析解を求められる可能性があると考えている。

また、留意点として、本研究は部分的に EDVEGA 軌道で話を進めたり説明を行ったりする部分があるが、これはあくまでも「例」として地球を使っているだけで、実際には低推力を用いた VILM 全般に言えることと解釈していただきたい。

1.2.4 論文の概要

まず第 2 章で、VILM の簡単な説明と本研究で実装した DCNLP の説明を行い、また、DCNLP を用いた数値最適化の結果も示す。第 3 章、第 4 章、第 5 章では、順に

フルスラスト コースティングを含まない VILM

シングルスラスト スラスト区間の前後にコースティング区間を含む VILM

マルチスラスト 任意のスラスト区間とコースティング区間を含む VILM

の解析解を求め、DCNLP により得た EDVEGA 軌道の最適解と比較することで、得られた解析解の検証を行う。最後の第 6 章で、研究全体のまとめを行う。

第 2 章

VILM と DCNLP

VILM の基本的な説明と本研究で実装した DCNLP の説明を行い，最後に DCNLP を用いた数値的最適化結果を示す．VILM の原理を説明し，「直接打上」，「化学推進による VILM」，「電気推進による VILM」のそれぞれで，増速量と消費燃料にどのくらいの差が出るのか定量的に示す．また，EDVEGA（低推力を用いた VILM）の軌道のタイプをいくつか説明する．VILM の最後に，本研究で再現を試みるターゲットになる軌道が「1 年同期軌道と 1.4 年同期軌道」であることを述べる．これは運動方程式に Hill 方程式を用いるために起きる制約である．

DCNLP の説明では，はじめに DCNLP の概要を説明したあと，実装したプログラムの構成（運動方程式，変数，設定パラメータ，制約条件）を順番に示していく．また，本研究の全体を通して重要になる，「Steering Angle」の定義の説明を行う．最後に，実装した DCNLP を用いた数値的最適化による結果を示す．

2.1 VILM

2.1.1 有用な増速手法

宇宙航行には探査機の増減速が必要不可欠である．増減速を行う手法としては，スラスタで増減速を行う化学推進や電気推進，惑星の重力を利用して増減速を行うスイングバイなどが挙げられる．現状の宇宙探査では，探査機を一度打ち上げてしまうと燃料の補給ができないため，燃料を消費しないスイングバイによる増速は大変魅力的なのである．この有益なスイングバイをより効率的に利用するために行うのが「VILM (V-Infinity Leveraging Maneuver)」である．

2.1.2 VILM と Δ VEGA

スイングバイを利用するためには，当然何かしらの惑星に会合する必要がある．地球近傍の惑星と言えば金星や火星であり，ガリレオやカッシーニ，ロゼッタなど，木星や土星などの外惑星を目指す，大きい増速が必要となるミッションなどで利用されてきた．しかし，金星や火星に到達するためにはそもそも大きい増速が必要となる．出発時の増速量を少なくしつつ，スイングバイを有効に利用できる天体が「地球」である．

地球から出発し，慣性飛行で地球と再会合するためには，1 年同期，1.4 年同期，2 年同期等の決められたタイムオブフライトが存在する．ここでは，軌道図が見やすい 2 年同期の場合で説明する．

地球を用いてスイングバイを行う場合の原理を図 2.1.1 で説明する．スイングバイによる増速の原理は，主天体に対して探査機の相対速度が変更されることで行われる．そこで増速されるためには，探査機が主天体の進行方向に対して偏角を有して進入する必要がある．

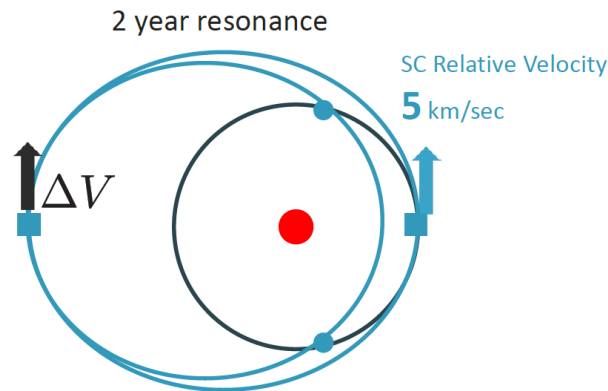


図 2.1.1 地球を用いた Swing-by による増速

2 年同期で打ち上げられた場合，探査機は主天体の進行方向に対して偏角を持たずに再会合するため，増速するどころが減速してしまうことになる．そこで，偏角をつけるために行われるのが VILM である．図 2.1.1 では，2 年同期の場合の VILM の概略図を示している．無限遠脱出速度が 5km/sec 程度で 2 年同期軌道に入る．VILM では，遠日点にて偏角をつけるための ΔV を行い，出発した地点よりも前方か後方で地球と再会合し，スイングバイによる増速を行う．

以上のように，「主天体の進行方向に対し，探査機の世界ベクトルに偏角を持たせるマヌーバを行い，天体とスイングバイを行う」のが「VILM」であり，地球でスイングバイを行う場合には「 Δ VEGA (Delta-V Earth Gravity Assist)」と呼ばれる．「偏角を持たせるため」と記述したが，「相対速度を大きくするため」あるいはもっと表面的には「離心率を大きくするため」と言うこともできる．

2.1.3 なぜ VILM と呼ばれるのか

VILM (V-Infinity Leveraging Maneuver) を直訳すると，「無限遠速度に『てこ』入れするマヌーバ」となる．どこが「てこ」なのだろうか．地球から火星に向かうようなケースを考えてみる．

$$V_{\infty 2} - V_{\infty 1} > \Delta V$$

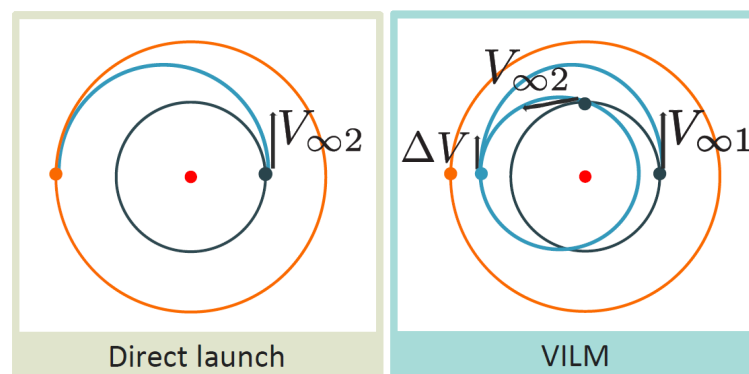


図 2.1.2 VILM の原理

異なる軌道間の遷移において最も効率が低い「ホーマン遷移軌道」の場合（図 2.1.2 左）と VILM を比較する．ホーマン遷移において，地球から火星に向かうために必要であった地球出発時の無限遠速度が $V_{\infty 2}$ であったとする．

VILM においては、 $V_{\infty 2}$ よりも小さい速度 $V_{\infty 1}$ で地球出発する．その後、遠日点で ΔV のスラストを行い、地球と再会合し、スイングバイ後に無限遠脱出速度 $V_{\infty 2}$ で同じくホームン軌道に遷移するものとする．

本来であれば、火星に遷移するホームン軌道に乗るために、 $V_{\infty 1}$ と $V_{\infty 2}$ の差分の増速が必要になる．ところが、 Δ VEGA においては、その差分よりも小さい増速量 ΔV で済むのである．これは、単純な増速するよりも、遠日点で偏角を持たせるためのマヌーバ（遠日点で軌道変更を行うためのマヌーバ）を行った方が効率が良いことに起因する．以上のように、本来必要であった増速量よりも少ない増速量で同等の効果を生むことから、VILM (V-Infinity Leveraging Maneuver), 「無限遠速度に『てこ』入れするマヌーバ」と呼ばれている．

2.1.4 Δ VEGA と EDVEGA

前項までで説明してきたように、「遠日点（または近日点）で偏角を持たせるためのマヌーバ」と「地球スイングバイ」を組み合わせた「 Δ VEGA」は、単純に増速するよりも効率が良くなる．これまで、 Δ VEGA には、化学推進等のインパルスの増速を用いてきた．この化学推進を、より高効率な電気推進等の低推力に置き換えたものが EDVEGA (Electric Delta-V Earth Gravity Assist) である．具体的な例を図 2.1.3 に示す．

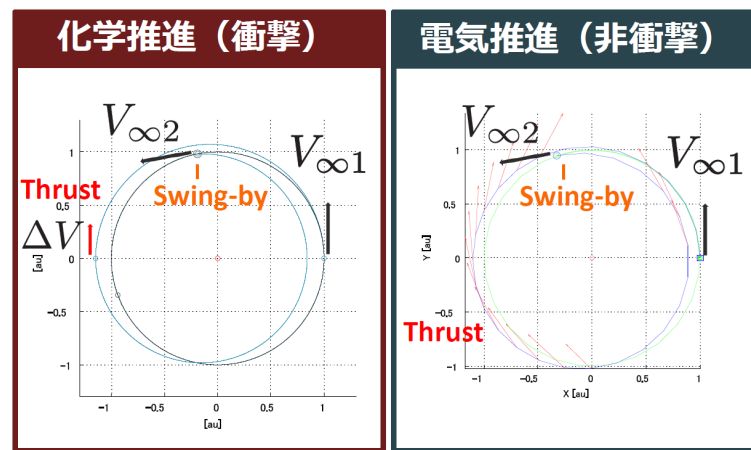


図 2.1.3 VILM の例

2.1.3 では、それぞれ太陽中心赤道面基準慣性座標系で描かれており、中心の赤い円が太陽、緑が地球の軌道、青が探査機の軌道、赤いベクトルが推力ベクトルを表している．

電気推進では、低推力を補うために有限のスラスト期間が必要となる．また、遠日点だけではなく近日点におけるマヌーバも行っている．この近日点で行っているマヌーバも「偏角を持たせるためのマヌーバ（離心率を大きくするためのマヌーバであり、相対速度を大きくするためのマヌーバ）」である．前項までは遠日点のみで実施する VILM の説明をしてきたが、近日点で実施しても同様の効果が得られるものであり、化学推進のケースでも遠日点と近日点で実施しても良い．ただ、化学推進では一回のスラストで十分な推力を得られるため、わざわざ分割する必要はほとんどない．電気推進における遠日点と近日点でのスラストは、有限のスラスト期間が必要となるために生じる苦肉の策と呼べる．ちなみに、「偏角を持たせる（離心率を大きくする、相対速度を大きくする）」には、遠日点、または近日点でマヌーバを実施しないと効果が薄いことは当然であるが、そのために電気推進では遠日点付近と近日点付近の 2 つのスラスト区間が表れている．

表 2.1.1 に「Direct launch」、「 Δ VEGA」、「EDVEGA」の増速量と消費燃料の関係を示す．

表 2.1.1 増速量と消費燃料比較

	Direct launch	Δ VEGA	EDVEGA
$V_{\infty 1}$	-	1030 m/sec	1142 m/sec
$V_{\infty 2}$	4730 m/sec	4730 m/sec	4477 m/sec
ΔV	-	1300 m/sec	2191 m/sec
$V_{\infty 1}$ 消費燃料	-	140 kg	-
$V_{\infty 2}$ 消費燃料	390 kg	-	-
ΔV 消費燃料	-	170 kg	30 kg

ただし，探査機の質量は 500kg とし，化学推進の比推力は 320[sec]，電気推進の比推力は 3800[sec] とした．

表 2.1.1 は，正確に同じ条件で比較してはいわけではないので，あくまでオーダーの参考値として見ていただきたい． $V_{\infty 1}$ から ΔV までは，それぞれの速度を表し，「Direct launch」の「 $V_{\infty 2}$ 消費燃料」と「 Δ VEGA」の「 $V_{\infty 1}$ 消費燃料」・「 ΔV 消費燃料」は，化学推進で要求された増速を行う場合の消費燃料，「EDVEGA」の「 ΔV 消費燃料」は，電気推進で要求された増速を行う場合の消費燃料をそれぞれ表している．

表 2.1.1 からは，重要な事実をいくつか指摘する．まず，「 Δ VEGA」よりも「EDVEGA」の方が増速量 ΔV が大きいという点である．これは，低推力を用いた場合には効率の良い遠日点と近日点以外の軌道上でもスラストしなければならないことに起因し，スラスト区間が長くなることで増速量が増加してしまっている．その点を念頭に置いた上で注目したいのが， ΔV のために消費した燃料である． Δ VEGA が 170kg 程度なのに対して，EDVEGA では 30kg と，5 分の 1 以上小さくなる．これこそが化学推進ではなく電気推進を用いることのメリットである．つまり，「 Δ VEGA の方が EDVEGA より効率が良い（増速が少ない）が，消費燃料は圧倒的に大きくなる」となる．

次に，直接打ち上げよりも Δ VEGA の方が，トータルで見積もった消費燃料も小さくなることを指摘する．通常，地球脱出時にはロケットを用いるが，ここでは探査機が自力でスラストする場合を考えてみる．直接打ち上げの場合には，390kg 消費しているのに対して， Δ VEGA の場合には，トータルでも 310kg 程度で済む計算となる．これこそが「遠点（近点）でのマヌーバ」と「地球スイングバイ」を組み合わせたシナジーなのである．

2.1.5 EDVEGA の種類

同期

前述したように，EDVEGA は「地球から出発し，慣性飛行で地球と再会合する軌道」から少しズレた軌道で達成される．この「弾道飛行で再会合する軌道」は，ある周期に沿って現れる．この周期は Hill 方程式を解くことによって得られる再帰条件から求められる．計算の詳細は参考文献に譲る [10]．再帰条件を図 2.1.4 に示す．

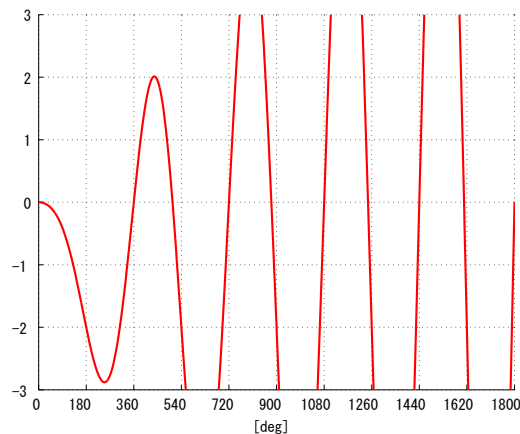


図 2.1.4 再帰条件

横軸は地球の真近点角，縦軸は Hill 方程式から得られる地球の真近点角に依存した再帰条件をプロットしたものである．この再帰条件の値が「0」のときに，「弾道飛行で再会合する軌道」が存在する．具体的には，「1 年」，「1.4 年」，「2 年」と続いていく．

一般的に，EDVEGA の「1 年同期軌道」と言えば，「『1 年で地球と再会合する弾道軌道』を利用した EDVEGA」のことを指し，同様に，「1.4 年同期軌道」と言えば，「『1.4 年で地球と再会合する弾道軌道』を利用した EDVEGA」のことを指す．「同期」の他に「回転数」で表現することもある．

Outbound loop と Inbound loop

EDVEGA の 1 年同期軌道と 1.4 年同期軌道は，それぞれ 4 タイプの軌道を有する．増速の「Outbound loop」と「Inbound loop」，減速の「Outbound loop」と「Inbound loop」である．1 年同期軌道と 1.4 年同期軌道の増速の場合の Outbound loop と Inbound loop を図 2.1.5 に示す．

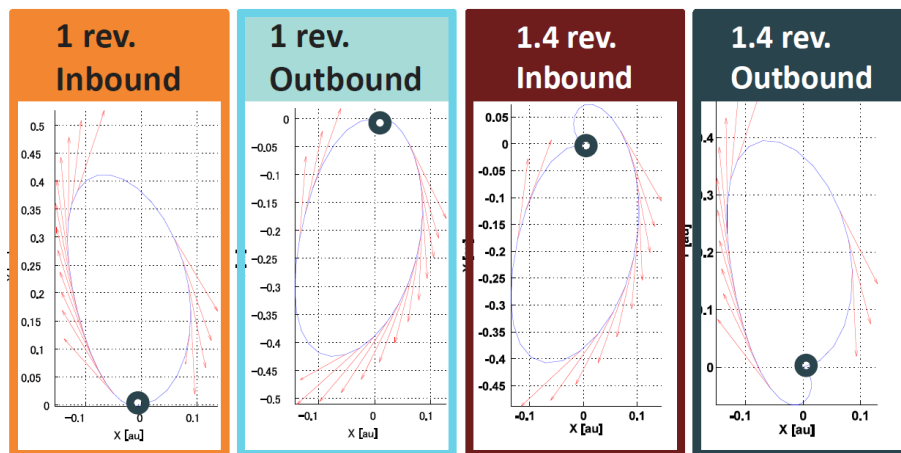


図 2.1.5 Inbound loop と Outbound loop (太陽方向固定地球中心回転座標系)

ここまでの説明に用いてきたのが，増速の「Outbound loop」の場合の EDVEGA 軌道である．「Outbound loop」では，遠日点を通過してから近日点を通過するケース，「Inbound loop」では逆に，近日点を通過してから遠日点を通過するケースのことをそれぞれ指している．また，「増速」の場合には，再会合時の地球に対する無限遠進入速度を大きくするために，遠日点あるいは近日点付近において，「偏角を持たせるためのマヌーバ（離心率を大きくするため

のマヌーバ、あるいは相対速度を大きくするためのマヌーバ)」が行われる。一方、「減速」の場合には、再会合時の地球に対する無限遠進入速度を小さくするために、遠日点あるいは近日点付近において、「偏角を小さくするためのマヌーバ（離心率を小さくするためのマヌーバ、あるいは相対速度を小さくするためのマヌーバ）」が行われる。

現実的なそれぞれの違いや用いるシチュエーションとしては、Outbound loop と Inbound loop では、ミッション期間中の探査機の地球地方時が大きく異なる。そのため、運用の時間帯に大きな差が出てくる。Outbound loop であれば、午後の時間帯に主に運用を行うことになるが、Inbound loop では、午前時間帯に主に運用を行うことになる。また、増速と減速では、EDVEGA を用いる用途が完全に異なる。増速の場合には、外惑星等のより外側の天体に向かうために実施されるのに対して、減速の場合には、その惑星の周回軌道に投入するために実施されたり、より内側の惑星に向かうために実施される。

スラスト回数 1 年同期と 1.4 年同期の EDVEGA 軌道では、軌道上でのスラスト回数が異なる。理由としては、1 年同期の EDVEGA 軌道と 1.4 年同期の EDVEGA 軌道では、遠日点、あるいは近日点の通過回数が異なるからである。以下に、Outbound の場合で例を示す。

1 年同期 Outbound loop 遠日点 近日点

1.4 年同期 Outbound loop 遠日点 近日点 遠日点

ところが、図 2.1.4 の 1.4 年同期の Outbound loop がそうであるように、軌道変更に比較的余裕のある 1.4 年同期軌道では、はじめの遠日点（あるいは近日点）でのスラストが省かれる。これは、後の近日点と遠日点（あるいは、遠日点と近日点）のほうが、太陽からの距離が近い、あるいは遠く、より効率的に軌道変更を行うことができるからである。しかし、軌道変更に余裕がなくなってくると、はじめの遠日点においてもスラストをおこなうようになる。

したがって、1 年同期軌道をモデル化したいのであればスラスト区間を 2 つ含む軌道、1.4 年同期軌道をモデル化したいのであれば基本的にはスラスト区間を 2 つ含む軌道、推力や重量がギリギリの場合には、スラスト区間を 3 つ含む軌道を仮定する必要がある。

2.1.6 研究の対象と留意点

本節をまとめる。「主天体の進行方向に対し、探査機の速度ベクトルに偏角を持たせる（離心率を大きくする、あるいは相対速度を大きくする）ため」に実施されるマヌーバと、地球スイングバイを組み合わせることで高効率な増速・減速を達成し、この組み合わせで「 Δ VEGA（より一般的には「VILM」）」と呼ばれる。近年では、化学推進よりも比推力が一桁以上高い電気推進が登場し、この電気推進と地球スイングバイを組み合わせを「EDVEGA（より一般的には「低推力を用いた VILM」）」という。EDVEGA は、 Δ VEGA と同等の効果を発揮しつつ、消費燃料は 5 分の 1 以下となる大変革的なものであった。EDVEGA は、「弾道軌道で再会合する軌道」から少しズレた軌道で達成され、再帰条件より「弾道軌道で再会合する軌道」は周期的に存在することを示した。最後に 1 年同期と 1.4 年同期軌道にはそれぞれ 4 タイプの軌道が存在することを紹介した。

本研究においては、コースティングを含んだ低推力軌道のモデル化を行い、それを応用して低推力を用いた VILM の解析解を求める。Hill 方程式を用いるため、探査機が地球からあまりにも距離が離れてしまう場合の議論はできない。そのため、1 年同期軌道と 1.4 年同期軌道を解析の対象とする。特に、解の検証には「1 年同期軌道 Outbound loop」を主に用いる。全てのタイプで比較するのは大変なため、現状最も利用されている軌道（1 年同期軌道 Outbound loop）で比較検証することにした。2 年同期以上の軌道についても、本研究結果を応用すれば定式化することが可能であると考えている。

2.2 DCNLP

2.2.1 DCNLP とは

DCNLP の詳しい説明は参考文献 [9], [12], [13] に譲り，ここでは DCNLP の概要のみ述べる．DCNLP (Direct Collocation with Nonlinear Programming) は，本来時間の連続関数である状態変数と制御入力を離散化し，それらを多項式で補間することにより最適制御問題を非線形計画法に組み替えて解く解法である．最適制御問題における最大の難関である状態量不等式拘束を克服する解法であり，汎用性と十分な精度を兼ね備えている．

2.2.2 DCNLP による軌道最適化

本研究にあたり，解析解と比較するための，真であるとする低推力を用いた VILM の軌道を得るために，DCNLP による軌道最適化プログラムを実装した．以下に，そのプログラムの構成を示していく．

最適制御問題の書き換え

軌道最適化問題を DCNLP によって非線形計画問題に書き換え，その非線形計画問題を解くプログラムを MATLAB で実装した．

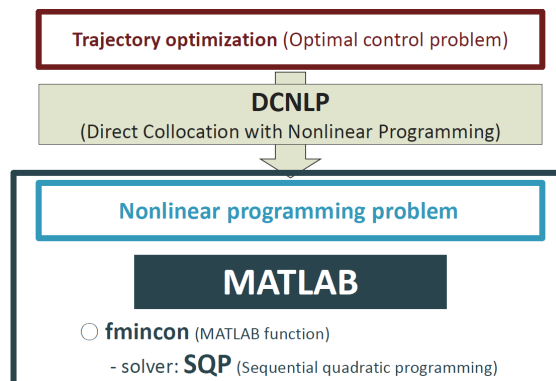


図 2.2.1 DCNLP

MATLAB には，非線形計画問題を解くための関数「fmincon」が存在し，それを用いた．また，ソルバーとして SQP (Sequential Quadratic Programming) を用いた．

運動方程式

運動方程式は 3 次元極座標系で立式した．これは収束性の良さを考慮してのものである．3 次元直交座標系で立式した場合，位置座標で言えば 3 成分それぞれが sin カーブを描いて変化することが想定される．一方，3 次元極座標系であれば，原点からの距離はあまり大きく変化することなく，真近点角が単調に増加していくことが想像される．

sin カーブよりは，一定あるいは単調増加の方が収束しやすいであろうという判断である．

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r \\ \phi \\ \theta \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ -\frac{\mu}{r^2} + \frac{u_r}{m} + r\dot{\theta}^2 + r\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta \\ \left(\frac{u_\phi}{m} - 2\dot{r}\dot{\phi} \cos \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta \right) / (r \cos \theta) \\ \left(\frac{u_\theta}{m} - 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta \right) / r \\ -\frac{\sqrt{u_r^2 + u_\phi^2 + u_\theta^2}}{c} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

ただし， u_r, u_ϕ, u_θ は，極座標における推力 [N] のそれぞれの成分であり， c は排気速度 [m/s] である．また，式中の変数はそれぞれ図 2.2.2 に示すように定義した．

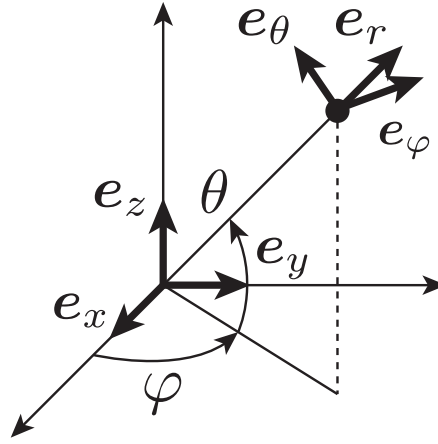


図 2.2.2 3次元極座標系

探査機重量も状態変数として運動方程式に含ませることで，スラストによる燃料消費を考慮できる．探査機は軽ければ軽いほど燃費が良くなるため，それを考慮に入れるためのものである．

変数

$[0, t_f]$ を N 区間に分割し， $N+1$ 個の分点における状態変数，制御変数から設計変数ベクトル X を構成する．各分点の状態変数，制御変数と， X の要素の対応関係を表 2.2.1 に示す．

$$X = [r, \phi, \theta, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, m, u_r, u_\phi, u_\theta, t_f] \quad (2.2.2)$$

表 2.2.1 状態変数、制御変数と変数ベクトル X の対応関係

Node	0	...	i	...	N
r	$X[1]$...	$X[10i + 1]$...	$X[10N + 1]$
ϕ	$X[2]$...	$X[10i + 2]$...	$X[10N + 2]$
θ	$X[3]$...	$X[10i + 3]$...	$X[10N + 3]$
\dot{r}	$X[4]$...	$X[10i + 4]$...	$X[10N + 4]$
$\dot{\phi}$	$X[5]$...	$X[10i + 5]$...	$X[10N + 5]$
$\dot{\theta}$	$X[6]$...	$X[10i + 6]$...	$X[10N + 6]$
m	$X[7]$...	$X[10i + 7]$...	$X[10N + 7]$
u_r	$X[8]$...	$X[10i + 8]$...	$X[10N + 8]$
u_ϕ	$X[9]$...	$X[10i + 9]$...	$X[10N + 9]$
u_θ	$X[10]$...	$X[10i + 10]$...	$X[10N + 10]$
t_f					$X[10N + 11]$

設計変数として終端時刻を含めた．最適化計算では，この終端時刻を N 等分して各ノード間の時刻とする．つまり，本プログラムでは，時間間隔が均等になるようにノードを分割している．

設定パラメータ

第3章から第5章までで，いくつかの最適化結果を示すが，その最適化計算に用いた設定パラメータを表 2.2.2 に示す．

表 2.2.2 設定パラメータ

項目	値
ノード数	33
運用率	70 [%]
比推力	3800 [sec]
推力	40 [mN]

表 2.2.2 以外の設定パラメータは，各章で記述する．ノード数を 33（全区間を 32 等分）としたため，設計変数は全部で 331 個となる．後述するが，「運用率」は電気推進の運用率を表し，全区間での最大推力を「運用率 \times 推力（ 0.7×40 ）」に制限している．これは実運用を考慮したものである．例えば，探査機の保守点検や軌道決定のために電気推進を止めざるを得ない期間がある．マージンも加味し，「1 週間の内で 3 割程度は運転を止めざるを得ないでしょう」という見積もりである．瞬間的には 40[mN] 程度の推力は出るが，電気推進等の低推力は積算で考えるため，止めている期間も考慮して数値計算上での最大推力には運転率を掛けている．電気推進の性能としては，「 $\mu 20$ 」程度の性能を想定している．

制約条件

制約条件を以下に示す．「線形 条件」と「非線形 条件」の違いは，`fmincon` を使用する際には，線形制約条件として入力しているか，非線形制約条件として入力しているかの違いである．より具体的には，制約条件が設計変数に依存しているかどうかで判断する．今回の場合，終端時刻が設計変数に入っているため，初期条件以外は非線形な制約条件になる．

線形等式制約条件 初期の探査機と地球の位置が一致していること .

$$\begin{bmatrix} r(0) \\ \phi(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_E(0) \\ \phi_E(0) \\ \theta_E(0) \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

「 E 」の下付きは、地球の変数であることを示す（以下同様）.

線形不等式制約条件

- 無限遠脱出速度の大きさが指定した値以下であること .

$$|\mathbf{v}(0) - \mathbf{v}_E(0)| \leq v_{\text{tar}}(0) \quad (2.2.4)$$

「 tar 」の下付きは、こちらで指定した値（ターゲット値）であることを示す（以下同様）.

非線形不等式制約条件

- 推力の大きさが最大値を越えないこと .

$$|\mathbf{u}| \leq 0.7 \times T_{\text{max}} \quad (2.2.5)$$

最大推力と運用率に関する詳細は、「設定パラメータ」に記述している .

- 無限遠突入速度の大きさが指定した値以下であること .

$$|\mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_E(t_f)| \leq v_{\text{tar}}(t_f) \quad (2.2.6)$$

非線形等式制約条件

- 終端での探査機と地球の位置が一致していること .

$$\begin{bmatrix} r(t_f) \\ \phi(t_f) \\ \theta(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_E(t_f) \\ \phi_E(t_f) \\ \theta_E(t_f) \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

評価関数

- 終端での質量を最大化 .

$$J = -m(t_f) \quad (2.2.8)$$

fmincon 自体は評価関数の「最小化」を目指すため、質量にマイナスを掛けた値を評価関数としている .

制約条件に関して 探査機の初速度と終端速度は、無限遠速度（地球に対する相対速度）の大きさのみを成約しており、ベクトルの方向は成約していない . また、不等式制約条件で成約しているが、基本的には指定値とほぼ等しい値に収束する . これを等式制約条件で成約しようとすると、収束が遅くなるか収束しなくなってしまう . 推力の大きさを、距離に反比例して弱くさせるような制約を行うことで、より現実的な EDVEG を再現できる . 太陽から遠ざかることで発電量が低下し、電気推進の推力が落ちることに起因する . タイムオブフライトを指定して収束させられた方が嬉しいことが多いため、そのようなコーディングにも取り組んだが、あまりうまくいかなかった .

2.2.3 Steering Angle

EDVEGA 軌道に関わる重要な値で、「Steering Angle」の定義をここで説明する．

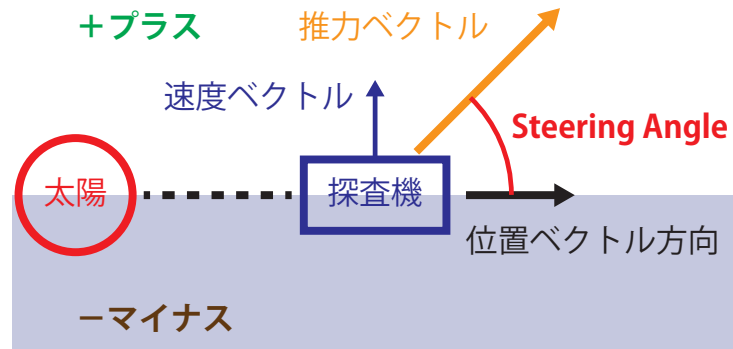


図 2.2.3 Steering Angle の定義

EDVEGA 軌道においては，太陽探査機方向と推力ベクトルのなす角が Steering Angle の定義になる．また，推力ベクトルが探査機の進行方向側（速度ベクトル側）であれば，Steering Angle の値をプラス，反対側であればマイナスと定義する．これは，増速側であればプラス，減速側であればマイナス，とも言い換えられる．

ここでは「太陽探査機方向」としたが，探査機が太陽以外の天体を周回している VILM であれば，その天体からの方向となる．

2.2.4 DCNLP による最適解（フルスラスト）

以降の章で示す解析解との比較に用いる，DCNLP を用いた最適化結果（フルスラスト）を示す．

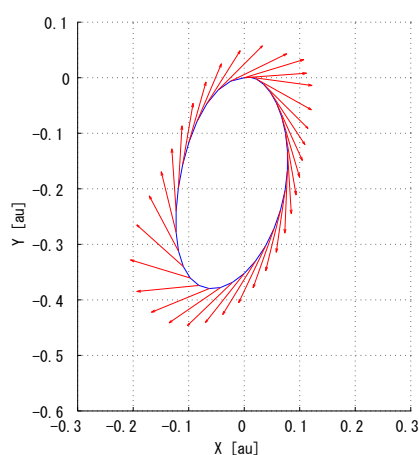


図 2.2.4 軌道図（回転座標系）

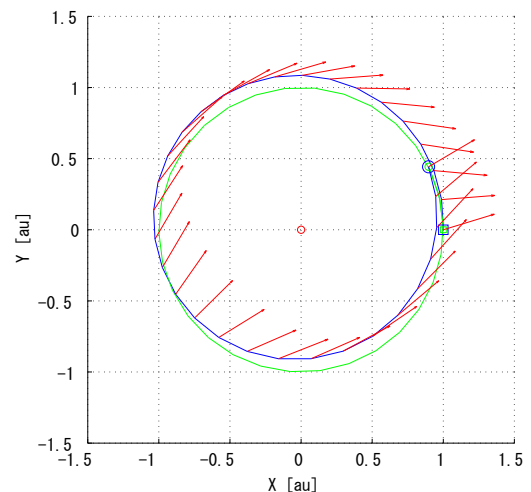


図 2.2.5 軌道図（慣性座標系）

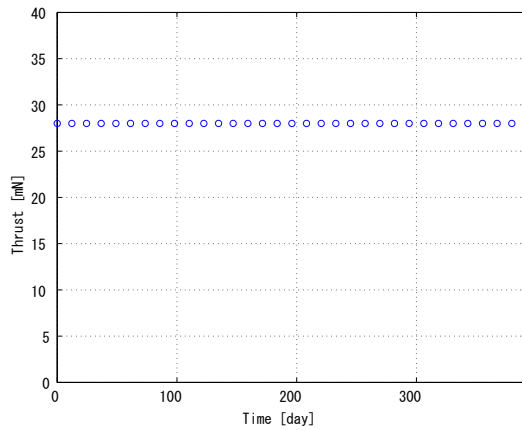


図 2.2.6 推力履歴（ベクトルの大きさ，回転座標系）

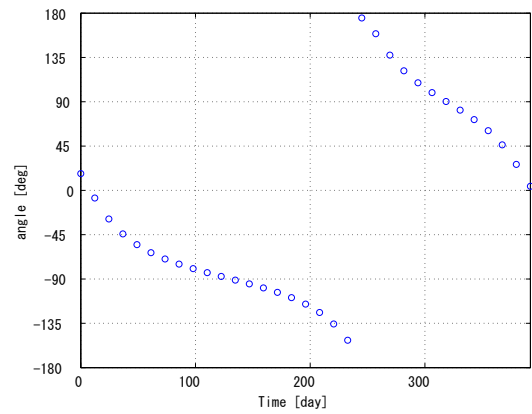


図 2.2.7 Steering Angle（回転座標系）

表 2.2.3 各種値

項目	値
効率	1.626
初期無限遠速度	1500.00 [m/sec]
終端無限遠速度	3500.00 [m/sec]
増速量	1230.07 [m/sec]
ToF	391.94 [day]
初期重量	780 [kg]
消費燃料	25.32 [kg]

図 2.2.4 は，地球中心太陽方向固定回転座標系（以下，「回転座標系」と称す）における探査機の軌道（青い曲線）と推力ベクトル（赤いベクトル）を示している（ベクトルの大きさは適当に調整している）。図 2.2.5 は，太陽中心黄道面基準慣性座標系（以下，「慣性座標系」と称す）における探査機の軌道（青い曲線）と地球の軌道（緑の曲線）を示しており，赤いベクトルは推力ベクトルを示している。図 2.2.6 は，推力の大きさの時間変動を表している。地球を出発してから再会合するまで，推力の大きさが常に一定であることから，推力を吹きっぱなし（フルスラスト）の解に収束していることが確認できる。図 2.2.7 は，回転座標系における Steering Angle の時間変動を示している。遠日点付近では接線方向に近日点を下げるように減速のマヌーバを行い，近日点付近では接線方向に遠日点をあげるように増速のマヌーバを行っている。

2.2.5 DCNLP による最適解（マルチスラスト）

以降の章で示す解析解との比較に用いる，DCNLP を用いた最適化結果（マルチスラスト）を示す。

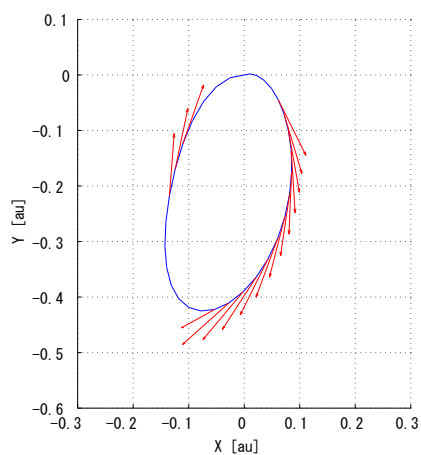


図 2.2.8 軌道図 (回転座標系)

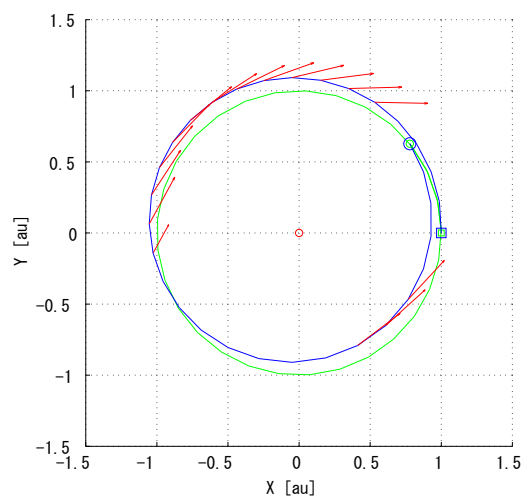


図 2.2.9 軌道図 (慣性座標系)

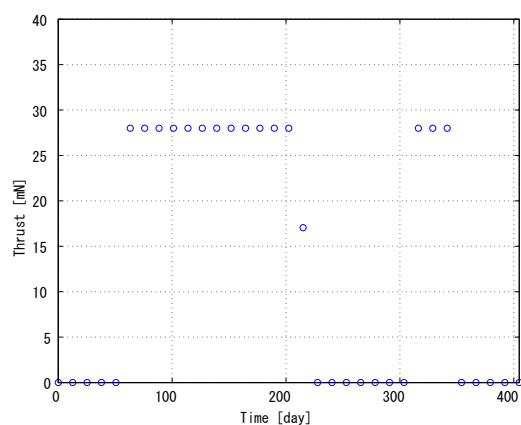


図 2.2.10 推力履歴

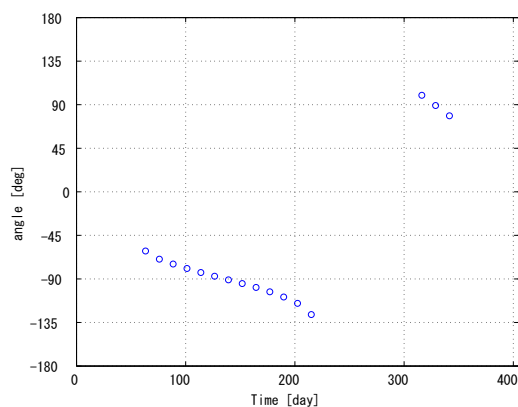


図 2.2.11 Steering Angle (回転座標系)

表 2.2.4 各種値

項目	値
効率	2.069
初期無限遠速度	1500.00 [m/sec]
終端無限遠速度	3500.00 [m/sec]
増速量	0.9666 [m/sec]
ToF	404.69 [day]
初期重量	500 [kg]
消費燃料	12.80 [kg]

図 2.2.8 から図 2.2.11 までの見方は, さきほど「DCNLP による最適解 (フルスラスト)」の項で示した図 2.2.4 から図 2.2.7 までと同様の見方になる。

第 2.1 項で述べたように、フルスラストではない、一般的な EDVEGA 軌道では遠日点付近と近日点付近でのみマヌーバを行うような解に収束する。今回は増速の Outbound loop のため、遠日点で近日点を下げる VILM を行ったのち、近日点で遠日点を上げる VILM を行っている。図 2.2.10 より、推力の履歴がほぼバンバン制御的に収束していることから、得られた解がきちんと収束した結果であることが確認できる。

第 3 章

Full Thrust

「コースティングを含まない VILM」(以下,「フルスラスト」とも称す)の解析解を求め, DCNLP を用いた数値最適化による解と比較することで得られた解析解の検証を行う。まず, DCNLP の最適化から得られたフルスラストの解を参考に, 推力プロファイルのモデル化を行う。具体的には, 推力ベクトルが一定の角速度で回転するようなモデル化を Hill 方程式で行った。

その後, Hill 座標系と回転座標系の関係を説明し, まずは Hill 方程式の一般解を導出する。Hill 方程式の説明は参考文献 [14] に譲る。仮定した加速度モデルを Hill 方程式の一般解に適用し, フルスラストの解析解を求める。

検証においては, まず, フルスラストの解析解を用いた解(軌道)の生成手法を説明する。DCNLP を用いた最適化とは異なり, 解析解では初速度と終端速度を自由に決めることができまい。そのため, 網羅的に解の生成を行い, その中からターゲットとする初速度と終端速度に近い解を抽出する必要がある。また, その過程を通して, 「 $\theta_0 - k/\omega_0$ マップ」を用いることで, 1 年同期軌道の全ての軌道のタイプが得られていることを示す。最後に, 最適解と網羅的な解析から抽出した解析解とを比較し, ある程度良い精度で解(軌道)が再現できていることを示す。

3.1 定式化

この節では, 1 年同期 EDVEGA (低推力を用いた VILM) の特にフルスラストの場合における低推力プロファイルのモデル化を行う。図 3.1.1 から図 3.1.4 に前章で示した最適化プログラムを用いて収束させたフルスラスト EDVEGA の具体的な 1 例を示す。

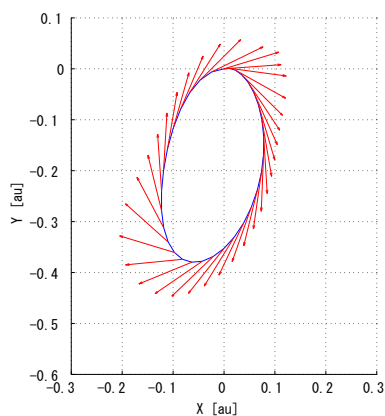


図 3.1.1 軌道図(回転座標系)

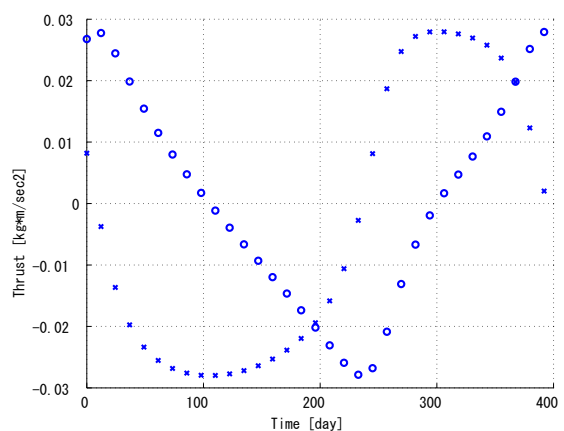


図 3.1.2 推力履歴(各成分, 回転座標系)

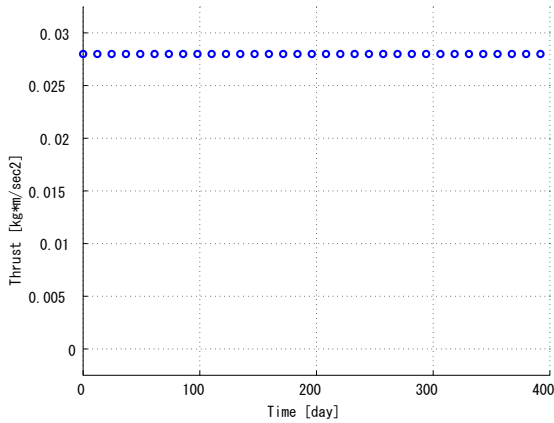


図 3.1.3 推力履歴 (ベクトルの大きさ, 回転座標系)

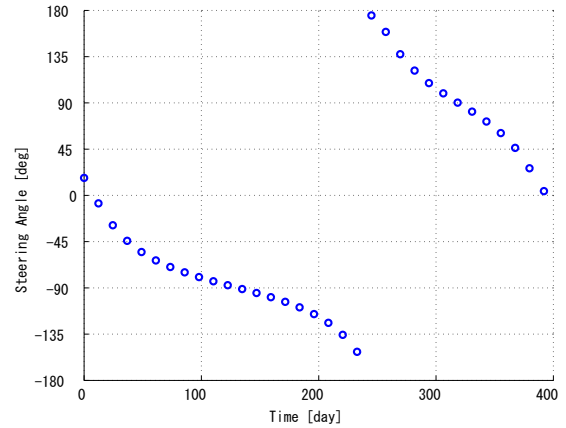


図 3.1.4 Steering Angle (回転座標系)

図 3.1.1 は, 地球中心太陽方向固定回転座標系 (以下, 単に「回転座標系」と称す) における探査機の軌道を青い曲線で示しており, 赤いベクトルは推力ベクトルを表す (ベクトルの大きさは適当に変えている). 図 3.1.2 は, 回転座標系における推力の各成分の時間変動を示しており, 円いプロットが X 成分, バツのプロットが Y 成分をそれぞれ表す. 図 3.1.3 は, 回転座標系における推力の大きさの時間変動を示している. 図 3.1.4 は, 回転座標系における Steering Angle の時間変動を円いプロットで示している.

本研究では, 以下のように低推力の定式化を行った.

$$a_x = a \cos(\theta_0 - kt) \quad (3.1.1)$$

$$a_y = a \sin(\theta_0 - kt) \quad (3.1.2)$$

まず, 図 3.1.1 より, 回転座標系において, 推力ベクトルは一定方向に回転するように変化することがわかる. このことは図 3.1.2 と図 3.1.3 に表れており, 図 3.1.3 には時間に依存せず推力が一定である様子が, 図 3.1.2 には回転座標系における推力の X 成分と Y 成分の値が振動するように変化している様子が表れている. 以上のことから, 回転座標系における推力プロファイルを「Sin カーブ」でモデル化することが妥当であると判断した. また, 図 3.1.4 より, Steering Angle が時間に比例して変化していることから, Sin カーブの角度は時間の 1 次関数となるようにモデル化した.

次節では, この加速度モデルを仮定した探査機の運動方程式を解き, 一般解を求める.

3.2 求解

3.2.1 Hill 座標系

Hill 座標系と回転座標系

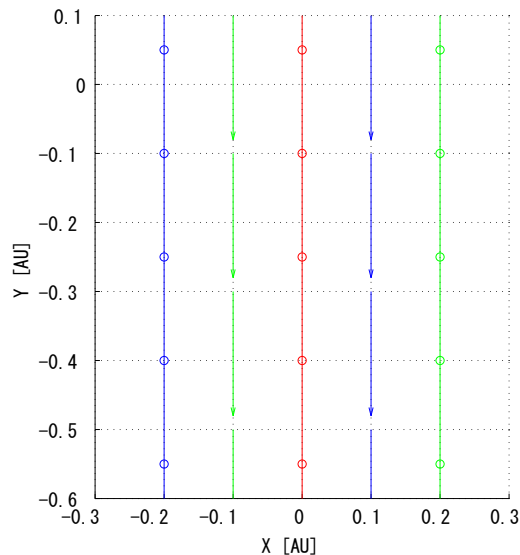


図 3.2.1 Hill 座標系

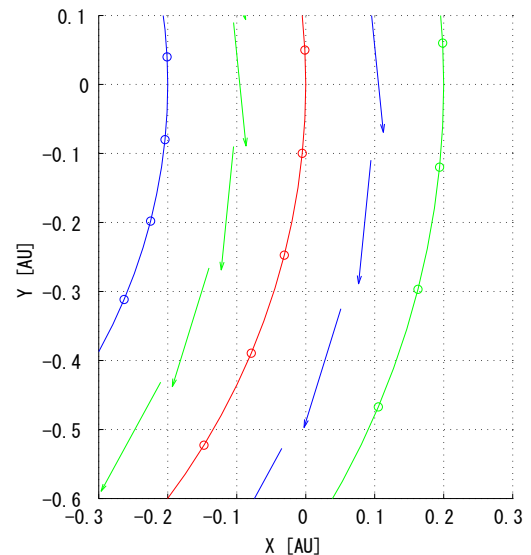


図 3.2.2 回転座標系

Hill 座標系と地球中心太陽方向固定回転座標系（「回転座標系」）の違いを注意しておく．Hill 座標系と回転座標系の最大の違いは，第 1 天体と第 3 天体の距離の考え方の違いにある．Hill 座標系においては，第 1 天体と第 2 天体の距離が十分に離れているものと考え，同一の x 成分では，第 1 天体と第 3 天体の距離は一定であると考え．それに対し，回転座標系では，第 1 天体と第 2 天体の距離は有限であると考え，その軌道の曲がりも考慮に入れている．それをイメージ化し，図にしたものが図 3.2.1 と図 3.2.2 である．図 3.2.1 に描かれた 3 つの曲線（青，赤，緑）は，第 1 天体からの距離を表現している．それらが，回転座標系においては図 3.2.2 のように湾曲する．

Hill 座標系から回転座標系への変換

Hill 座標系から回転座標系への変換を説明する．ただし，この変換は「正しいものではない」ことを強調しておく．なぜなら，既に説明したように，Hill 座標系は回転座標系の原点付近を拡大したような座標系であり，本質的には同一の座標系だからである．これから紹介する変換は，Hill 方程式の「第 1 天体と第 2 天体の距離に比べて，第 2 天体と第 3 天体の距離は十分に小さい」という近似を，強引に修正しようとする試みである．

変換の概要としては，

- Hill 座標系から太陽中心赤道面基準慣性座標系での極座標の値を求める
- 極座標の値をもとに Hill 座標系を回転座標系へと変換する

となる．より具体的には，

ステップ 1 Hill 座標系での X 成分に第 1 天体と第 2 天体の距離を足す（極座標の R 成分）

ステップ 2 Hill 座標系での Y 成分分の距離を第 2 天体が進むのにかかる時間から角度を求める（極座標の角度成分）

ステップ3 ステップ1とステップ2より求めた値で，極座標から直交座標系での値を求める

ステップ4 ステップ3で求めた値から，第1天体と第2天体の距離を引く

ことで求めている．上述したのは位置に対する変換だが，速度ベクトルや推力ベクトルは，ステップ2で求めた角度成分分だけベクトルを回転させることで求めている．

3.2.2 Hill 方程式の一般解

式(3.2.1)から式(3.2.3)にHill方程式を示す．

$$\ddot{x} = 3\omega_0^2 x + 2\omega_0 \dot{y} + a_x \quad (3.2.1)$$

$$\ddot{y} = -2\omega_0 \dot{x} + a_y \quad (3.2.2)$$

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z + a_z \quad (3.2.3)$$

ただし， ω_0 は，第2天体の角速度であり， a_x 等は探査機の軌道制御力である．

同次方程式の一般解

Hill 方程式の同時方程式（軌道制御力が0）の一般解を以下に示す．

$$x = \frac{2}{\omega_0} C_1 + C_2 \sin(\omega_0 t) + C_3 \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.4)$$

$$y = -3C_1 t + 2C_2 \cos(\omega_0 t) - 2C_3 \sin(\omega_0 t) + C_4 \quad (3.2.5)$$

係数変化法を用いるために，それぞれの微分を求める．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{2}{\omega_0} \dot{C}_1 + \dot{C}_2 \sin(\omega_0 t) + \dot{C}_3 \cos(\omega_0 t) \\ &\quad + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t) - \omega_0 C_3 \sin(\omega_0 t) \\ \ddot{x} &= \frac{2}{\omega_0} \ddot{C}_1 + \ddot{C}_2 \sin(\omega_0 t) + \ddot{C}_3 \cos(\omega_0 t) \\ &\quad + 2 \left(\omega_0 \dot{C}_2 \cos(\omega_0 t) - \omega_0 \dot{C}_3 \sin(\omega_0 t) \right) \\ &\quad - \omega_0^2 (C_2 \sin(\omega_0 t) + C_3 \cos(\omega_0 t)) \\ \dot{y} &= -3\dot{C}_1 t + 2\dot{C}_2 \cos(\omega_0 t) - 2\dot{C}_3 \sin(\omega_0 t) + \dot{C}_4 \\ &\quad - 3C_1 - 2\omega_0 C_2 \sin(\omega_0 t) - 2\omega_0 C_3 \cos(\omega_0 t) \\ \ddot{y} &= -3\ddot{C}_1 t + 2\ddot{C}_2 \cos(\omega_0 t) - 2\ddot{C}_3 \sin(\omega_0 t) + \ddot{C}_4 \\ &\quad + 2 \left(-3\dot{C}_1 - 2\omega_0 \dot{C}_2 \sin(\omega_0 t) - 2\omega_0 \dot{C}_3 \cos(\omega_0 t) \right) \\ &\quad - \omega_0^2 (2C_2 \cos(\omega_0 t) - 2C_3 \sin(\omega_0 t)) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

係数変化法

次に，同次方程式の一般解（式(3.2.4)と式(3.2.5)）の係数をそれぞれ独立変数 t の関数と見なし，もとの非同次方程式に代入し，係数の微分方程式を解く．

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{\omega_0} \dot{C}_1 + \dot{C}_2 \sin(\omega_0 t) + \dot{C}_3 \cos(\omega_0 t) \right) \\ &\quad + 6\omega_0 \dot{C}_1 t - 3\omega_0 \dot{C}_2 \cos(\omega_0 t) + 3\omega_0 \dot{C}_3 \sin(\omega_0 t) - 2\omega_0 \dot{C}_4 \\ a_y &= \frac{d}{dt} \left(-3\dot{C}_1 t + 2\dot{C}_2 \cos(\omega_0 t) - 2\dot{C}_3 \sin(\omega_0 t) + \dot{C}_4 \right) \\ &\quad + \dot{C}_1 \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

特解はもとの微分方程式を満たせば何でもよいため，

$$0 = \frac{2}{\omega_0} \dot{C}_1 + \dot{C}_2 \sin(\omega_0 t) + \dot{C}_3 \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.8)$$

$$a_x = 6\omega_0 \dot{C}_1 t - 3\omega_0 \dot{C}_2 \cos(\omega_0 t) + 3\omega_0 \dot{C}_3 \sin(\omega_0 t) - 2\omega_0 \dot{C}_4 \quad (3.2.9)$$

$$0 = -3\dot{C}_1 t + 2\dot{C}_2 \cos(\omega_0 t) - 2\dot{C}_3 \sin(\omega_0 t) + \dot{C}_4 \quad (3.2.10)$$

$$a_y = \dot{C}_1 \quad (3.2.11)$$

を満たすように決める．

式(3.2.8)から式(3.2.11)までの， \dot{C}_1 から \dot{C}_4 に関する4元連立方程式を解くと，

$$\dot{C}_1 = a_y \quad (3.2.12)$$

$$\dot{C}_2 = \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) a_x - \frac{2}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) a_y \quad (3.2.13)$$

$$\dot{C}_3 = -\frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) a_x - \frac{2}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) a_y \quad (3.2.14)$$

$$\dot{C}_4 = -\frac{2}{\omega_0} a_x + 3ta_y \quad (3.2.15)$$

を得る．それぞれ積分して，

$$C_1 = \int a_y dt + C_A \quad (3.2.16)$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega_0} \int \cos(\omega_0 t) a_x dt - \frac{2}{\omega_0} \int \sin(\omega_0 t) a_y dt + C_B \quad (3.2.17)$$

$$C_3 = -\frac{1}{\omega_0} \int \sin(\omega_0 t) a_x dt - \frac{2}{\omega_0} \int \cos(\omega_0 t) a_y dt + C_C \quad (3.2.18)$$

$$C_4 = -\frac{2}{\omega_0} \int a_x dt + 3 \int ta_y dt + C_D \quad (3.2.19)$$

となる．これを同次方程式の一般解に代入することで，非同次方程式の一般解を得る．

以下に Hill 方程式の一般解をまとめる．

$$x = \frac{2}{\omega_0} C_1 + C_2 \sin(\omega_0 t) + C_3 \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.20)$$

$$y = -3C_1 t + 2C_2 \cos(\omega_0 t) - 2C_3 \sin(\omega_0 t) + C_4 \quad (3.2.21)$$

$$\dot{x} = \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t) - \omega_0 C_3 \sin(\omega_0 t) \quad (3.2.22)$$

$$\dot{y} = -3C_1 - 2\omega_0 C_2 \sin(\omega_0 t) - 2\omega_0 C_3 \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.23)$$

$$\ddot{x} = a_x - \omega_0^2 C_2 \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 C_3 \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.24)$$

$$\ddot{y} = a_y - 2\omega_0^2 C_2 \cos(\omega_0 t) + 2\omega_0^2 C_3 \sin(\omega_0 t) \quad (3.2.25)$$

ただし，

$$C_1 = \int a_y dt + C_A \quad (3.2.26)$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega_0} \int \cos(\omega_0 t) a_x dt - \frac{2}{\omega_0} \int \sin(\omega_0 t) a_y dt + C_B \quad (3.2.27)$$

$$C_3 = -\frac{1}{\omega_0} \int \sin(\omega_0 t) a_x dt - \frac{2}{\omega_0} \int \cos(\omega_0 t) a_y dt + C_C \quad (3.2.28)$$

$$C_4 = -\frac{2}{\omega_0} \int a_x dt + 3 \int ta_y dt + C_D \quad (3.2.29)$$

である．

3.2.3 求解

Hill 方程式に前節で定式化した軌道制御力を適用し，解析解を求める．まず，

$$a_x = a \cos(\theta_0 - kt) \quad (3.2.30)$$

$$a_y = a \sin(\theta_0 - kt) \quad (3.2.31)$$

としたときの， C_1 から C_4 までを求め，その結果を式 (3.2.20) 等に代入し，境界条件で C_A 等の定数を決定することで解析解を求める．計算の都合上， $\omega_0 = k$ の場合と $\omega \neq k$ の場合で，場合分けが必要となる．

$\omega_0 = k$ の場合

まず， C_1 から C_4 までを求めるにあたり，必要となる積分の計算を以下に示す．

$$\begin{aligned} \int \cos(\omega_0 t) \cos(\theta_0 - \omega_0 t) dt &= \cos(\theta_0) \left\{ \frac{1}{2} [t]_{int} + \frac{1}{2\omega_0} [\cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)]_{int} \right\} \\ &\quad + \sin(\theta_0) \left\{ \frac{1}{2\omega_0} [\sin^2(\omega_0 t)]_{int} \right\} \\ \int \sin(\omega_0 t) \sin(\theta_0 - \omega_0 t) dt &= -\cos(\theta_0) \left\{ \frac{1}{2} [t]_{int} - \frac{1}{2\omega_0} [\cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)]_{int} \right\} \\ &\quad + \sin(\theta_0) \left\{ \frac{1}{2\omega_0} [\sin^2(\omega_0 t)]_{int} \right\} \\ \int \sin(\omega_0 t) \cos(\theta_0 - \omega_0 t) dt &= \sin(\theta_0) \left\{ \frac{1}{2} [t]_{int} - \frac{1}{2\omega_0} [\cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)]_{int} \right\} \\ &\quad + \cos(\theta_0) \left\{ \frac{1}{2\omega_0} [\sin^2(\omega_0 t)]_{int} \right\} \\ \int \cos(\omega_0 t) \sin(\theta_0 - \omega_0 t) dt &= \sin(\theta_0) \left\{ \frac{1}{2} [t]_{int} + \frac{1}{2\omega_0} [\cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)]_{int} \right\} \\ &\quad - \cos(\theta_0) \left\{ \frac{1}{2\omega_0} [\sin^2(\omega_0 t)]_{int} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

式 (3.2.32) を用いて， C_1 から C_4 を求め，式 (3.2.20) から式 (3.2.23) に代入し，整理した結果を以下に示す．

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\omega_0} C_A + C_B \sin(\omega_0 t) + C_C \cos(\omega_0 t) \\ &\quad - \frac{3a}{2\omega_0} t \sin(\theta_0 - \omega_0 t) + \frac{2a}{\omega_0^2} \cos(\theta_0 - \omega_0 t) - \frac{a}{2\omega_0^2} \sin(\theta_0) \sin(\omega_0 t) \\ y &= -3C_A t + 2C_B \cos(\omega_0 t) - 2C_C \sin(\omega_0 t) + C_D \\ &\quad + \frac{3a}{\omega_0} t \cos(\theta_0 - \omega_0 t) + \frac{5a}{\omega_0^2} \sin(\theta_0 - \omega_0 t) - \frac{a}{\omega_0^2} \cos(\theta_0) \sin(\omega_0 t) \\ \dot{x} &= \omega_0 C_B \cos(\omega_0 t) - \omega_0 C_C \sin(\omega_0 t) \\ &\quad + \frac{3a}{2} t \cos(\theta_0 - \omega_0 t) - \frac{a}{2\omega_0} \cos(\theta_0) \sin(\omega_0 t) \\ \dot{y} &= -3C_A - 2\omega_0 C_B \sin(\omega_0 t) - 2\omega_0 C_C \cos(\omega_0 t) \\ &\quad + 3at \sin(\theta_0 - \omega_0 t) - \frac{3a}{\omega_0} \cos(\theta_0 - \omega_0 t) + \frac{a}{\omega_0} \sin(\theta_0) \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

境界条件 ($x(0) = y(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$) のとき ,

$$C_A = -\frac{a}{\omega_0} \cos(\theta_0) + \dot{y}_0 \quad (3.2.34)$$

$$C_B = \frac{1}{\omega_0} \dot{x}_0 \quad (3.2.35)$$

$$C_C = -\frac{2}{\omega_0} \dot{y}_0 \quad (3.2.36)$$

$$C_D = -\frac{5a}{\omega_0^2} \sin(\theta_0) - 2\frac{1}{\omega_0} \dot{x}_0 \quad (3.2.37)$$

となる . 以上より , $\omega_0 = k$ の場合の解析解を得る .

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + \frac{2}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)) \dot{y}_0 \\ &\quad + a \left[\left\{ \frac{3}{2\omega_0} t \cos(\theta_0) + \frac{3}{2\omega_0^2} \sin(\theta_0) \right\} \sin(\omega_0 t) + \left\{ -\frac{3}{2\omega_0} t \sin(\theta_0) + \frac{2}{\omega_0^2} \cos(\theta_0) \right\} \cos(\omega_0 t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\omega_0^2} \cos(\theta_0) \right] \\ y &= -\frac{2}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)) \dot{x}_0 + \left(-3t + \frac{4}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) \dot{y}_0 \\ &\quad + a \left[\left\{ \frac{3}{\omega_0} t \sin(\theta_0) - \frac{6}{\omega_0^2} \cos(\theta_0) \right\} \sin(\omega_0 t) + \left\{ \frac{3}{\omega_0} t \cos(\theta_0) + \frac{5}{\omega_0^2} \sin(\theta_0) \right\} \cos(\omega_0 t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{\omega_0} t \cos(\theta_0) - \frac{5}{\omega_0^2} \sin(\theta_0) \right] \\ \dot{x} &= \cos(\omega_0 t) \dot{x}_0 + 2 \sin(\omega_0 t) \dot{y}_0 \\ &\quad + a \left[\left\{ \frac{3}{2} t \sin(\theta_0) - \frac{1}{2\omega_0} \cos(\theta_0) \right\} \sin(\omega_0 t) + \frac{3}{2} t \cos(\theta_0) \cos(\omega_0 t) \right] \\ \dot{y} &= -2 \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + (-3 + 4 \cos(\omega_0 t)) \dot{y}_0 \\ &\quad + a \left[\left\{ -3t \cos(\theta_0) - \frac{2}{\omega_0} \sin(\theta_0) \right\} \sin(\omega_0 t) + \left\{ 3t \sin(\theta_0) - \frac{3}{\omega_0} \cos(\theta_0) \right\} \cos(\omega_0 t) + \frac{3}{\omega_0} \cos(\theta_0) \right] \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

$\omega_0 \neq k$ の場合

先ほどと同様に , C_1 から C_4 を求めるのに必要となる積分の計算を以下に示す .

$$\begin{aligned} \int \cos(\omega_0 t) \cos(\theta_0 - kt) dt &= \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}} \left\{ \left[\cos(\omega_0 t) \left(-\frac{1}{k} \right) \sin(\theta_0 - kt) \right]_{int} - \frac{\omega_0}{k} \left[\sin(\omega_0 t) \left(\frac{1}{k} \right) \cos(\theta_0 - kt) \right]_{int} \right\} \\ \int \sin(\omega_0 t) \sin(\theta_0 - kt) dt &= \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}} \left\{ \left[\sin(\omega_0 t) \left(\frac{1}{k} \right) \cos(\theta_0 - kt) \right]_{int} - \frac{\omega_0}{k} \left[\cos(\omega_0 t) \left(-\frac{1}{k} \right) \sin(\theta_0 - kt) \right]_{int} \right\} \\ \int \sin(\omega_0 t) \cos(\theta_0 - kt) dt &= \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}} \left\{ \left[\sin(\omega_0 t) \left(-\frac{1}{k} \right) \sin(\theta_0 - kt) \right]_{int} + \frac{\omega_0}{k} \left[\cos(\omega_0 t) \left(\frac{1}{k} \right) \cos(\theta_0 - kt) \right]_{int} \right\} \\ \int \cos(\omega_0 t) \sin(\theta_0 - kt) dt &= \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}} \left\{ \left[\cos(\omega_0 t) \left(\frac{1}{k} \right) \cos(\theta_0 - kt) \right]_{int} + \frac{\omega_0}{k} \left[\sin(\omega_0 t) \left(-\frac{1}{k} \right) \sin(\theta_0 - kt) \right]_{int} \right\} \\ \int t \sin(\theta_0 - kt) dt &= \left[t \left(\frac{1}{k} \right) \cos(\theta_0 - kt) \right]_{int} - \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{k} \sin(\theta_0 - kt) \right]_{int} \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

式 (3.2.39) を用いて, C_1 から C_4 を求め, 式 (3.2.20) から式 (3.2.23) に代入し, 整理した結果を以下に示す.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2}{\omega_0} C_A + C_B \sin(\omega_0 t) + C_C \cos(\omega_0 t) \\
&\quad + \left\{ \frac{2a}{\omega_0 k} - \frac{a}{k^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}\right)} - \frac{2a}{\omega_0 k \left(1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}\right)} \right\} \cos(\theta_0 - kt) \\
y &= -3C_A t + 2C_B \cos(\omega_0 t) - 2C_C \sin(\omega_0 t) + C_D \\
&\quad + \left\{ \frac{2a}{\omega_0 k} + \frac{3a}{k^2} - \frac{4a}{k^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}\right)} - \frac{2a}{\omega_0 k \left(1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}\right)} \right\} \sin(\theta_0 - kt) \\
\dot{x} &= \omega_0 C_B \cos(\omega_0 t) - \omega_0 C_C \sin(\omega_0 t) \\
&\quad + \left\{ -\frac{a}{k \left(1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}\right)} - \frac{2a\omega_0}{k^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}\right)} \right\} \sin(\theta_0 - kt) \\
\dot{y} &= -3C_A - 2\omega_0 C_B \sin(\omega_0 t) - 2\omega_0 C_C \cos(\omega_0 t) \\
&\quad + \left\{ -\frac{3a}{k} + \frac{4a}{k \left(1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}\right)} + \frac{2a\omega_0}{k^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}\right)} \right\} \cos(\theta_0 - kt)
\end{aligned} \tag{3.2.40}$$

境界条件 ($x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$) のとき,

$$C_A = (-2\omega_0 C_x + k C_y) \cos(\theta_0) + \dot{y}_0 \tag{3.2.41}$$

$$C_B = -\frac{k}{\omega_0} C_x \sin(\theta_0) + \frac{1}{\omega_0} \dot{x}_0 \tag{3.2.42}$$

$$C_C = \left(3C_x - \frac{2k}{\omega_0} C_y \right) \cos(\theta_0) - \frac{2}{\omega_0} \dot{y}_0 \tag{3.2.43}$$

$$C_D = \left(\frac{2k}{\omega_0} C_x - C_y \right) \sin(\theta_0) - \frac{2}{\omega_0} \dot{x}_0 \tag{3.2.44}$$

となる. ただし,

$$C_x = \frac{2a}{\omega_0 k} - \frac{a}{k^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}\right)} - \frac{2a}{\omega_0 k \left(1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}\right)} = \frac{a}{\omega_0^2 - k^2} \frac{k + 2\omega_0}{k} \tag{3.2.45}$$

$$C_y = \frac{2a}{\omega_0 k} + \frac{3a}{k^2} - \frac{4a}{k^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}\right)} - \frac{2a}{\omega_0 k \left(1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}\right)} = \frac{a}{\omega_0^2 - k^2} \frac{3\omega_0^2 + 2\omega_0 k + k^2}{k^2} \tag{3.2.46}$$

とした．以上より， $\omega_0 \neq k$ の場合の解析解を得る．

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + \frac{2}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)) \dot{y}_0 \\
&\quad + \frac{a}{\omega_0^2 - k^2} \left[-\frac{2\omega_0 + k}{\omega_0} \sin(\theta_0) \sin(\omega_0 t) + \frac{2\omega_0 + k}{k} \sin(\theta_0) \sin(kt) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega_0 + 2k}{\omega_0} \cos(\theta_0) \cos(\omega_0 t) + \frac{2\omega_0 + k}{k} \cos(\theta_0) \cos(kt) - \frac{2(\omega_0^2 - k^2)}{k\omega_0} \cos(\theta_0) \right] \\
y &= -\frac{2}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)) \dot{x}_0 + \left(-3t + \frac{4}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) \dot{y}_0 \\
&\quad + \frac{a}{\omega_0^2 - k^2} \left[\frac{2(\omega_0 + 2k)}{\omega_0} \cos(\theta_0) \sin(\omega_0 t) - \frac{3\omega_0^2 + 2\omega_0 k + k^2}{k^2} \cos(\theta_0) \sin(kt) \right. \\
&\quad - \frac{2(2\omega_0 + k)}{\omega_0} \sin(\theta_0) \cos(\omega_0 t) + \frac{3\omega_0^2 + 2\omega_0 k + k^2}{k^2} \sin(\theta_0) \cos(kt) \\
&\quad \left. + \frac{3(\omega_0^2 - k^2)}{k} t \cos(\theta_0) - \frac{3\omega_0^3 + 2\omega_0^2 k - 3\omega_0 k^2 - 2k^3}{k^2 \omega_0} \sin(\theta_0) \right] \\
\dot{x} &= \cos(\omega_0 t) \dot{x}_0 + 2 \sin(\omega_0 t) \dot{y}_0 \\
&\quad + \frac{a}{\omega_0^2 - k^2} [-(2\omega_0 + k) \sin(\theta_0) \cos(\omega_0 t) + (2\omega_0 + k) \sin(\theta_0) \cos(kt) \\
&\quad + (\omega_0 + 2k) \cos(\theta_0) \sin(\omega_0 t) - (2\omega_0 + k) \cos(\theta_0) \sin(kt)] \\
\dot{y} &= -2 \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + (-3 + 4 \cos(\omega_0 t)) \dot{y}_0 \\
&\quad + \frac{a}{\omega_0^2 - k^2} \left[2(\omega_0 + 2k) \cos(\theta_0) \cos(\omega_0 t) - \frac{3\omega_0^2 + 2\omega_0 k + k^2}{k} \cos(\theta_0) \cos(kt) \right. \\
&\quad \left. + 2(2\omega_0 + k) \sin(\theta_0) \sin(\omega_0 t) - \frac{3\omega_0^2 + 2\omega_0 k + k^2}{k} \sin(\theta_0) \sin(kt) + 3 \frac{\omega_0^2 - k^2}{k} \cos(\theta_0) \right]
\end{aligned} \tag{3.2.47}$$

3.2.4 再帰条件

フルスラストの解析解である式(3.2.38)と式(3.2.47)は，初期条件($x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$)として得た解であるため，出発時には少くとも原点(地球)にいる．ある時刻 t に地球(原点)と再会合するためには，終端条件($x(t) = y(t) = 0$)を満たす必要があり，これに寄って自由度が2つ減ることになる．式(3.2.47)を以下のように略記する．

$$x(\omega_0, a, k, \theta_0, t, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = A_x(\omega_0, t) \dot{x}_0 + B_x(\omega_0, t) \dot{y}_0 + a C_x(\omega_0, k, \theta_0, t) \tag{3.2.48}$$

$$y(\omega_0, a, k, \theta_0, t, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = A_y(\omega_0, t) \dot{x}_0 + B_y(\omega_0, t) \dot{y}_0 + a C_y(\omega_0, k, \theta_0, t) \tag{3.2.49}$$

終端条件としては，ある時刻 t で原点にいることが要求されるため，

$$0 = A_x(\omega_0, t) \dot{x}_0 + B_x(\omega_0, t) \dot{y}_0 + a C_x(\omega_0, k, \theta_0, t) \tag{3.2.50}$$

$$0 = A_y(\omega_0, t) \dot{x}_0 + B_y(\omega_0, t) \dot{y}_0 + a C_y(\omega_0, k, \theta_0, t) \tag{3.2.51}$$

を満たす必要がある． ω_0 (第2天体の角速度)を除くと，自由度は， $(a, k, \theta_0, t, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ の6つであったが，式(3.2.50)と式(3.2.51)によってそのうちの2つが拘束される． k と θ_0 について解けるのが一番理想的だが，式が複雑であり解くことは困難である．そのため，最も解きやすい \dot{x}_0 と \dot{y}_0 についての連立方程式と考えこれを解く．

$$\dot{x}_0 = -a \frac{B_x C_y - B_y C_x}{A_x B_y - A_y B_x} \tag{3.2.52}$$

$$\dot{y}_0 = a \frac{A_x C_y - A_y C_x}{A_x B_y - A_y B_x} \tag{3.2.53}$$

式(3.2.52)と式(3.2.53)を用いることで、 $(\omega_0, a, k, \theta_0, t)$ を一組決めた際に、ある時刻 t で地球(原点)と再会合するために必要な \dot{x}_0 と \dot{y}_0 が求められる。

3.3 検証

前節で導いた解析解が、DCNLP を用いた最適解をどの程度再現できているか評価する。DCNLP 最適解がフルスラストの場合とマルチスラストの場合の2種類で比較検証を行う。

3.3.1 フルスラスト解析解による DCNLP マルチスラスト最適解の再現

解析解生成手法

前節の「再帰条件」の項で示したように、 $(\omega_0, a, k, \theta_0, t)$ は自由に値を決めることができるが、初速度 (\dot{x}_0, \dot{y}_0) は自由に値を決める事ができず、 $(\omega_0, a, k, \theta_0, t)$ に寄って一意に値が決まってしまう。前章で示した DCNLP の最適解は、等式制約条件(初速度 1500m/sec, 終端速度 3500m/sec)でそれぞれ値を制約していた。しかし、フルスラストの解析解では、初速度と終端速度の値が他のパラメータ $(\omega_0, a, k, \theta_0, t)$ に依存してしまっており、計算前に指定することができない。そこで、 (a, t) は、DCNLP の最適解と値を合わせ、 (k, θ_0) の値を様々にふることで網羅的に軌道の解析を行い、その中から最も DCNLP の最適解の初速度と終端速度に近い解を抽出することとした。

$\theta_0 - k/\omega_0$ マップ

DCNLP の最適解より、

ω_0 地球の角速度 ($2\pi / (365.256363004 \times 24 \times 60 \times 60)$ [rad/sec])

a 3.5897×10^{-5} [m/sec²] (= 40mN/780kg × 70%)

t 391.94 [day]

のように、 $(\omega_0, a, k, \theta_0, t)$ の内の3つを決める。残りの (k, θ_0) の値をふることで、網羅的に軌道の解析を行う。この解析によって得られたグラフを $\theta_0 - k/\omega_0$ マップと呼ぶ。以下にその結果を示す。

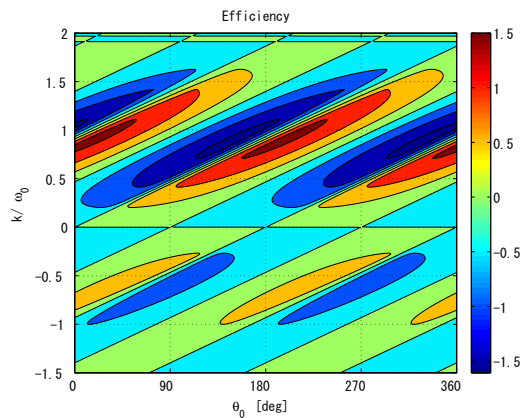


図 3.3.1 効率 ($\theta_0 - k/\omega_0$ マップ)

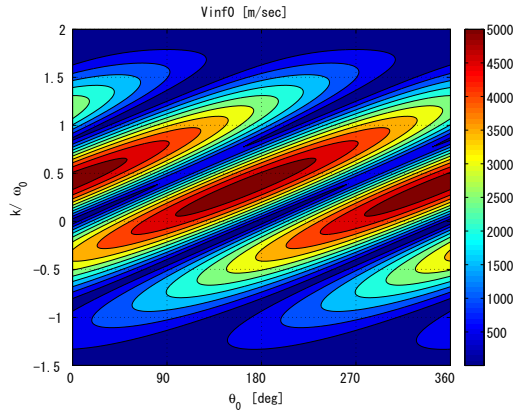
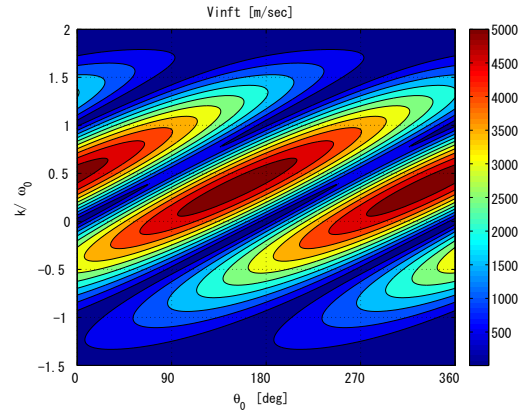
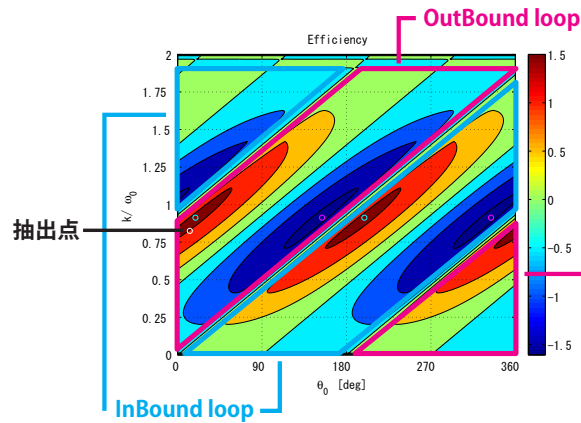
図 3.3.2 初速度 ($\theta_0 - k/\omega_0$ マップ)図 3.3.3 終端速度 ($\theta_0 - k/\omega_0$ マップ)

図 3.3.1 から図 3.3.3 に θ_0 を 0 から 360 度, k/ω_0 を -1.5 から 2 まで値をふったときの, 効率, 初速度, 終端速度のコンターを示す. 図 3.3.1 中において, 効率の高い軌道と低い軌道の両方が現れている. これは, 第 2.1 節で説明した, 増速の EDVEGA と減速の EDVEGA である. 効率の高い軌道では, 初速度よりも終端速度が速くなっており, 効率の低い軌道では, 初速度よりも終端速度が遅くなっている.

k/ω_0 が, 負ではなく正のときに効率の高いものと低いものが現れている. これより, 推力は反時計回りに変化させた方が低推力を用いた VILM には適していることが示された.

次に, k/ω_0 が 0 から 2 の範囲に注目した図を示す.

図 3.3.4 効率 ($\theta_0 - k/\omega_0$ マップ)

$\theta_0 - k/\omega_0$ マップには, すべてのタイプの軌道が現れている. 第 2.1 節で説明した, 増速の「Outbound loop」と「Inbound loop」, 減速の「Outbound loop」と「Inbound loop」の 4 種類である. 図 3.3.4 では, マゼンダ色で「Outbound loop」の軌道郡, シアン色で「Inbound loop」の軌道郡を示している. また, それぞれの中で, 効率の高い軌道が増速の EDVEGA, 効率の低い軌道が減速の EDVEGA に該当する. 以下に, 4 種類の軌道をそれぞれ示す. 抽出した軌道は, 図中にもシアン色とマゼンダ色の円でプロットしている. 「抽出点」で指されている白色の円は, DCNLP の最適解に最も近い解をプロットしたものであり, また後で言及する.

- Outbound loop 効率最大 (増速の EDVEGA)

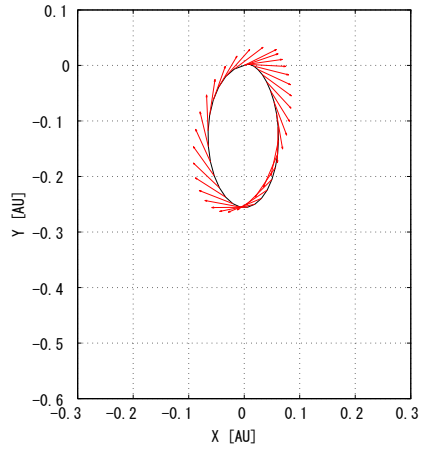


図 3.3.5 軌道図 (Hill 座標系)

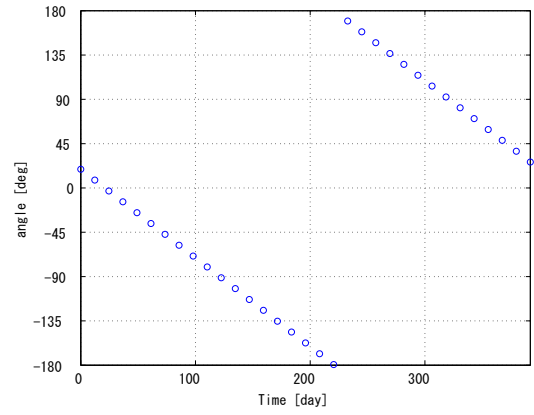


図 3.3.6 Steering Angle (Hill 座標系)

- Outbound loop 効率最小 (減速の EDVEGA)

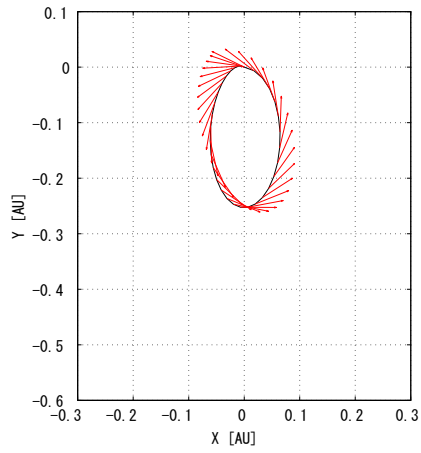


図 3.3.7 軌道図 (Hill 座標系)

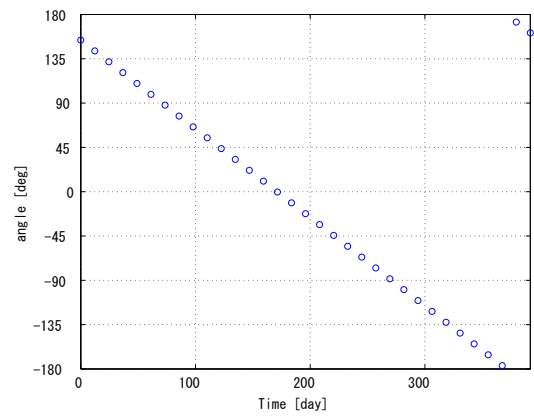


図 3.3.8 Steering Angle (Hill 座標系)

- Inbound loop 効率最大 (増速の EDVEGA)

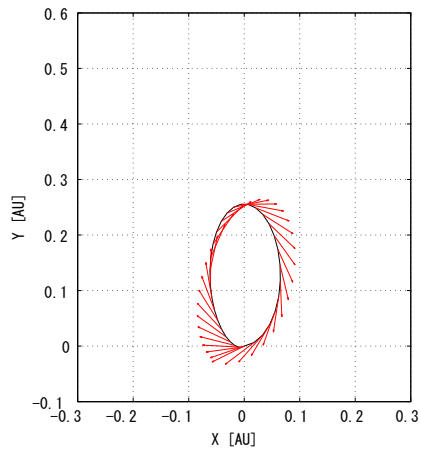


図 3.3.9 軌道図 (Hill 座標系)

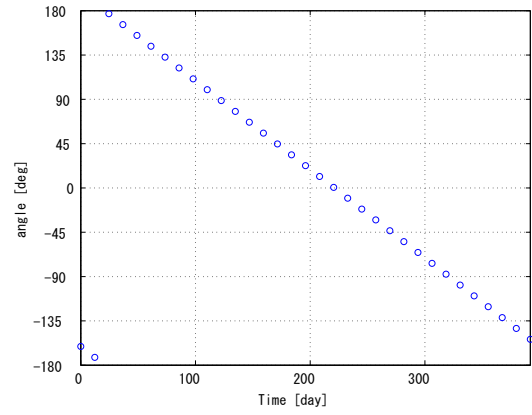


図 3.3.10 Steering Angle (Hill 座標系)

- Inbound loop 効率最小 (減速の EDVEGA)

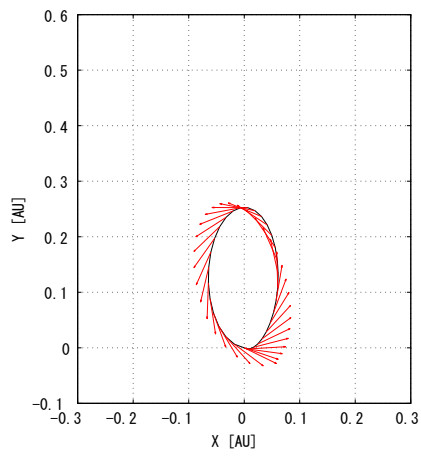


図 3.3.11 軌道図 (Hill 座標系)

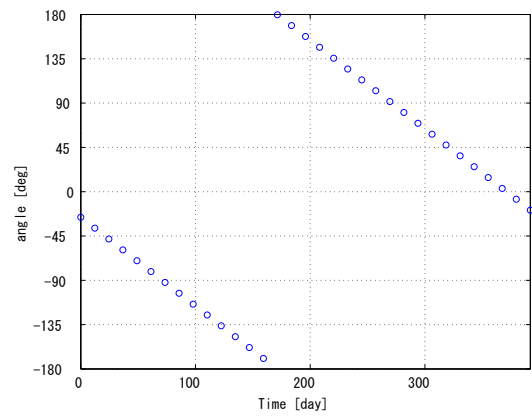


図 3.3.12 Steering Angle (Hill 座標系)

表 3.3.1 各種値

項目	Out 効率最大	Out 効率最小	In 効率最大	In 効率最小
効率	1.608	-1.608	1.608	-1.608
初期無限遠速度	676.70 [m/sec]	2613.93 [m/sec]	676.70 [m/sec]	2613.93 [m/sec]
終端無限遠速度	2631.47 [m/sec]	659.14 [m/sec]	2631.47 [m/sec]	659.14 [m/sec]
増速量	1215.61 [m/sec]	1215.61 [m/sec]	1215.61 [m/sec]	1215.61 [m/sec]
ToF	391.94 [day]	391.94 [day]	391.94 [day]	391.94 [day]
初期重量	780 [kg]	780 [kg]	780 [kg]	780 [kg]
消費燃料	25.03 [kg]	25.03 [kg]	25.03 [kg]	25.03 [kg]
k/ω_0	0.913	0.913	0.913	0.913
θ_0	19 [deg]	154 [deg]	199 [deg]	334 [deg]

表 3.3.1 に、抽出した 4 タイプの軌道の各種値を示す。

いくつか興味深い結果が得られた。まず、増速の Outbound loop と Inbound loop の効率が等しい点である。実は、第 2 章で示した DCNLP の構成で最適化を行うと、「Outbound loop よりも Inbound loop の方が効率が良くなる」という結果 [15] が得られていた。[15] の結果では、フルスラストの場合ではなく、コースティングを含んだ通常の EDVEGA で比較をおこなっており、また、スラストによる燃料消費も考慮していた。一方、今回のケースでは、フルスラストの場合であり、スラストによる燃料消費は考慮に入っていない。次に気になる点としては、全ての k/ω_0 の値が同じという点である。

$\theta_0 - k/\omega_0$ マップより、EDVEGA 軌道の 4 タイプを抜け漏れなくフルスラストの解析解から得られることが確認できた。また、 $\theta_0 - k/\omega_0$ マップを用いることで、希望のタイプの EDVEGA 軌道を抽出することが可能であることも示された。

解の抽出

第 2.2.4 項の DCNLP 最適解と設定値を同じにし、初速度と終端速度が最も近い解を抽出した結果を以下に示す。図 3.3.4 の $\theta_0 - k/\omega_0$ マップ上においては、「抽出点」として白くプロットしている点を選んでいる。

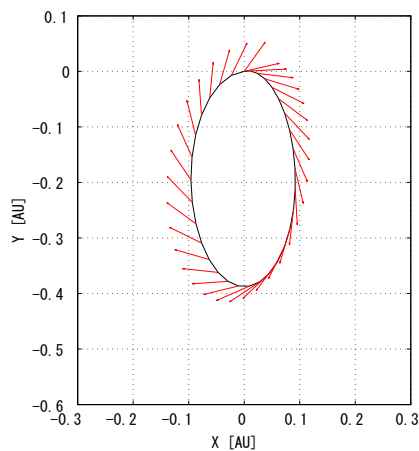


図 3.3.13 軌道図 (Hill 座標系)

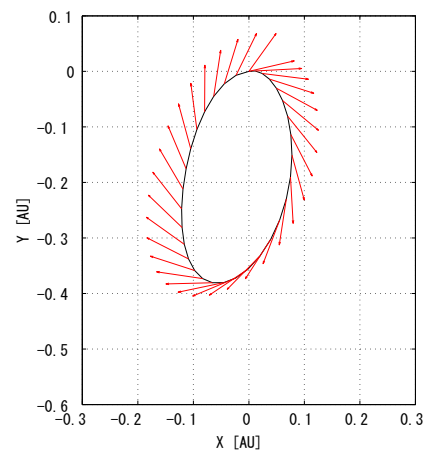


図 3.3.14 軌道図 (回転座標系)

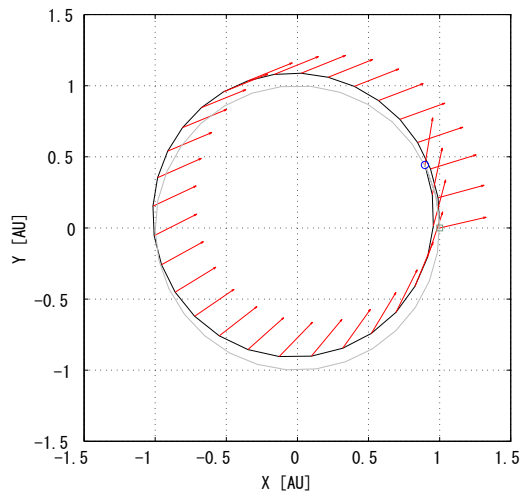


図 3.3.15 軌道図 (慣性座標系)

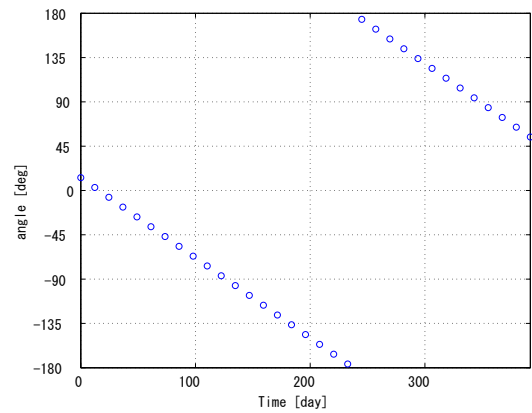


図 3.3.16 Steering Angle (Hill 座標系)

表 3.3.2 各種値

項目	値
効率	1.482
初期無限遠速度	1581.58 [m/sec]
終端無限遠速度	3383.27 [m/sec]
増速量	1215.61 [m/sec]
ToF	391.94 [day]
初期重量	780 [kg]
消費燃料	25.03 [kg]
k/ω_0	0.825
θ_0	13 [deg]

図 3.3.13 は、解析解より得られる軌道をプロットしたものである。図 3.3.14 は、図 3.3.13 で示した Hill 座標系で得られた軌道を第 3.2 節で説明した方法で回転座標系に座標変換したものである。図 3.3.15 は、図 3.3.14 で示した、回転座標系の軌道を太陽中心黄道面基準慣性座標系に変換した軌道図である。つまり、「Hill 座標系 → 回転座標系 → 慣性座標系」という変換を経ている。図 3.3.16 は、Hill 座標系での Steering Angle の時間履歴を示している。

第 2.2 節で説明した定義で図 3.3.16 の計算は行っている。Hill 座標系では、Y 成分の値の大きさに関わらず第 1 天体（今の場合「太陽」）は左側にあるものとするため、Hill 座標系での Steering Angle の計算は、x 軸と推力ベクトルの成す角で計算する。本研究では、Hill 座標系で「推力ベクトルが一定方向に回転する ($\theta_0 - kt$)」ようにモデル化を行ったが、そのために Steering Angle は 1 次関数的に変化している。

3.3.2 解の比較

第 2.2.4 項で示した DCNLP による最適解と第??項で示したフルスラストの解析解を比較する。単純に位置ベクトルや推力ベクトルを比較しても良いが、より実用的な面を考慮し、位置の比較には、「SPE 角、地球探査機距離、太陽探査機距離」、推力の比較には、「推力の大きさ、Steering Angle」を用いている。ベクトルの大きさと角度の情報を比較しているため、間接的には位置と推力のフィッティングを比較できていることになる。ただし、推力に関して

は回転座標系での成分ごとの比較も行い，モデル化がどの程度正しいものであったかの評価も行った．以下に比較結果を示す．

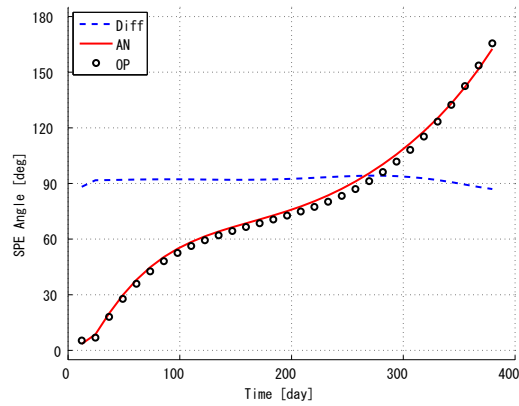


図 3.3.17 SPE 角 (慣性座標系 \times 慣性座標系). 差分基準値 : 90 [deg]

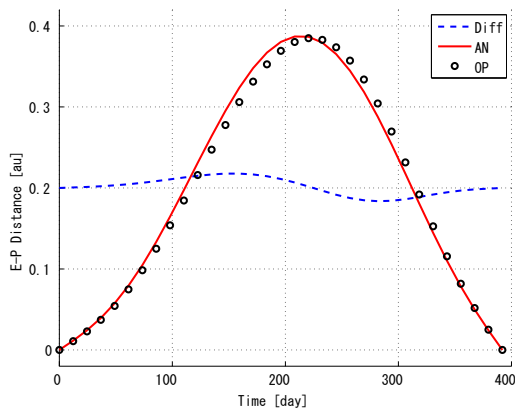


図 3.3.18 地球探査機距離 (回転座標系 \times 回転座標系). 差分基準値 : 0.2 [au]

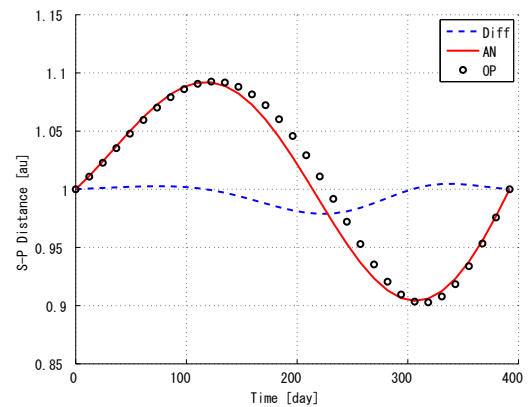


図 3.3.19 太陽探査機距離 (慣性座標系 \times 慣性座標系). 差分基準値 : 1 [au]

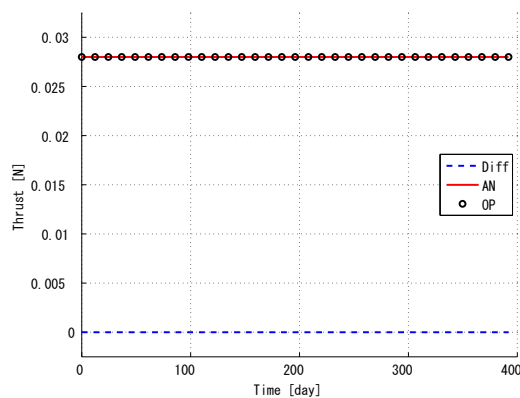


図 3.3.20 推力履歴 (回転座標系 \times Hill 座標系). 差分基準値 : 0 [N]

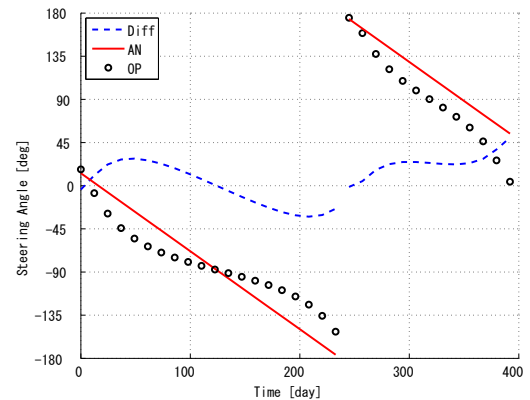


図 3.3.21 Steering Angle (慣性座標系 \times Hill 座標系). 差分基準値 : 0 [deg]

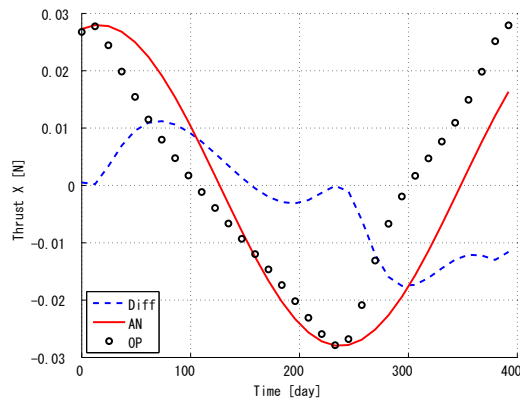


図 3.3.22 推力履歴 X 成分(回転座標系 × Hill 座標系).
差分基準値 : 0 [N]

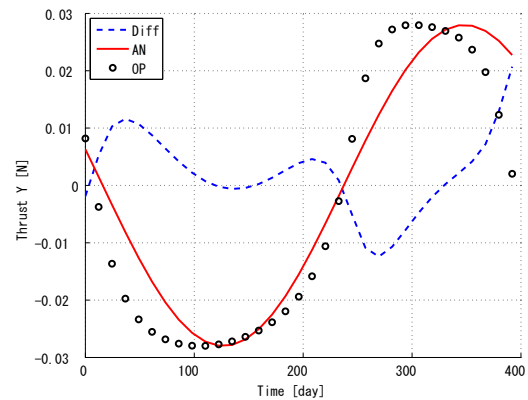


図 3.3.23 推力履歴 Y 成分(回転座標系 × Hill 座標系).
差分基準値 : 0 [N]

表 3.3.3 値の比較 1

項目	差分の平均値	差分の最大
地球探査機距離 [au]	0.0086	0.0177
太陽探査機距離 [au]	0.0067	0.0211
SPE 角 [deg]	2.4800	4.2164

表 3.3.4 値の比較 2

項目	差分の平均値	差分の最大
推力 (norm) [mN]	3.4×10^{-4}	3.4×10^{-4}
推力 (X 成分) [mN]	7.7412	17.5091
推力 (Y 成分) [mN]	5.5151	20.7093
Steering Angle [deg]	20.7758	50.1450

表 3.3.5 各種値

項目	DCNLP 最適解	フルラスト解析解
効率	1.626	1.482
初期無限遠速度	1500.00 [m/sec]	1581.58 [m/sec]
終端無限遠速度	3500.00 [m/sec]	3383.27 [m/sec]
増速量	1230.07 [m/sec]	1215.61 [m/sec]
ToF	391.94 [day]	391.94 [day]
初期重量	780 [kg]	780 [kg]
消費燃料	25.32 [kg]	25.03 [kg]
k/ω_0	0.8696	0.825
θ_0	13.43 [deg]	13 [deg]

図 3.3.17 から図 3.3.23 までの見方をまとめて説明する．黒い円（図中ではレジェンド「OP」）で DCNLP 最適解（以下，単に「最適解」と称す），赤い実線（図中ではレジェンド「AN」）でフルラスト解析解（以下，単に「解析解」と称す），青い破線（図中ではレジェンド「Diff」）で差分を表している．差分の算出方法は，「解析解 - 最適解 + 基準値」で求めている．基準値は，図中で見やすい位置に表示するために加えている値である．各基準値の値は各キャプションの後半に記載している．最適解と解析解をどの座標系で算出しているかに関しては，キャプション中盤のカッコ内に記載している．前半が最適解の座標系，後半が解析解の座標系である．解析解の値を慣性座標系で算出する際には，「Hill 座標系 回転座標系 慣性座標系」という段階を踏んでいることを注意する．また，同様に解析解の値を回転座標系で算出する際には，「Hill 座標系 回転座標系」という段階を踏んでいる．

表 3.3.3 と表 3.3.4 には、図中で示している差分の大きさの平均値と差分の大きさの最大値をそれぞれ示している。また、表 3.3.5 には、最適解と解析解の軌道の各種値を示している。

まず、位置に関してはなかなか良く再現できていることが示された。SPE 角に関しては、最適解と解析解で値が全体的にズレてしまっているが、平均で 2.48 度、最大でも 4.22 度と、初期のシステム解析等には問題なく用いることができる小ささである。地球探査機距離と太陽探査機距離も、ズレが目立つ部分も含まれるが、重要なのは最遠点と最近点の距離とタイミングであり、この部分に関してはズレが小さくなっている。

次に、推力に関してであるが、こちらはやや苦しい結果となっている。Steering Angle に関しては、平均的な差分が 20.8 度と、やや大きめの値となっている。回転座標系での推力履歴もやや苦しい結果となっている。最大推力を 40mN と設定しているが、この値からのズレは X 成分で 20 パーセント、Y 成分で 14 パーセント程度となっている。

推力が多少ズレてしまっているが、位置に関してはまあまあ合っていた原因は複合的にいくつか考えられる。

- 遠日点での Steering Angle が -90 度で一致している
- 推力履歴の X 成分よりも Y 成分が一致することに重きを置いている

増速の Outbound loop では、遠日点で減速、近日点で増速を行う。したがって、遠日点では Steering Angle が -90 度、近日点では +90 度になっていることが望ましい。図 3.3.21 からわかるように、近日点での +90 度のタイミングはズレてしまっているが、遠日点での -90 度のタイミングはしっかりと一致している。

また、Hill 座標系において、Y 成分は軌道の接線方向にあたり、X 成分は動径方向にあたる。つまり、推力の Y 成分は軌道変更に大きな影響を及ぼすが、X 成分はあまり軌道変更に影響を及ぼさない。したがって、X 成分を捨てても Y 成分を良く一致させる方が、より良く EDVEGA 軌道を再現するためには必要になる。

最後に、最適解の推力ベクトルに対する考察を行う。Outbound loop では、遠日点通過後に近日点を通過する。そのため、真近点角の変化率（探査機の角速度）は、遠日点付近で大きくなり、近日点付近で小さくなる。実際、このことは Steering Angle に対して影響を与えており、遠日点付近よりも近日点付近の方が傾きが急になっている。推力を接線方向に向け続けるためには、位置の位置の変化に合わせて推力方向を変える必要があるため、その結果としてこうなったと考えられる。この、遠日点と近日点での真近点角の変化が生み出す Steering Angle の勾配の変化が、解析解の再現性の悪さを引き起こす一つの原因となっている。

以上より、フルスラストの場合の EDVEGA 軌道では、最適解を解析解がそれなりに良い精度で再現することが示された。システム解析等で用いる場合には、図 3.3.17 から表 3.3.5 に示した程度のズレがあることを念頭において検討を進めると良い。

3.3.3 フルスラスト解析解による DCNLP マルチスラスト最適解の再現

第 2.2.5 項の DCNLP 最適解と設定値を同じにし、初速度と終端速度が最も近い解を抽出した結果を以下に示す。第 2.2.5 項の DCNLP 最適解は、コースティングの間にスラスト区間を 2 つ含む VILM であるため、フルスラスト解析解を用いて再現するにはムリが生じる。この項では、「先行研究のフルスラスト解析解が現実のコースティングを含む VILM をどの程度再現できているものなのか」を評価することが目的である。

解析解生成手法

同様にパラメータを振ることで、網羅的な軌道の生成を行い、ターゲットとする軌道に最も近い VILM を抽出する。以下に各パラメータの具体的な値を示す。

ω_0 地球の角速度 ($2\pi / (365.256363004 \times 24 \times 60 \times 60)$ [rad/sec])

a 5.6×10^{-5} [m/sec²] (= 40mN/500kg × 70%)

$$\begin{aligned}
 t & 404.6938 \text{ [day]} \\
 k & 0:0.011:2 \times \omega_0 \text{ [rad/sec]} \\
 \theta_0 & 0:1:360 \text{ [deg]}
 \end{aligned}$$

解の抽出

第 2.2.5 項の DCNLP 最適解と設定値を同じにし，初速度と終端速度が最も近い解を抽出した結果を以下に示す．

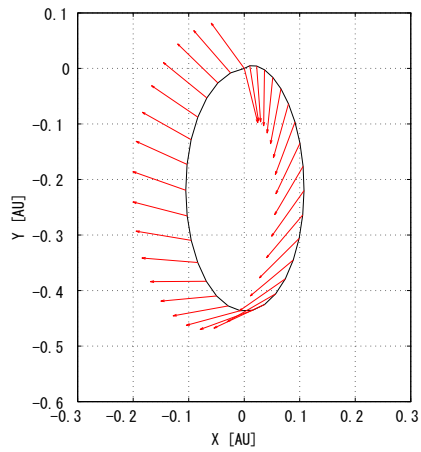


図 3.3.24 軌道図 (Hill 座標系)

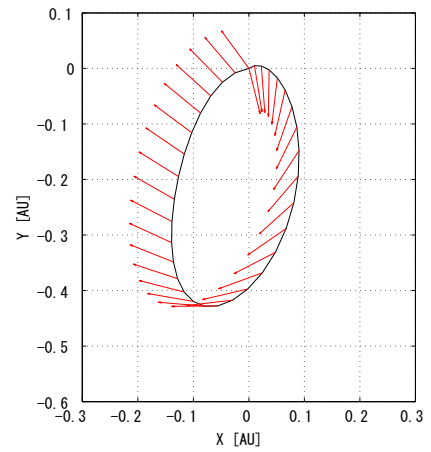


図 3.3.25 軌道図 (回転座標系)

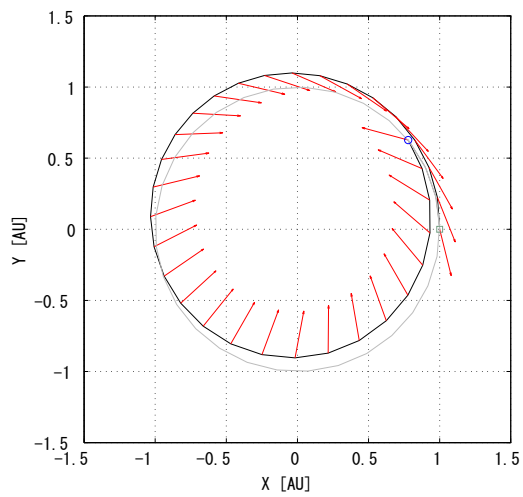


図 3.3.26 軌道図 (慣性座標系)

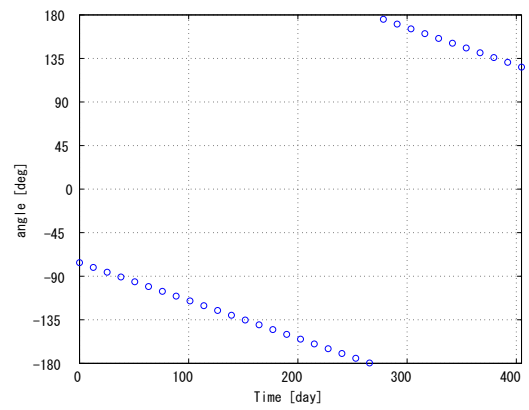


図 3.3.27 Steering Angle (Hill 座標系)

表 3.3.6 各種値

項目	値
効率	1.0068
初期無限遠速度	1511.97 [m/sec]
終端無限遠速度	3483.29 [m/sec]
増速量	1958.07 [m/sec]
ToF	404.69 [day]
初期重量	500 [kg]
消費燃料	25.59 [kg]
k/ω_0	0.3960
θ_0	284 [deg]

図の見方に関しては，図 3.3.13 から図 3.3.16 までと同様である．

コースティングの間でスラスト区間を 2 つ含む VILM を「フルスラスト」で再現しようとしているため，あり余る推力を無駄な方向に向けることで分散させる結果となった．遠日点付近や近日点付近では，接線方向へのスラストが殆ど無く，終始，無駄な方向へのスラストとなっている．

3.3.4 解の比較

第 2.2.5 項で示した DCNLP による最適解と第 3.3.3 項で示したフルスラストの解析解を比較する．以下に結果を示す．

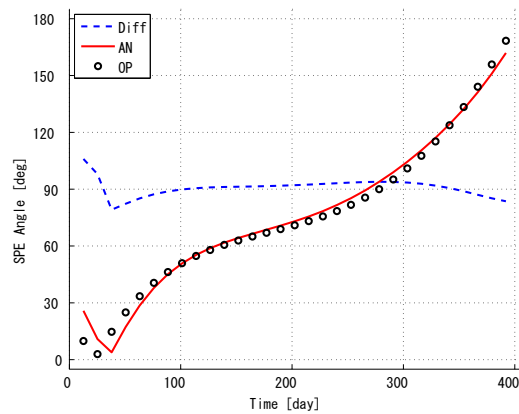


図 3.3.28 SPE 角

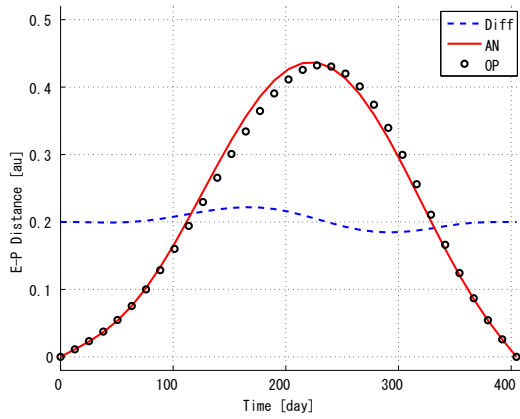


図 3.3.29 地球探査機距離

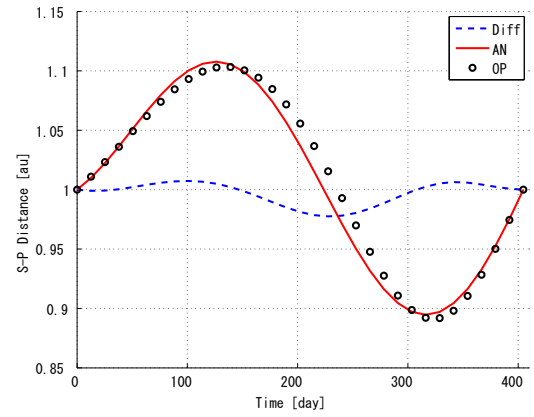


図 3.3.30 太陽探査機距離

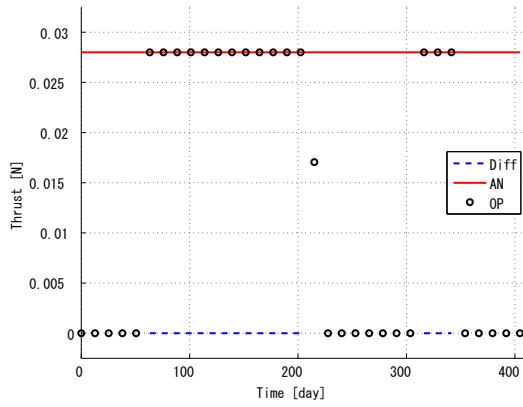


図 3.3.31 推力履歴 (回転座標系 × Hill 座標系)

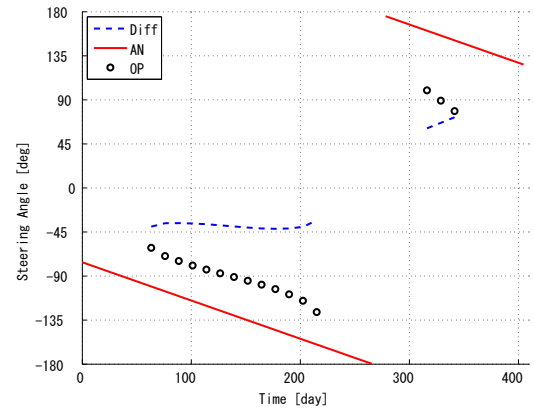


図 3.3.32 Steering Angle (慣性座標系 × Hill 座標系)

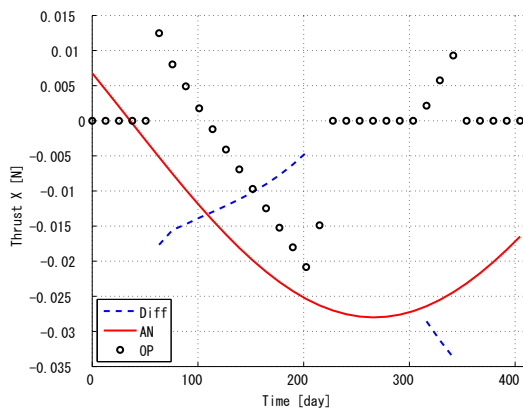


図 3.3.33 推力履歴 X 成分 (回転座標系 × Hill 座標系)

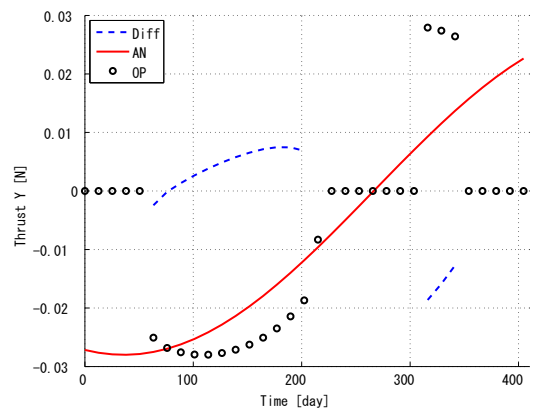


図 3.3.34 推力履歴 Y 成分 (回転座標系 × Hill 座標系)

表 3.3.7 値の比較 1

項目	差分の平均値	差分の最大
地球探査機距離 [au]	0.0083	0.0219
太陽探査機距離 [au]	0.0073	0.0225
SPE 角 [deg]	3.5373	15.9494

表 3.3.8 値の比較 2

項目	差分の平均値	差分の最大
推力 (norm) [mN]	1.1×10^{-13}	2.8×10^{-13}
推力 (X 成分) [mN]	15.2879	33.7222
推力 (Y 成分) [mN]	6.9160	18.6164
Steering Angle [deg]	43.7380	72.1820

表 3.3.9 各種値

項目	DCNLP 最適解	フルスラスト解析解
効率	2.069	1.0068
初期無限遠速度	1500.00 [m/sec]	1511.97 [m/sec]
終端無限遠速度	3500.00 [m/sec]	3483.29 [m/sec]
増速量	966.6 [m/sec]	1958.07 [m/sec]
ToF	404.69 [day]	404.69 [day]
初期重量	500 [kg]	500 [kg]
消費燃料	12.80 [kg]	25.59 [kg]
k/ω_0	-	0.3960
θ_0	-	284 [deg]

図の見方に関しては、図 3.3.18 から図 3.3.23 までと同様である。ただし、推力の差分に関しては、DCNLP 最適解とフルスラスト解析解がお互いに存在する区間でのみ値の比較を行った。

位置に関しては、フルスラストで比較した場合と同様に、それなりの再現度となった。しかし、推力は無駄な方向に向いているため、推力の X 成分, Y 成分, Steering Angle とともにかなり悪い再現度となった。特に Steering Angle の値は悪く、平均でも 44 度程度ズレてしまう結果となった。

また、コースティングの間でスラスト区間を 2 つ含む実用の VILM をフルスラストで強引に再現しようとしているため、効率 (消費燃料) の値もかなり悪い結果となった。消費燃料に 2 倍の差が出ており、従って効率の値も 2 分の 1 に低下してしまっている。遠点と近点付近、軌道上の合計でも半分の区間でスラストすれば達成可能であるところを、全区間のスラストで再現しようとしたためにこのような結果となっている。これこそが、フルスラスト解析解で VILM の再現が不十分であるところのゆえんである。

第 4 章

Single Thrust

「スラスト区間の前後にコースティング区間を含む VILM」(以下,「シングルスラスト」とも称す)の解析解を求め, DCNLP を用いた数値最適化による解と比較することで得られた解析解の検証を行う。まず, コースティングやスラスト区間を含んだ軌道で解析解を求めるための手法を 1 次元の簡単な例で説明する。具体的には, 各区間の解を境界条件で連結していくことで 1 つ軌道の解にまとめることに試みた。

その後, その手法を用いて実際にシングルスラストの解析解を得ることに試みた。この際, 第 3 章で示した, Hill 方程式の一般解を大いに用いる。

検証においては, まず, シングルスラストの解析解を用いた解(軌道)の生成手法を説明する。フルスラストの場合と同様に, 解析解では初速度と終端速度を自由に決めることができないため, 網羅的に解を生成し, その中から最もターゲットとする初速度と終端速度に近い解を抽出する。最後に, 最適解と網羅的な解析から抽出した解析解とを比較し, それなりの精度で解(軌道)が再現できていることを示す。

4.1 方法

この節では, 「コースティング(第 1 区間) スラスト(第 2 区間) コースティング(第 3 区間)」といった, コースティングの間にスラスト期間を含むような場合の解析解の導き方を説明する。手法自体は至って簡単で, 「第 1 区間の運動方程式を解いたあと, その終端を初期条件として第 2 区間の運動方程式を解く。第 2 区間の運動方程式を解いたあと, その終端を初期条件として第 3 区間の運動方程式を解く。」という単純な作業の繰り返しになる。以下, 簡単な例で説明する。

4.1.1 運動方程式の接続

図 4.1.1 に示すような 1 次元上を運動する物体を考える。物体にはある一定期間だけ外力が加わるものとする。

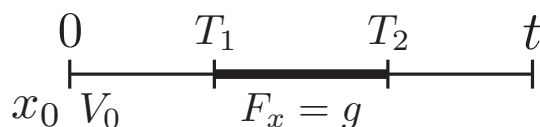


図 4.1.1 運動の概略図

第 1 区間 ($0 - T_1$) 外力なし, 初期位置 x_0 , 初速度 V_0

第 2 区間 ($T_1 - T_2$) 外力 g

第 3 区間 ($T_2 - t$) 外力なし

このときの第3区間における解析解を2通りの方法で考える．単純に微分方程式を積分して解く方法と，係数変化法を利用して解く方法である．解くべきおもとの運動方程式は以下の式になる．

$$\ddot{x} = F_x \quad (4.1.1)$$

式(4.1.1)の F_x が，外力のあり，なしによって変化する．

微分方程式の積分

それぞれの区間において，物体の運動は以下の運動方程式に従うはずである．

$$\text{第1区間 } x = C_1 t + C_2, \dot{x} = C_1$$

$$\text{第2区間 } x = \frac{1}{2}g(t - T_1)^2 + C'_1(t - T_1) + C'_2, \dot{x} = g(t - T_1) + C'_1$$

$$\text{第3区間 } x = C''_1(t - T_2) + C''_2, \dot{x} = C''_1$$

ただし， t は，第1区間スタート時からの経過時間であることに注意する．また，第1区間の「 t 」は，「 $0 < t < T_1$ 」を意味し，他の区間の t についても同様である．第1区間から順番に運動方程式を解く．

第1区間 初期条件より，積分定数を求める．

$$x(0) = C_2 = x_0 \quad (4.1.2)$$

$$\dot{x}(0) = C_1 = v_0 \quad (4.1.3)$$

これより，第1区間における解析解が求まる．

$$x = v_0 t + x_0 \quad (4.1.4)$$

$$\dot{x} = v_0 \quad (4.1.5)$$

第2区間 第1区間の解を初期条件として，第2区間の積分定数を求める．

$$x(T_1) = C'_2 = v_0 T_1 + x_0 \quad (4.1.6)$$

$$\dot{x}(T_1) = C'_1 = v_0 \quad (4.1.7)$$

これより，第2区間における解析解が求まる．

$$x = \frac{1}{2}g(t - T_1)^2 + v_0(t - T_1) + v_0 T_1 + x_0 \quad (4.1.8)$$

$$\dot{x} = g(t - T_1) + v_0 \quad (4.1.9)$$

第3区間 第2区間の解を初期条件として，第3区間の積分定数を求める．

$$x(T_2) = C''_2 = \frac{1}{2}g(T_2 - T_1)^2 + v_0(T_2 - T_1) + v_0 T_1 + x_0 \quad (4.1.10)$$

$$\dot{x}(T_2) = C''_1 = g(T_2 - T_1) + v_0 \quad (4.1.11)$$

以上より，第3区間における解析解が求まる．

$$x(t) = \{g(T_2 - T_1) + v_0\}(t - T_2) + \frac{1}{2}g(T_2 - T_1)^2 + v_0(T_2 - T_1) + v_0 T_1 + x_0 \quad (4.1.12)$$

係数変化法による解法

係数変化法に従って，運動方程式 (4.1.1) を整理すると，以下のようになる．

$$C_1 = \int F_x dt + C_A \quad (4.1.13)$$

$$C_2 = \int (-F_x t) dt + C_B \quad (4.1.14)$$

第1区間 $x = C_1 t + C_2$

第2区間 $x = C_1 (t - T_1) + C_2$

第3区間 $x = C_1 (t - T_2) + C_2$

これらを第1区間から順番に解いていく．

第1区間 第1区間では外力がないため， C_1 と C_2 は以下のようになる．

$$C_1 = C_A \quad (4.1.15)$$

$$C_2 = C_B \quad (4.1.16)$$

初期条件より，積分定数を求める．

$$x(0) = C_B = x_0 \quad (4.1.17)$$

$$\dot{x}(0) = C_A = v_0 \quad (4.1.18)$$

これより，第1区間における解析解が求まる．

$$x = v_0 t + x_0 \quad (4.1.19)$$

$$\dot{x} = v_0 \quad (4.1.20)$$

これは単純に微分方程式を積分した場合の解に一致する．

第2区間 第2区間では外力を考慮して C_1 と C_2 を求める．

$$C_1 = \int_{T_1}^t g dt' + C_A = g(t - T_1) + C_A \quad (4.1.21)$$

$$C_2 = \int_{T_1}^t (-gt') dt' + C_B = -\frac{1}{2}g(t^2 - T_1^2) + C_B \quad (4.1.22)$$

これより，第2区間での一般解が求まる．

$$x = \{g(t - T_1) + C_A\}(t - T_1) + \left\{-\frac{1}{2}g(t^2 - T_1^2) + C_B\right\} \quad (4.1.23)$$

$$\dot{x} = 2g(t - T_1) + C_A - gt \quad (4.1.24)$$

第1区間の解を初期条件として，第2区間の積分定数を求める．

$$x(T_1) = C_B = v_0 T_1 + x_0 \quad (4.1.25)$$

$$\dot{x}(T_1) = C_A - gT_1 = v_0 \quad (4.1.26)$$

以上より，第2区間における解析解が求まる．

$$x = \{g(t - T_1) + v_0 + gT_1\}(t - T_1) + \left\{-\frac{1}{2}g(t^2 - T_1^2) + v_0 T_1 + x_0\right\} \quad (4.1.27)$$

$$\dot{x} = 2g(t - T_1) + v_0 + gT_1 - gt \quad (4.1.28)$$

これは単純に微分方程式を積分した場合の解に一致する．

第3区間 第3区間でも，第1区間と同様の手順で計算を進めていく．

$$C_1 = C_A \quad (4.1.29)$$

$$C_2 = C_B \quad (4.1.30)$$

$$x(T_2) = C_B = \{g(T_2 - T_1) + v_0 + gT_1\}(T_2 - T_1) + \left\{-\frac{1}{2}g(T_2^2 - T_1^2) + v_0T_1 + x_0\right\} \quad (4.1.31)$$

$$\dot{x}(T_2) = C_A = 2g(T_2 - T_1) + v_0 + gT_1 - gT_2 \quad (4.1.32)$$

以上より，第3区間における解析解が求まる．

$$x(t) = \{g(T_2 - T_1) + v_0\}(t - T_2) + \left\{\frac{1}{2}g(T_2 - T_1)^2 + v_0T_2 + x_0\right\} \quad (4.1.33)$$

これは単純に微分方程式を積分した場合の解に一致する．

今示した手順と同様の手順で，コースティングを含んだ場合の解析解を求める．

4.2 求解

前節で説明した手順で「コースティング(第1区間) スラスト(第2区間) コースティング(第3区間)」の運動を行う探査機の解析解を求める．図4.2.1に運動の概略図を示す．

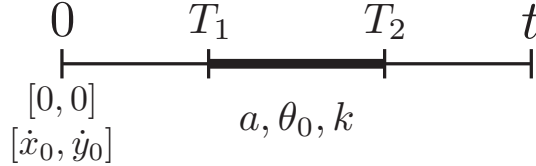


図 4.2.1 運動の概略図

第1区間 ($0 - T_1$) 外力なし，初期位置原点，初速度 \dot{x}_0, \dot{y}_0

第2区間 ($T_1 - T_2$) 外力 $a(a, \theta_0, k)$

第3区間 ($T_2 - t$) 外力なし

加速度は前章と同様に定式化を用いる．

$$a_x = a \cos(\theta_0 - kt) \quad (4.2.1)$$

$$a_y = a \sin(\theta_0 - kt) \quad (4.2.2)$$

4.2.1 第1区間

式(3.2.26)から式(3.2.29)を用いて， C_1 から C_4 を求める．第1区間では外力がないため，式は大変簡単になる．

$$C_1 = C_A \quad (4.2.3)$$

$$C_2 = C_B \quad (4.2.4)$$

$$C_3 = C_C \quad (4.2.5)$$

$$C_4 = C_D \quad (4.2.6)$$

これを式 (3.2.20) から式 (3.2.25) に代入することにより, 第1区間の一般解が求まる.

$$x = \frac{2}{\omega_0} C_A + C_B \sin(\omega_0 t) + C_C \cos(\omega_0 t) \quad (4.2.7)$$

$$y = -3C_A t + 2C_B \cos(\omega_0 t) - 2C_C \sin(\omega_0 t) + C_D \quad (4.2.8)$$

$$\dot{x} = \omega_0 C_B \cos(\omega_0 t) - \omega_0 C_C \sin(\omega_0 t) \quad (4.2.9)$$

$$\dot{y} = -3C_A - 2\omega_0 C_B \sin(\omega_0 t) - 2\omega_0 C_C \cos(\omega_0 t) \quad (4.2.10)$$

境界条件 ($x(0) = y(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$) のとき,

$$C_A = \dot{y}_0 \quad (4.2.11)$$

$$C_B = \frac{1}{\omega_0} \dot{x}_0 \quad (4.2.12)$$

$$C_C = -\frac{2}{\omega_0} \dot{y}_0 \quad (4.2.13)$$

$$C_D = -\frac{2}{\omega_0} \dot{x}_0 \quad (4.2.14)$$

となる. 以上より, 第1区間における解析解を得る.

$$x = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + \frac{2}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)) \dot{y}_0 \quad (4.2.15)$$

$$y = -\frac{2}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)) \dot{x}_0 + \left(-3t + \frac{4}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) \dot{y}_0 \quad (4.2.16)$$

$$\dot{x} = \cos(\omega_0 t) \dot{x}_0 + 2 \sin(\omega_0 t) \dot{y}_0 \quad (4.2.17)$$

$$\dot{y} = -2 \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + (-3 + 4 \cos(\omega_0 t)) \dot{y}_0 \quad (4.2.18)$$

4.2.2 第2区間

フルスラストの場合と同様, $\omega_0 = k$ と $\omega \neq k$ で, 場合分けが必要となる. 第2区間でまず注意すべき点は, C_1 から C_4 を求める際の式 (3.2.26) から式 (3.2.29) の積分が, 不定積分ではなく, T_1 から t までの定積分に変わる点である.

$\omega_0 = k$ の場合

式 (3.2.26) から式 (3.2.29) を用いて, C_1 から C_4 を求める. このとき, 積分区間は, T_1 から t までの定積分であることに注意する.

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{a}{\omega_0} \{ \cos(\theta_0 - \omega_0 t) - \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1) \} \\
&\quad + C_A \\
C_2 &= \frac{3}{2} \frac{a}{\omega_0} (t - T_1) \cos(\theta_0) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0^2} \cos(\theta_0) (\cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 T_1) \sin(\omega_0 T_1)) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0^2} \sin(\theta_0) (\sin^2(\omega_0 t) - \sin^2(\omega_0 T_1)) \\
&\quad + C_B \\
C_3 &= -\frac{3}{2} \frac{a}{\omega_0} (t - T_1) \sin(\theta_0) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0^2} \sin(\theta_0) (\cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 T_1) \sin(\omega_0 T_1)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0^2} \cos(\theta_0) (\sin^2(\omega_0 t) - \sin^2(\omega_0 T_1)) \\
&\quad + C_C \\
C_4 &= 5 \frac{a}{\omega_0^2} \{ \sin(\theta_0 - \omega_0 t) - \sin(\theta_0 - \omega_0 T_1) \} \\
&\quad + 3 \frac{a}{\omega_0} \{ t \cos(\theta_0 - \omega_0 t) - T_1 \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1) \} \\
&\quad + C_D
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

これを式 (3.2.20) から式 (3.2.25) に代入することにより, 第1区間の一般解が求まる.

$$x = \frac{2}{\omega_0} C_1 + C_2 \sin(\omega_0 (t - T_1)) + C_3 \cos(\omega_0 (t - T_1)) \tag{4.2.20}$$

$$y = -3C_1 (t - T_1) + 2C_2 \cos(\omega_0 (t - T_1)) - 2C_3 \sin(\omega_0 (t - T_1)) + C_4 \tag{4.2.21}$$

$$\dot{x} = \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 (t - T_1)) - \omega_0 C_3 \sin(\omega_0 (t - T_1)) \tag{4.2.22}$$

$$\dot{y} = -3C_1 - 2\omega_0 C_2 \sin(\omega_0 (t - T_1)) - 2\omega_0 C_3 \cos(\omega_0 (t - T_1)) \tag{4.2.23}$$

ただし, 第2区間に合わせて時間部分の表記を変えている. また, 代入後の式は大変長くなってしまうためここでは割愛する.

境界条件 ($x_I(T_1) = x_{II}(T_1)$, $y_I(T_1) = y_{II}(T_1)$, $\dot{x}_I(T_1) = \dot{x}_{II}(T_1)$, $\dot{y}_I(T_1) = \dot{y}_{II}(T_1)$) における, 積分定数 C_A から C_D を求める. ただし, I の下付きは第1区間を表し, II の下付きは第2区間を表す. 境界条件を計算することにより,

$$\frac{2}{\omega_0} C_A + C_C = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 T_1) \dot{x}_0 + \frac{2}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 T_1)) \dot{y}_0 \tag{4.2.24}$$

$$2C_B + C_D = -\frac{2}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 T_1)) \dot{x}_0 + \left(-3T_1 + \frac{4}{\omega_0} \sin(\omega_0 T_1) \right) \dot{y}_0 \tag{4.2.25}$$

$$\omega_0 C_B = \cos(\omega_0 T_1) \dot{x}_0 + 2 \sin(\omega_0 T_1) \dot{y}_0 \tag{4.2.26}$$

$$-3C_A - 2\omega_0 C_C = -2 \sin(\omega_0 T_1) \dot{x}_0 + (-3 + 4 \cos(\omega_0 T_1)) \dot{y}_0 \tag{4.2.27}$$

となり，これを解くことで，

$$C_A = \dot{y}_0 \quad (4.2.28)$$

$$C_B = \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 T_1) \dot{x}_0 + \frac{2}{\omega_0} \sin(\omega_0 T_1) \dot{y}_0 \quad (4.2.29)$$

$$C_C = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 T_1) \dot{x}_0 - \frac{2}{\omega_0} \cos(\omega_0 T_1) \dot{y}_0 \quad (4.2.30)$$

$$C_D = -\frac{2}{\omega_0} \dot{x}_0 - 3T_1 \dot{y}_0 \quad (4.2.31)$$

を得る．これらを式(4.2.19)に代入し，それを式(4.2.20)から式(4.2.23)に続けて代入し，整理することで第2区間の解析解を得る．

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + \frac{2}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)) \dot{y}_0 \\ &\quad + 2 \frac{a}{\omega_0^2} \{ \cos(\theta_0 - \omega_0 t) - \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1) \} \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{a}{\omega_0} \sin(\omega_0 (t - T_1) - \theta_0) (t - T_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 (t - T_1) + \theta_0) (\cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 T_1) \sin(\omega_0 T_1)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 (t - T_1) + \theta_0) (\sin^2(\omega_0 t) - \sin^2(\omega_0 T_1)) \\ y &= \frac{2}{\omega_0} \{ \cos(\omega_0 t) - 1 \} \dot{x}_0 + \left\{ -3t + \frac{4}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right\} \dot{y}_0 \\ &\quad - 3 \frac{a}{\omega_0} \{ \cos(\theta_0 - \omega_0 t) - \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1) \} (t - T_1) \\ &\quad + 5 \frac{a}{\omega_0^2} \{ \sin(\theta_0 - \omega_0 t) - \sin(\theta_0 - \omega_0 T_1) \} \\ &\quad + 3 \frac{a}{\omega_0} \{ t \cos(\theta_0 - \omega_0 t) - T_1 \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1) \} \\ &\quad + 3 \frac{a}{\omega_0} \cos(\omega_0 (t - T_1) - \theta_0) (t - T_1) \\ &\quad - \frac{a}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 (t - T_1) + \theta_0) (\cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 T_1) \sin(\omega_0 T_1)) \\ &\quad - \frac{a}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 (t - T_1) + \theta_0) (\sin^2(\omega_0 t) - \sin^2(\omega_0 T_1)) \\ \dot{x} &= \cos(\omega_0 t) \dot{x}_0 + 2 \sin(\omega_0 t) \dot{y}_0 \\ &\quad + \frac{3}{2} a \cos(\omega_0 (t - T_1) - \theta_0) (t - T_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0} \cos(\omega_0 (t - T_1) + \theta_0) (\cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 T_1) \sin(\omega_0 T_1)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0} \sin(\omega_0 (t - T_1) + \theta_0) (\sin^2(\omega_0 t) - \sin^2(\omega_0 T_1)) \\ \dot{y} &= -2 \sin(\omega_0 t) \dot{x} + \{ -3 + 4 \cos(\omega_0 t) \} \dot{y}_0 \\ &\quad - 3 \frac{a}{\omega_0} \{ \cos(\theta_0 - \omega_0 t) - \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1) \} \\ &\quad - 3a \sin(\omega_0 (t - T_1) - \theta_0) (t - T_1) \\ &\quad + \frac{a}{\omega_0} \sin(\omega_0 (t - T_1) + \theta_0) (\cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 T_1) \sin(\omega_0 T_1)) \\ &\quad - \frac{a}{\omega_0} \cos(\omega_0 (t - T_1) + \theta_0) (\sin^2(\omega_0 t) - \sin^2(\omega_0 T_1)) \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

$\omega_0 \neq k$ の場合

$\omega_0 = k$ の場合と同様に, 式 (3.2.26) から式 (3.2.29) を用いて, C_1 から C_4 を求める.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{a}{k} (\cos(\theta_0 - kt) - \cos(\theta_0 - kT_1)) \\
 &\quad + C_A \\
 C_2 &= \frac{a}{\omega_0 \omega_0^2 - k^2} \{ (k + 2\omega_0) (\cos \omega_0 t \sin(\theta_0 - kt) - \cos \omega_0 T_1 \sin(\theta_0 - kT_1)) \\
 &\quad + (2k + \omega_0) (\sin \omega_0 t \cos(\theta_0 - kt) - \sin \omega_0 T_1 \cos(\theta_0 - kT_1)) \} \\
 &\quad + C_B \\
 C_3 &= \frac{a}{\omega_0 \omega_0^2 - k^2} \{ - (k + 2\omega_0) (\sin \omega_0 t \sin(\theta_0 - kt) - \sin \omega_0 T_1 \sin(\theta_0 - kT_1)) \\
 &\quad + (2k + \omega_0) (\cos \omega_0 t \cos(\theta_0 - kt) - \cos \omega_0 T_1 \cos(\theta_0 - kT_1)) \} \\
 &\quad + C_C \\
 C_4 &= \left(\frac{2a}{k\omega_0} + \frac{3a}{k^2} \right) (\sin(\theta_0 - kt) - \sin(\theta_0 - kT_1)) + \frac{3a}{k} (t \cos(\theta_0 - kt) - T_1 \cos(\theta_0 - kT_1)) \\
 &\quad + C_D
 \end{aligned} \tag{4.2.33}$$

これを式 (4.2.20) から式 (4.2.23) に代入することにより, 第1区間の一般解が求まる.

境界条件 ($x_I(T_1) = x_{II}(T_1)$, $y_I(T_1) = y_{II}(T_1)$, $\dot{x}_I(T_1) = \dot{x}_{II}(T_1)$, $\dot{y}_I(T_1) = \dot{y}_{II}(T_1)$) における, 積分定数 C_A から C_D を求める. $\omega_0 = k$ と同様にして計算すると, $\omega_0 = k$ の場合と同様の結果を得る.

$$C_A = \dot{y}_0 \tag{4.2.34}$$

$$C_B = \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 T_1) \dot{x}_0 + \frac{2}{\omega_0} \sin(\omega_0 T_1) \dot{y}_0 \tag{4.2.35}$$

$$C_C = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 T_1) \dot{x}_0 - \frac{2}{\omega_0} \cos(\omega_0 T_1) \dot{y}_0 \tag{4.2.36}$$

$$C_D = -\frac{2}{\omega_0} \dot{x}_0 - 3T_1 \dot{y}_0 \tag{4.2.37}$$

これらを式 (4.2.33) に代入し, それを式 (4.2.20) から式 (4.2.23) に続けて代入し, 整理することで第2区間の解

析解を得る .

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2}{\omega_0} \frac{a}{k} \{ \cos(\theta_0 - kt) - \cos(\theta_0 - kT_1) \} \\
&\quad + \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + \frac{2}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)) \dot{y}_0 \\
&\quad + \frac{a}{\omega_0} \frac{1}{\omega_0^2 - k^2} (k + 2\omega_0) \{ -\sin(\omega_0 T_1) \sin(\theta_0 - kt) + \sin \omega_0 (2T_1 - t) \sin(\theta_0 - kT_1) \} \\
&\quad + \frac{a}{\omega_0} \frac{1}{\omega_0^2 - k^2} (2k + \omega_0) \{ \cos(\omega_0 T_1) \cos(\theta_0 - kt) - \cos \omega_0 (2T_1 - t) \cos(\theta_0 - kT_1) \} \\
y &= -3 \frac{a}{k} (\cos(\theta_0 - kt) - \cos(\theta_0 - kT_1)) (t - T_1) \\
&\quad + \frac{2}{\omega_0} (\cos(\omega_0 t) - 1) \dot{x}_0 + \left(-3t + \frac{4}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) \dot{y}_0 \\
&\quad + 2 \frac{a}{\omega_0} \frac{1}{\omega_0^2 - k^2} (k + 2\omega_0) \{ \cos(\omega_0 T_1) \sin(\theta_0 - kt) - \cos \omega_0 (2T_1 - t) \sin(\theta_0 - kT_1) \} \\
&\quad + 2 \frac{a}{\omega_0} \frac{1}{\omega_0^2 - k^2} (2k + \omega_0) \{ \sin(\omega_0 T_1) \cos(\theta_0 - kt) - \sin \omega_0 (2T_1 - t) \cos(\theta_0 - kT_1) \} \\
&\quad + \left(\frac{2a}{k\omega_0} + \frac{3a}{k^2} \right) (\sin(\theta_0 - kt) - \sin(\theta_0 - kT_1)) + \frac{3a}{k} (t \cos(\theta_0 - kt) - T_1 \cos(\theta_0 - kT_1)) \\
\dot{x} &= \cos(\omega_0 t) \dot{x}_0 + 2 \sin(\omega_0 t) \dot{y}_0 \\
&\quad + a \frac{1}{\omega_0^2 - k^2} (k + 2\omega_0) \{ \cos(\omega_0 T_1) \sin(\theta_0 - kt) - \cos \omega_0 (2T_1 - t) \sin(\theta_0 - kT_1) \} \\
&\quad + a \frac{1}{\omega_0^2 - k^2} (2k + \omega_0) \{ \sin(\omega_0 T_1) \cos(\theta_0 - kt) - \sin \omega_0 (2T_1 - t) \cos(\theta_0 - kT_1) \} \\
\dot{y} &= -3 \frac{a}{k} (\cos(\theta_0 - kt) - \cos(\theta_0 - kT_1)) \\
&\quad - 2 \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + (4 \cos(\omega_0 t) - 3) \dot{y}_0 \\
&\quad - 2a \frac{1}{\omega_0^2 - k^2} (k + 2\omega_0) \{ -\sin(\omega_0 T_1) \sin(\theta_0 - kt) + \sin \omega_0 (2T_1 - t) \sin(\theta_0 - kT_1) \} \\
&\quad - 2a \frac{1}{\omega_0^2 - k^2} (2k + \omega_0) \{ \cos(\omega_0 T_1) \cos(\theta_0 - kt) - \cos \omega_0 (2T_1 - t) \cos(\theta_0 - kT_1) \}
\end{aligned} \tag{4.2.38}$$

4.2.3 第3区間

第1区間と同様に式(3.2.26)から式(3.2.29)を用いて, C_1 から C_4 を求める. 第3区間でも外力がないため, 式は大変簡単になる.

$$C_1 = C_A \tag{4.2.39}$$

$$C_2 = C_B \tag{4.2.40}$$

$$C_3 = C_C \tag{4.2.41}$$

$$C_4 = C_D \tag{4.2.42}$$

これを式(3.2.20)から式(3.2.25)に代入することにより, 第1区間の一般解が求まる.

$$x = \frac{2}{\omega_0} C_A + C_B \sin \omega_0 (t - T_2) + C_C \cos \omega_0 (t - T_2) \tag{4.2.43}$$

$$y = -3C_A (t - T_2) + 2C_B \cos \omega_0 (t - T_2) - 2C_C \sin \omega_0 (t - T_2) + C_D \tag{4.2.44}$$

$$\dot{x} = \omega_0 C_B \cos \omega_0 (t - T_2) - \omega_0 C_C \sin \omega_0 (t - T_2) \tag{4.2.45}$$

$$\dot{y} = -3C_A - 2\omega_0 C_B \sin \omega_0 (t - T_2) - 2\omega_0 C_C \cos \omega_0 (t - T_2) \tag{4.2.46}$$

境界条件 ($x_{II}(T_2) = x_{III}(T_2)$, $y_{II}(T_2) = y_{III}(T_2)$, $\dot{x}_{II}(T_2) = \dot{x}_{III}(T_2)$, $\dot{y}_{II}(T_2) = \dot{y}_{III}(T_2)$) における積分定数 C_A から C_D を求める．先に第 3 区間の T_2 における一般解を整理する．

$$x_{III}(T_2) = \frac{2}{\omega_0} C_A + C_C \quad (4.2.47)$$

$$y_{III}(T_2) = 2C_B + C_D \quad (4.2.48)$$

$$\dot{x}_{III}(T_2) = \omega_0 C_B \quad (4.2.49)$$

$$\dot{y}_{III}(T_2) = -3C_A - 2\omega_0 C_C \quad (4.2.50)$$

従って, C_A から C_D は次の式で求められる．

$$C_A = 2\omega_0 x_{II}(T_2) + \dot{y}_{II}(T_2) \quad (4.2.51)$$

$$C_B = \frac{1}{\omega_0} \dot{x}_{II}(T_2) \quad (4.2.52)$$

$$C_C = -3x_{II}(T_2) - \frac{2}{\omega_0} \dot{y}_{II}(T_2) \quad (4.2.53)$$

$$C_D = -\frac{2}{\omega_0} \dot{x}_{II}(T_2) + y_{II}(T_2) \quad (4.2.54)$$

以下, $\omega_0 = k$ と $\omega_0 \neq k$ で, 場合分けを行う．

$\omega_0 = k$ の場合

式 (4.2.51) から式 (4.2.54) に $\omega_0 = k$ の場合の第 2 区間における解析解を代入し, 整理した結果を以下に示す．

$$\begin{aligned} C_A &= \dot{y}_0 \\ &\quad + \frac{a}{\omega_0} \{ \cos(\theta_0 - \omega_0 T_2) - \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1) \} \\ C_B &= \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 T_2) \dot{x}_0 + 2 \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 T_2) \dot{y}_0 \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{a}{\omega_0} \cos(\omega_0 (T_2 - T_1) - \theta_0) (T_2 - T_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 (T_2 - T_1) + \theta_0) (\cos(\omega_0 T_2) \sin(\omega_0 T_2) - \cos(\omega_0 T_1) \sin(\omega_0 T_1)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 (T_2 - T_1) + \theta_0) (\sin^2(\omega_0 T_2) - \sin^2(\omega_0 T_1)) \\ C_C &= \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 T_2) \dot{x}_0 - \frac{2}{\omega_0} \cos(\omega_0 T_2) \dot{y}_0 \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{a}{\omega_0} \sin(\omega_0 (T_2 - T_1) - \theta_0) (T_2 - T_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 (T_2 - T_1) + \theta_0) (\cos(\omega_0 T_2) \sin(\omega_0 T_2) - \cos(\omega_0 T_1) \sin(\omega_0 T_1)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 (T_2 - T_1) + \theta_0) (\sin^2(\omega_0 T_2) - \sin^2(\omega_0 T_1)) \\ C_D &= -\frac{2}{\omega_0} \dot{x}_0 - 3T_2 \dot{y}_0 \\ &\quad - 3 \frac{a}{\omega_0} \{ \cos(\theta_0 - \omega_0 T_2) - \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1) \} (T_2 - T_1) \\ &\quad + 5 \frac{a}{\omega_0^2} \{ \sin(\theta_0 - \omega_0 T_2) - \sin(\theta_0 - \omega_0 T_1) \} \\ &\quad + 3 \frac{a}{\omega_0} \{ T_2 \cos(\theta_0 - \omega_0 T_2) - T_1 \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1) \} \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

これを式 (4.2.43) から式 (4.2.46) に代入し, 整理することで第3区間の解析解を得る.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + \frac{2}{\omega_0} \{1 - \cos(\omega_0 t)\} \dot{y}_0 \\
&\quad + a \frac{2}{\omega_0^2} \{\cos(\theta_0 - \omega_0 T_2) - \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1)\} \\
&\quad + \frac{3}{2} \frac{a}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - T_1) - \theta_0)(T_2 - T_1) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0^2} \sin(\omega_0(t - T_1) + \theta_0)(\cos(\omega_0 T_2) \sin(\omega_0 T_2) - \cos(\omega_0 T_1) \sin(\omega_0 T_1)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_0^2} \cos(\omega_0(t - T_1) + \theta_0)(\sin^2(\omega_0 T_2) - \sin^2(\omega_0 T_1)) \\
y &= \frac{2}{\omega_0} \{\cos(\omega_0 t) - 1\} \dot{x}_0 + \left\{ -3t + \frac{4}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right\} \dot{y}_0 \\
&\quad - a \frac{3}{\omega_0} \{\cos(\theta_0 - \omega_0 T_2) - \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1)\} (t - T_1) \\
&\quad + a \frac{3}{\omega_0} \{T_2 \cos(\theta_0 - \omega_0 T_2) - T_1 \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1)\} \\
&\quad + a \frac{5}{\omega_0^2} \{\sin(\theta_0 - \omega_0 T_2) - \sin(\theta_0 - \omega_0 T_1)\} \\
&\quad + a \frac{3}{\omega_0} \cos(\omega_0(t - T_1) - \theta_0)(T_2 - T_1) \\
&\quad - a \frac{1}{\omega_0^2} \cos(\omega_0(t - T_1) + \theta_0)(\cos(\omega_0 T_2) \sin(\omega_0 T_2) - \cos(\omega_0 T_1) \sin(\omega_0 T_1)) \\
&\quad - a \frac{1}{\omega_0^2} \sin(\omega_0(t - T_1) + \theta_0)(\sin^2(\omega_0 T_2) - \sin^2(\omega_0 T_1)) \\
\dot{x} &= \cos(\omega_0 t) \dot{x}_0 + 2 \sin(\omega_0 t) \dot{y}_0 \\
&\quad + a \frac{3}{2} \cos(\omega_0(t - T_1) - \theta_0)(T_2 - T_1) \\
&\quad - a \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0(t - T_1) + \theta_0)(\cos(\omega_0 T_2) \sin(\omega_0 T_2) - \cos(\omega_0 T_1) \sin(\omega_0 T_1)) \\
&\quad - a \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - T_1) + \theta_0)(\sin^2(\omega_0 T_2) - \sin^2(\omega_0 T_1)) \\
\dot{y} &= -2 \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + \{-3 + 4 \cos(\omega_0 t)\} \dot{y}_0 \\
&\quad - a \frac{3}{\omega_0} \{\cos(\theta_0 - \omega_0 T_2) - \cos(\theta_0 - \omega_0 T_1)\} \\
&\quad - a 3 \sin(\omega_0(t - T_1) - \theta_0)(T_2 - T_1) \\
&\quad + a \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - T_1) + \theta_0)(\cos(\omega_0 T_2) \sin(\omega_0 T_2) - \cos(\omega_0 T_1) \sin(\omega_0 T_1)) \\
&\quad - a \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0(t - T_1) + \theta_0)(\sin^2(\omega_0 T_2) - \sin^2(\omega_0 T_1))
\end{aligned} \tag{4.2.56}$$

$\omega_0 \neq k$ の場合

式 (4.2.51) から式 (4.2.54) に $\omega_0 \neq k$ の場合の第2区間における解析解を代入し，整理した結果を以下に示す．

$$\begin{aligned}
C_A &= \dot{y}_0 \\
&\quad + \frac{a}{k} \{ \cos(\theta_0 - kT_2) - \cos(\theta_0 - kT_1) \} \\
C_B &= \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 T_2) \dot{x}_0 + \frac{2}{\omega_0} \sin(\omega_0 T_2) \dot{y}_0 \\
&\quad + \frac{a}{\omega_0} \frac{1}{\omega_0^2 - k^2} (k + 2\omega_0) \{ \cos(\omega_0 T_1) \sin(\theta_0 - kT_2) - \cos(\omega_0 (2T_1 - T_2)) \sin(\theta_0 - kT_1) \} \\
&\quad + \frac{a}{\omega_0} \frac{1}{\omega_0^2 - k^2} (2k + \omega_0) \{ \sin(\omega_0 T_1) \cos(\theta_0 - kT_2) - \sin(\omega_0 (2T_1 - T_2)) \cos(\theta_0 - kT_1) \} \\
C_C &= \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 T_2) \dot{x}_0 - \frac{2}{\omega_0} \cos(\omega_0 T_2) \dot{y}_0 \\
&\quad + \frac{a}{\omega_0} \frac{1}{\omega_0^2 - k^2} (k + 2\omega_0) \{ -\sin(\omega_0 T_1) \sin(\theta_0 - kT_2) + \sin(\omega_0 (2T_1 - T_2)) \sin(\theta_0 - kT_1) \} \\
&\quad + \frac{a}{\omega_0} \frac{1}{\omega_0^2 - k^2} (2k + \omega_0) \{ \cos(\omega_0 T_1) \cos(\theta_0 - kT_2) - \cos(\omega_0 (2T_1 - T_2)) \cos(\theta_0 - kT_1) \} \\
C_D &= -\frac{2}{\omega_0} \dot{x}_0 - 3T_2 \dot{y}_0 \\
&\quad - 3\frac{a}{k} (\cos(\theta_0 - kT_2) - \cos(\theta_0 - kT_1)) (T_2 - T_1) \\
&\quad + \left(\frac{2a}{k\omega_0} + \frac{3a}{k^2} \right) (\sin(\theta_0 - kT_2) - \sin(\theta_0 - kT_1)) + \frac{3a}{k} (T_2 \cos(\theta_0 - kT_2) - T_1 \cos(\theta_0 - kT_1))
\end{aligned} \tag{4.2.57}$$

これを式 (4.2.43) から式 (4.2.46) に代入し、整理することで第3区間の解析解を得る。

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + \frac{2}{\omega_0} \{1 - \cos(\omega_0 t)\} \dot{y}_0 \\
&+ a \frac{2}{\omega_0 k} \{\cos(\theta_0 - kT_2) - \cos(\theta_0 - kT_1)\} \\
&+ a \frac{k + 2\omega_0}{\omega_0(\omega_0^2 - k^2)} [\sin(\omega_0(t - (T_2 + T_1))) \sin(\theta_0 - kT_2) - \sin(\omega_0(t - 2T_1)) \sin(\theta_0 - kT_1)] \\
&+ a \frac{2k + \omega_0}{\omega_0(\omega_0^2 - k^2)} [\cos(\omega_0(t - (T_2 + T_1))) \cos(\theta_0 - kT_2) - \cos(\omega_0(t - 2T_1)) \cos(\theta_0 - kT_1)] \\
y &= \frac{2}{\omega_0} \{\cos(\omega_0 t) - 1\} \dot{x}_0 + \left\{-3t + \frac{4}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)\right\} \dot{y}_0 \\
&- a \frac{3}{k} \{\cos(\theta_0 - kT_2) - \cos(\theta_0 - kT_1)\} (t - T_1) \\
&+ a \frac{3}{k} \{T_2 \cos(\theta_0 - kT_2) - T_1 \cos(\theta_0 - kT_1)\} \\
&+ a \left(\frac{2}{k\omega_0} + \frac{3}{k^2}\right) \{\sin(\theta_0 - kT_2) - \sin(\theta_0 - kT_1)\} \\
&+ a \frac{2(k + 2\omega_0)}{\omega_0(\omega_0^2 - k^2)} [\cos(\omega_0(t - (T_2 + T_1))) \sin(\theta_0 - kT_2) - \cos(\omega_0(t - 2T_1)) \sin(\theta_0 - kT_1)] \\
&+ a \frac{2(2k + \omega_0)}{\omega_0(\omega_0^2 - k^2)} [-\sin(\omega_0(t - (T_2 + T_1))) \cos(\theta_0 - kT_2) + \sin(\omega_0(t - 2T_1)) \cos(\theta_0 - kT_1)] \\
\dot{x} &= \cos(\omega_0 t) \dot{x}_0 + 2 \sin(\omega_0 t) \dot{y}_0 \\
&+ a \frac{k + 2\omega_0}{\omega_0^2 - k^2} [\cos(\omega_0(t - (T_2 + T_1))) \sin(\theta_0 - kT_2) - \cos(\omega_0(t - 2T_1)) \sin(\theta_0 - kT_1)] \\
&+ a \frac{2k + \omega_0}{\omega_0^2 - k^2} [-\sin(\omega_0(t - (T_2 + T_1))) \cos(\theta_0 - kT_2) + \sin(\omega_0(t - 2T_1)) \cos(\theta_0 - kT_1)] \\
\dot{y} &= -2 \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + \{-3 + 4 \cos(\omega_0 t)\} \dot{y}_0 \\
&- 3 \frac{a}{k} \{\cos(\theta_0 - kT_2) - \cos(\theta_0 - kT_1)\} \\
&- a \frac{2(k + 2\omega_0)}{\omega_0^2 - k^2} [\sin(\omega_0(t - (T_2 + T_1))) \sin(\theta_0 - kT_2) - \sin(\omega_0(t - 2T_1)) \sin(\theta_0 - kT_1)] \\
&- a \frac{2(2k + \omega_0)}{\omega_0^2 - k^2} [\cos(\omega_0(t - (T_2 + T_1))) \cos(\theta_0 - kT_2) - \cos(\omega_0(t - 2T_1)) \cos(\theta_0 - kT_1)]
\end{aligned} \tag{4.2.58}$$

4.2.4 再帰条件

基本的にはフルスラストの場合と同様になる。まず、第3区間における解析解を下記のように簡略表記する。

$$x(\omega_0, a, k, \theta_0, T_1, T_2, t, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = A_x(\omega_0, t) \dot{x}_0 + B_x(\omega_0, t) \dot{y}_0 + a C_x(\omega_0, k, \theta_0, T_1, T_2, t) \tag{4.2.59}$$

$$y(\omega_0, a, k, \theta_0, T_1, T_2, t, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = A_y(\omega_0, t) \dot{x}_0 + B_y(\omega_0, t) \dot{y}_0 + a C_y(\omega_0, k, \theta_0, T_1, T_2, t) \tag{4.2.60}$$

終端条件として、ある時刻 t で原点にいることが要求されるため、

$$0 = A_x(\omega_0, t) \dot{x}_0 + B_x(\omega_0, t) \dot{y}_0 + a C_x(\omega_0, k, \theta_0, T_1, T_2, t) \tag{4.2.61}$$

$$0 = A_y(\omega_0, t) \dot{x}_0 + B_y(\omega_0, t) \dot{y}_0 + a C_y(\omega_0, k, \theta_0, T_1, T_2, t) \tag{4.2.62}$$

を満たす必要がある。最も解きやすい \dot{x}_0 と \dot{y}_0 について解くことで、

$$\dot{x}_0 = -a \frac{B_x C_y - B_y C_x}{A_x B_y - A_y B_x} \tag{4.2.63}$$

$$\dot{y}_0 = a \frac{A_x C_y - A_y C_x}{A_x B_y - A_y B_x} \tag{4.2.64}$$

式(4.2.63)と式(4.2.64)を用いることで、 $(\omega_0, a, k, \theta_0, T_1, T_2, t)$ を一組決めた際に、ある時刻 t で地球（原点）と再会合するために必要な \dot{x}_0 と \dot{y}_0 が求められる。

4.3 検証

第2.2.5項で示した、コースティングの間にスラスト区間を2つ含むVILMの最適解を、シングルスラスト解析解でどの程度再現できているか評価する。

4.3.1 シングルスラスト解析解によるDCNLPマルチスラスト最適解の再現

解析解生成手法

フルスラストの場合と同様に、前節の「再帰条件」の項で示したように、 $(\omega_0, a, k, \theta_0, T_1, T_2, t)$ は自由に値を決めることができるが、初速度 (\dot{x}_0, \dot{y}_0) は自由に値を決める事ができず、 $(\omega_0, a, k, \theta_0, T_1, T_2, t)$ に寄って一意に値が決まってしまう。そこで、 (a, t) は、DCNLPの最適解と値を合わせ、 (k, θ_0, T_1, T_2) の値を様々にふることで網羅的に軌道の解析を行い、その中から最もDCNLPの最適解の初速度と終端速度に近い解を抽出する。

具体的には、

ω_0	地球の角速度 ($2\pi / (365.256363004 \times 24 \times 60 \times 60)$ [rad/sec])
a	5.6×10^{-5} [m/sec ²] (= 40mN/500kg \times 70%)
k	$0:0.026:2 \times \omega_0$ [rad/sec]
θ_0	$0:3:360$ [deg]
T_1	1:1:33 (全ノード)
T_2	1:1:33 (全ノード)
t	404.69 [day]

のように値を決める、あるいは振っている。ただし、 $T_1 > T_2$ 等の前提とおかしなシチュエーションになってしまう部分は除いている。

解の抽出

網羅的な軌道の解析を行い、抽出した解（最もDCNLPの初速度と終端速度に近い解）を以下に示す。

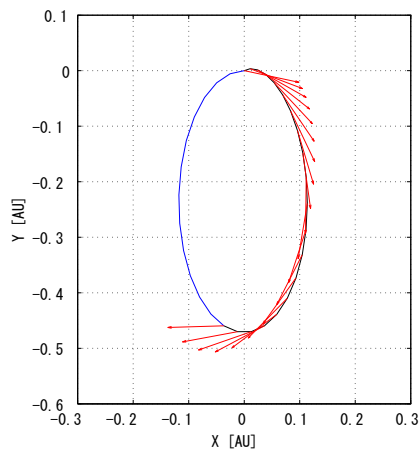


図 4.3.1 軌道図 (Hill 座標系)

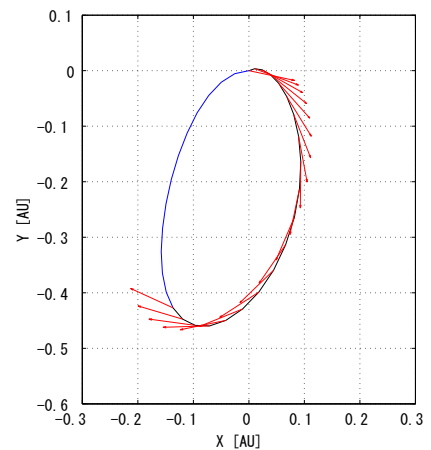


図 4.3.2 軌道図 (回転座標系)

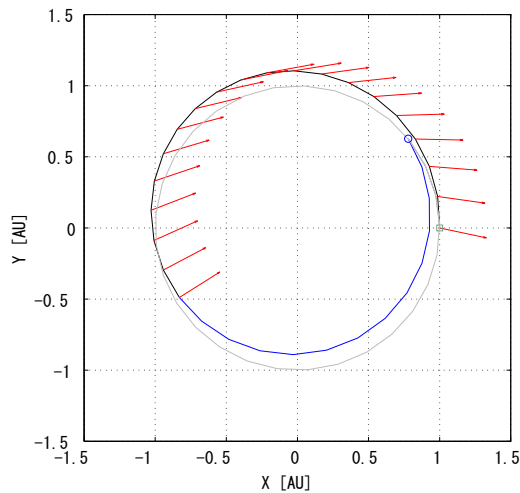


図 4.3.3 軌道図 (慣性座標系)

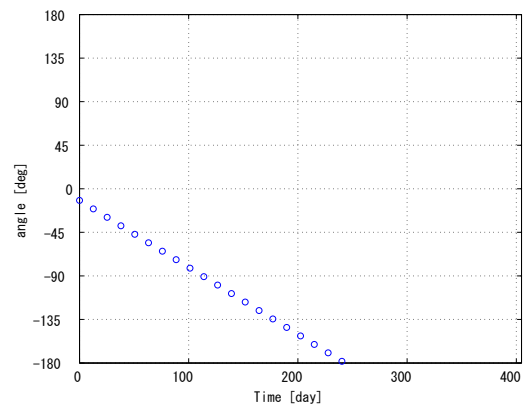


図 4.3.4 Steering Angle (Hill 座標系)

表 4.3.1 各種値

項目	値
効率	1.719
初期無限遠速度	1501.40 [m/sec]
終端無限遠速度	3499.83 [m/sec]
増速量	1162.60 [m/sec]
ToF	404.69 [day]
初期重量	500 [kg]
消費燃料	15.35 [kg]
k/ω_0	0.702
θ_0	348 [deg]
T1	0 [day]
T2	240.2869 [day]

図 4.3.1 から図 4.3.4 までの見方は，第 3.3.3 項の「フルスラストの解析解」で示した図 3.3.13 から図 3.3.16 までと同様の見方になる。

解析解自体は，「コースティング スラスト コースティング」も可能であるが，抽出された解としては，打ち上げ直後（はじめのノード）からスラストする解を得た．それにより，全体では「スラスト コースティング」のプロファイルとなっている．ターゲットとする VILM は，遠点付近と近点付近で 2 回のスラストを含む VILM であるが，それを 1 つのスラストで再現しようとしたため，近日点付近のスラストを補うように遠日点付近でのスラスト区間が長くなっている．

4.3.2 解の比較

第 2.2.5 項で示した DCNLP による最適解と第 4.3.1 項で示したフルスラストの解析解を比較する．フルスラストで行った解の比較と同様，「SPE 角，地球探査機距離，太陽探査機距離」と「推力の大きさ，Steering Angle」で位置と推力を評価する．以下に比較結果を示す．

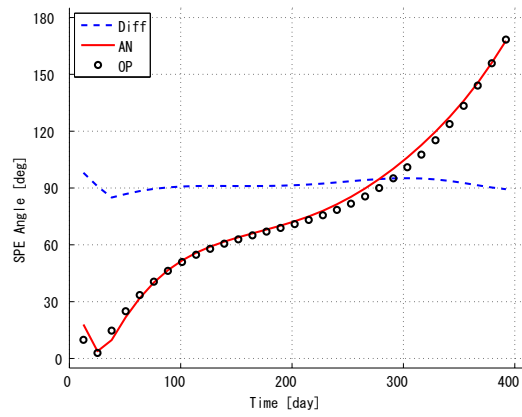


図 4.3.5 SPE 角

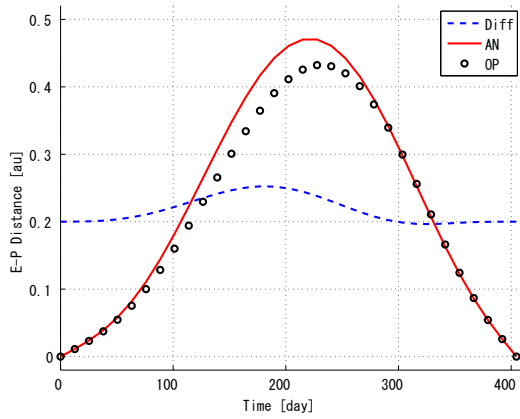


図 4.3.6 地球探査機距離

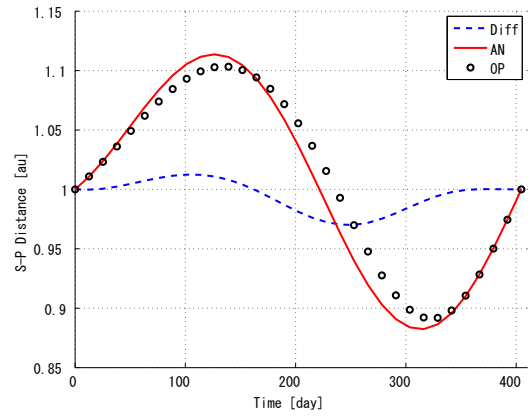


図 4.3.7 太陽探査機距離

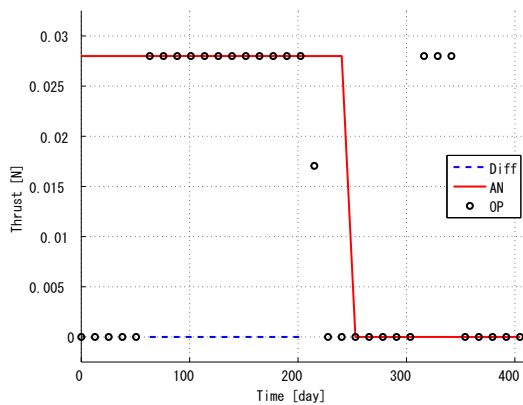


図 4.3.8 推力履歴 (回転座標系 × Hill 座標系)

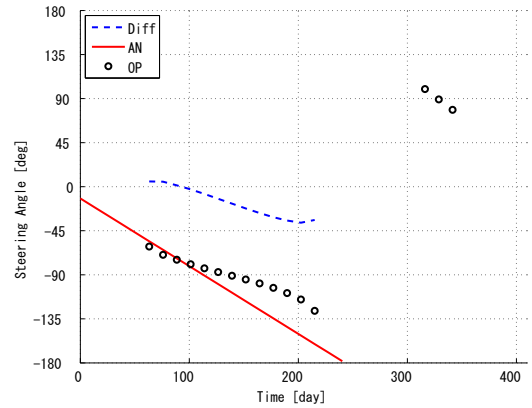


図 4.3.9 Steering Angle (慣性座標系 × Hill 座標系)

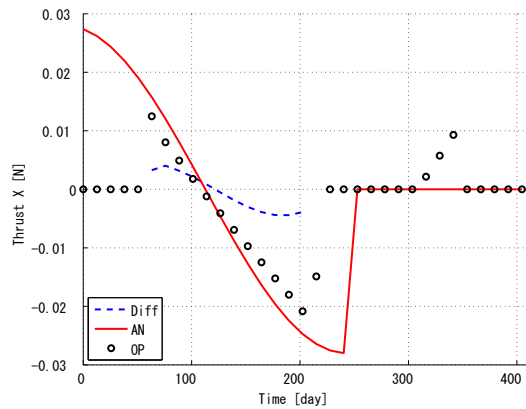


図 4.3.10 推力履歴 X 成分 (回転座標系 × Hill 座標系)

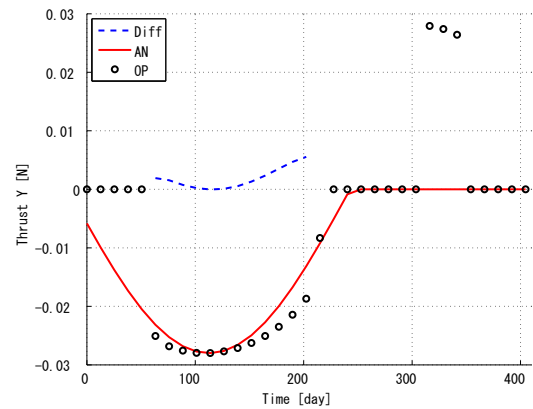


図 4.3.11 推力履歴 Y 成分 (回転座標系 × Hill 座標系)

表 4.3.2 値の比較 1

項目	差分の平均値	差分の最大
地球探査機距離 [au]	0.0179	0.0524
太陽探査機距離 [au]	0.0103	0.0299
SPE 角 [deg]	2.5060	8.0670

表 4.3.3 値の比較 2

項目	差分の平均値	差分の最大
推力 (norm) [mN]	1.1×10^{-13}	2.8×10^{-13}
推力 (X 成分) [mN]	2.9506	4.4199
推力 (Y 成分) [mN]	1.8765	5.5552
Steering Angle [deg]	18.2560	36.7804

表 4.3.4 各種値

項目	DCNLP 最適解	シングルスラスト解析解
効率	2.069	1.719
初期無限遠速度	1500.00 [m/sec]	1501.40 [m/sec]
終端無限遠速度	3500.00 [m/sec]	3499.83 [m/sec]
増速量	966.6 [m/sec]	1162.60 [m/sec]
ToF	404.69 [day]	404.69 [day]
初期重量	500 [kg]	500 [kg]
消費燃料	12.80 [kg]	15.35 [kg]
k/ω_0	-	0.702
θ_0	-	348 [deg]
T1	-	0 [day]
T2	-	240.2869 [day]

図 4.3.5 から図 4.3.11 までの見方は、第 3.3 節の図 3.3.17 から図 3.3.23 までの見方と基本的には同様である。また、表についても基本的には同様である。ただ、最適解と解析解の差分の計算は、「最適解と解析解が互いに存在する」区間でしか行っていない。位置に関しては全体に渡って差分を計算しているが、推力は前半（遠日点付近）の一部分でしか差分を計算していない。

以下の記述において、「フルスラスト」と記述した場合には、第 3.3.3 項「フルスラスト解析解による DCNLP マルチスラスト最適解の再現」で示したフルスラスト解のことを指すことに注意する。まず、位置に関してはフルスラスト

トの場合よりも苦しい結果となっている。SPE 角に関してはフルスラストの場合よりも改善しているが、距離のズレはそれぞれ 2 倍程度大きくなってしまっている。

次に、推力に関しては、表 4.3.3 に示す値は、全体的にかなり良く改善する結果となった。シングルスラストとは言え、コースティング区間を含められるようになった効果が大きく出る結果となった。ただし、差分を計算する区間が、「最適解と解析解がお互いに存在する」区間でのみの比較となっていることに再度注意する。

また、消費燃料としては、12.80kg から 20 パーセント程度増加した 15.35kg となった。近日点でスラストが行えない分、遠日点付近での効率の悪い余分なスラストが増え、最適解よりも多めに燃料を消費してしまったものと思われる。しかし、フルスラストの場合は 100 パーセント程度の増加（つまり、2 倍の値）になっていたことと比較すれば、遥かに改善する結果となった。

以上より、フルスラスト解析解よりもシングルスラスト解析解の方が、効率や消費燃料が激的に DCNLP 最適解に近くなる結果が示された。システム解析等で用いる場合には、図 4.3.5 から表 4.3.4 に示した程度のズレがあることを念頭において検討を進めると良い。

第 5 章

Multi Thrust

「任意のスラスト区間とコースティング区間を含む VILM」(以下,「マルチスラスト」とも称す)の軌道生成法を説明し, DCNLP を用いた数値最適化による解と比較することで得られた解の検証を行う。フルスラストとシングルスラストではしっかりとした解析解を示していたが, マルチスラストではしっかりとした解析解を示さない。説明する理論上は解析解を導くことができるが, 大変に解が長くなってしまいうからである。具体的な手法としては, 今までと同様に「各区間の解を境界条件で接続する」ことでマルチスラストの軌道を求める。ここではシングルスラストで導いた解析解を用いる。シングルスラストの解析解は, フルスラストの場合, コースティングのみの場合, コースティングとスラストを両方含む場合の全てのパターンを網羅しているため, 大変便利な解である。プログラム上では, 第 1 スラストの第 3 区間の終端条件を第 2 スラストの第 1 区間の初期条件として, 数値的に代入している。

数値的な運動方程式の接続により, マルチスラストを表現できるようになった。このマルチスラストの数値的解析解は, フルスラストやシングルスラストの場合と同様に, 初速度と終端速度を自由に決めることができない。そのため, ここでも網羅的な軌道の解析に頼りたいところではあるが, マルチスラストの数値的解析解の入力引数(設定パラメータ)が多いため, 変数全てを単純に振ることができない。そのため, GA などを用いて最適化を行うべきところであるが, 今回は研究に残された時間の関係上諦めさせていただく。その代わりに, ここでは多すぎる設定パラメータを天下り的に減らし, 部分的に網羅的な解の探索を行う。

第 2.2.4 項と第 2.2.5 項で示した, フルスラスト最適解とシングルスラスト最適解, 両方の場合でマルチスラスト解析解との比較を行う。結果としては, どちらについてもフルスラスト解析解とシングルスラスト解析解よりもより良く最適解を再現する結果となった。

5.1 方法

この節では, 「コースティング スラスト コースティング スラスト コースティング」と言った, コースティングを挟んで複数回のスラストを行う場合の問題の扱い方を説明する。今回も手法自体は至って簡単であり, 前章までに導いた「コースティング スラスト コースティング」の解析解を連結することによって実現する。具体的には, 「コースティング(第 1 スラスト, 第 1 区間) スラスト(第 1 スラスト, 第 2 区間) コースティング(第 1 スラスト, 第 3 区間)」この終端を初期条件とし, 「コースティング(第 2 スラスト, 第 1 区間) スラスト(第 2 スラスト, 第 2 区間) コースティング(第 2 スラスト, 第 3 区間)」のようにする。

理論上は, 解析解を接続していくことで任意回数のスラスト区間を含めることが可能だが, 1 年同期の EDVEGA では 2 回, 1.4 年同期の EDVEGA では 2 回から 3 回のスラスト区間を含むことが一般的である。そこで, 本章では 2 回のスラスト区間を含むことを想定し, 再現を行う。以降では, 一度目の「コースティング スラスト コースティング」を「第 1 スラスト」と呼び, 二度目の「コースティング スラスト コースティング」を第 2 スラストと呼ぶ。

前章で導いた解析解は, 初期条件として, 初期位置原点, 初速度 \dot{x}_0, \dot{y}_0 として導いた解析解であった。次節以降で

は，第2スラストでは初期位置が原点とは異なるため，初期位置 x_0, y_0 の場合における定式化を行う．また，再帰条件に関しても再度検討を行う．

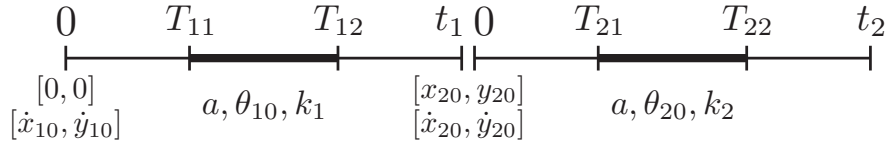


図 5.1.1 運動の概略図

5.2 求解

5.2.1 初期位置を考慮した解析解

初期位置を考慮した場合の解析解を導く．前章で示した解を見ればわかるが，初期条件の項は原則的にどこの区間でも同じになり，また他の項との干渉もない．そこで，本項では第1区間のみで初期位置を考慮した解析解を導き，初期位置に関する項を他の区間にも移植することで「初期位置を考慮した解析解」を導く．第1区間の一般解は，

$$x = \frac{2}{\omega_0} C_A + C_B \sin(\omega_0 t) + C_C \cos(\omega_0 t) \quad (5.2.1)$$

$$y = -3C_A t + 2C_B \cos(\omega_0 t) - 2C_C \sin(\omega_0 t) + C_D \quad (5.2.2)$$

$$\dot{x} = \omega_0 C_B \cos(\omega_0 t) - \omega_0 C_C \sin(\omega_0 t) \quad (5.2.3)$$

$$\dot{y} = -3C_A - 2\omega_0 C_B \sin(\omega_0 t) - 2\omega_0 C_C \cos(\omega_0 t) \quad (5.2.4)$$

であった．初期条件を $(x(0) = x_0, y(0) = y_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0)$ としたとき，

$$C_A = \dot{y}_0 + 2\omega_0 x_0 \quad (5.2.5)$$

$$C_B = \frac{1}{\omega_0} \dot{x}_0 \quad (5.2.6)$$

$$C_C = -\frac{2}{\omega_0} \dot{y}_0 - 3x_0 \quad (5.2.7)$$

$$C_D = -\frac{2}{\omega_0} \dot{x}_0 + y_0 \quad (5.2.8)$$

となる．従って，第1区間の解析解として，

$$x = (4 - 3 \cos(\omega_0 t)) x_0 + \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + \frac{2}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)) \dot{y}_0 \quad (5.2.9)$$

$$y = 6(\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t) x_0 + y_0 - \frac{2}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)) \dot{x}_0 + \left(-3t + \frac{4}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)\right) \dot{y}_0 \quad (5.2.10)$$

$$\dot{x} = 3\omega_0 \sin(\omega_0 t) x_0 + \cos(\omega_0 t) \dot{x}_0 + 2 \sin(\omega_0 t) \dot{y}_0 \quad (5.2.11)$$

$$\dot{y} = 6\omega_0 (\cos(\omega_0 t) - 1) x_0 - 2 \sin(\omega_0 t) \dot{x}_0 + (-3 + 4 \cos(\omega_0 t)) \dot{y}_0 \quad (5.2.12)$$

を得る．この解の中で，下記に示す初期位置に関する項だけを他の区間の解析解にも加えることで，他の区間においても初期位置を考慮した解析解を得ることができる．

$$x \quad (4 - 3 \cos(\omega_0 t)) x_0$$

$$y \quad 6(\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t) x_0 + y_0$$

$$\dot{x} \quad 3\omega_0 \sin(\omega_0 t) x_0$$

$$\dot{y} \quad 6\omega_0 (\cos(\omega_0 t) - 1) x_0$$

5.2.2 再帰条件

基本的には、フルスラスト、シングルスラストの場合と同様になる。まず、第 1 スラスト第 3 区間における解析解と第 2 スラスト第 3 区間における解析解を下記のように簡略表記する。

● 第 1 スラスト第 3 区間

$$\begin{aligned}
 x_1(\omega_0, a, k_1, \theta_{10}, T_{11}, T_{12}, t_1, \dot{x}_{10}, \dot{y}_{10}) &= \\
 &A_{1x}(\omega_0, t_1)\dot{x}_{10} + B_{1x}(\omega_0, t_1)\dot{y}_{10} + aC_{1x}(\omega_0, k_1, \theta_{10}, T_{11}, T_{12}, t_1) \\
 y_1(\omega_0, a, k_1, \theta_{10}, T_{11}, T_{12}, t_1, \dot{x}_{10}, \dot{y}_{10}) &= \\
 &A_{1y}(\omega_0, t_1)\dot{x}_{10} + B_{1y}(\omega_0, t_1)\dot{y}_{10} + aC_{1y}(\omega_0, k_1, \theta_{10}, T_{11}, T_{12}, t_1) \\
 \dot{x}_1(\omega_0, a, k_1, \theta_{10}, T_{11}, T_{12}, t_1, \dot{x}_{10}, \dot{y}_{10}) &= \\
 &A'_{1x}(\omega_0, t_1)\dot{x}_{10} + B'_{1x}(\omega_0, t_1)\dot{y}_{10} + aC'_{1x}(\omega_0, k_1, \theta_{10}, T_{11}, T_{12}, t_1) \\
 \dot{y}_1(\omega_0, a, k_1, \theta_{10}, T_{11}, T_{12}, t_1, \dot{x}_{10}, \dot{y}_{10}) &= \\
 &A'_{1y}(\omega_0, t_1)\dot{x}_{10} + B'_{1y}(\omega_0, t_1)\dot{y}_{10} + aC'_{1y}(\omega_0, k_1, \theta_{10}, T_{11}, T_{12}, t_1)
 \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

● 第 2 スラスト第 3 区間

$$\begin{aligned}
 x_2(\omega_0, a, k_2, \theta_{20}, T_{21}, T_{22}, t_2, x_{20}, \dot{x}_{20}, \dot{y}_{20}) &= \\
 &D_{2x}(\omega_0, t_2)x_{20} + A_{2x}(\omega_0, t_2)\dot{x}_{20} + B_{2x}(\omega_0, t_2)\dot{y}_{20} + aC_{2x}(\omega_0, k_2, \theta_{20}, T_{21}, T_{22}, t_2) \\
 y_2(\omega_0, a, k_2, \theta_{20}, T_{21}, T_{22}, t_2, x_{20}, y_{20}, \dot{x}_{20}, \dot{y}_{20}) &= \\
 &D_{2y}(\omega_0, t_2)x_{20} + y_{20} + A_{2y}(\omega_0, t_2)\dot{x}_{20} + B_{2y}(\omega_0, t_2)\dot{y}_{20} + aC_{2y}(\omega_0, k_2, \theta_{20}, T_{21}, T_{22}, t_2)
 \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

第 2 スラスト第 3 区間の終端条件として、ある時刻 t で原点にいることが要求されるため、

$$0 = D_{2x}(\omega_0, t_2)x_{20} + A_{2x}(\omega_0, t_2)\dot{x}_{20} + B_{2x}(\omega_0, t_2)\dot{y}_{20} + aC_{2x}(\omega_0, k_2, \theta_{20}, T_{21}, T_{22}, t_2) \tag{5.2.15}$$

$$0 = D_{2y}(\omega_0, t_2)x_{20} + y_{20} + A_{2y}(\omega_0, t_2)\dot{x}_{20} + B_{2y}(\omega_0, t_2)\dot{y}_{20} + aC_{2y}(\omega_0, k_2, \theta_{20}, T_{21}, T_{22}, t_2) \tag{5.2.16}$$

を満たす必要がある。ここで、第 2 スラスト第 3 区間の初期条件 ($x_{20}, y_{20}, \dot{x}_{20}, \dot{y}_{20}$) に第 1 スラスト第 3 区間の終端での位置と速度を代入し整理すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 0 &= [D_{2x}A_{1x} + A_{2x}A'_{1x} + B_{2x}A'_{1y}] \dot{x}_{10} \\
 &\quad + [D_{2x}B_{1x} + A_{2x}B'_{1x} + B_{2x}B'_{1y}] \dot{y}_{10} \\
 &\quad + a [D_{2x}C_{1x} + A_{2x}C'_{1x} + B_{2x}C'_{1y} + C_{2x}] \\
 0 &= [D_{2y}A_{1x} + A_{1y} + A_{2y}A'_{1x} + B_{2y}A'_{1y}] \dot{x}_{10} \\
 &\quad + [D_{2y}B_{1x} + B_{1y} + A_{2y}B'_{1x} + B_{2y}B'_{1y}] \dot{y}_{10} \\
 &\quad + a [D_{2y}C_{1x} + C_{1y} + A_{2y}C'_{1x} + B_{2y}C'_{1y} + C_{2y}]
 \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

\dot{x}_0 と \dot{y}_0 について解くことで、

$$\dot{x}_{10} = \frac{a(\gamma_x\beta_y - \gamma_y\beta_x)}{\beta_x\alpha_y - \beta_y\alpha_x} \tag{5.2.18}$$

$$\dot{y}_{10} = -\frac{a(\gamma_x\alpha_y - \gamma_y\alpha_x)}{\beta_x\alpha_y - \beta_y\alpha_x} \tag{5.2.19}$$

を得る．ただし，

$$\alpha_x = D_{2x}A_{1x} + A_{2x}A'_{1x} + B_{2x}A'_{1y} \quad (5.2.20)$$

$$\beta_x = D_{2x}B_{1x} + A_{2x}B'_{1x} + B_{2x}B'_{1y} \quad (5.2.21)$$

$$\gamma_x = D_{2x}C_{1x} + A_{2x}C'_{1x} + B_{2x}C'_{1y} + C_{2x} \quad (5.2.22)$$

$$\alpha_y = D_{2y}A_{1x} + A_{1y} + A_{2y}A'_{1x} + B_{2y}A'_{1y} \quad (5.2.23)$$

$$\beta_y = D_{2y}B_{1x} + B_{1y} + A_{2y}B'_{1x} + B_{2y}B'_{1y} \quad (5.2.24)$$

$$\gamma_y = D_{2y}C_{1x} + C_{1y} + A_{2y}C'_{1x} + B_{2y}C'_{1y} + C_{2y} \quad (5.2.25)$$

と置いた．式 (5.2.18) と式 (5.2.19) を用いることで， $(\omega_0, a, k_1, \theta_{10}, T_{11}, T_{12}, t_1, k_2, \theta_{20}, T_{21}, T_{22}, t_2)$ を一組決めた際に，ある時刻 t で地球（原点）と再会合するために必要な \dot{x}_{10} と \dot{y}_{10} が求められる．

5.3 検証

第 5.1 節と第 5.2 節で説明した手法を用いて，スラスト区間を 2 つ含む EDVEGA 軌道を設計し，最適解と比較する．しかし，変数が多くなってしまったため，単純にすべての値を振って，網羅的な解析を行うことが難しくなっている．本来ならば，GA などを用いた最適化を行う必要があるところであるが，ここでは天下りの変数の数を減らし，縮めた解空間の中で DCNLP を用いた最適解と比較する．

本節で説明に用いる文字 (T_{11} とか t_1) は，全て図 5.1.1 に対応するものである．

5.3.1 フルスラストの解析解

第 2.2.4 項で示したフルスラストの最適解を，スラスト区間を 2 分割して再現することに試みる．

解析解生成手法

全変数 ($\omega_0, a, k_1, \theta_{10}, T_{11}, T_{12}, t_1, k_2, \theta_{20}, T_{21}, T_{22}, t_2$) の内， $(\omega_0, a, T_{11}, T_{12}, t_1, T_{21}, T_{22}, t_2)$ をこちらから指定する値， $(k_1, \theta_{10}, k_2, \theta_{20})$ を振る値とした．具体的な値を以下に示す．

ω_0 地球の角速度 ($2\pi / (365.256363004 \times 24 \times 60 \times 60)$ [rad/sec])

a 3.5897×10^{-5} [m/sec²] (= 40mN/780kg × 70%)

k_1 0.031:0.031:2 × ω_0 [rad/sec]

θ_{10} 0:9:360 [deg]

T_{11} 1 [ノード]

T_{12} 20 [ノード]

t_1 20 (232.7165[day])

k_2 0.031:0.031:2 × ω_0 [rad/sec]

θ_{20} 0:9:360 [deg]

T_{21} 1 [ノード]

T_{22} 14 [ノード]

t_2 14 (159.2271[day])

フルスラストであるため， T_{11} は時刻 0， T_{12} は t_1 に合わせている．同様に， T_{21} は，第 2 スラストの時刻 0 に合わせ， T_{22} は t_2 に合わせている．第 1 スラストと第 2 スラストが切り替わる時刻 t_1 は，図 3.3.21 や図 3.3.22 参考に ノード 20 (232.7165[day]) とした．

上記の設定内で網羅的に軌道の解析を行い，最も DCNLP の最適解に初速度と終端速度が近かったものを抽出し，以下に示す．

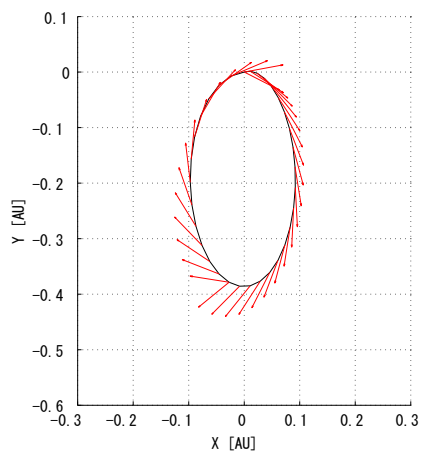


図 5.3.1 軌道図 (Hill 座標系)

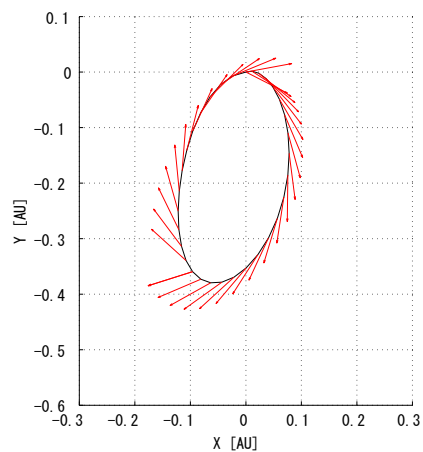


図 5.3.2 軌道図 (回転座標系)

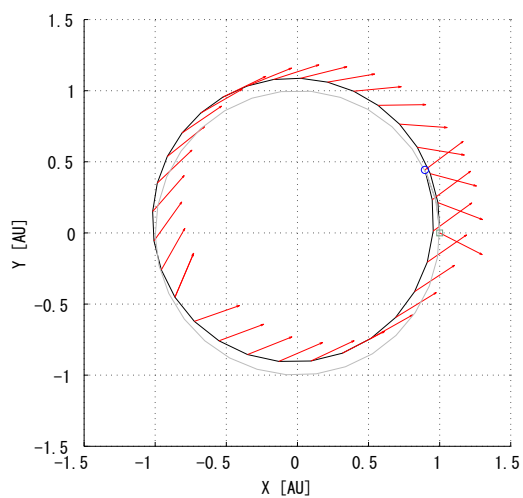


図 5.3.3 軌道図 (慣性座標系)

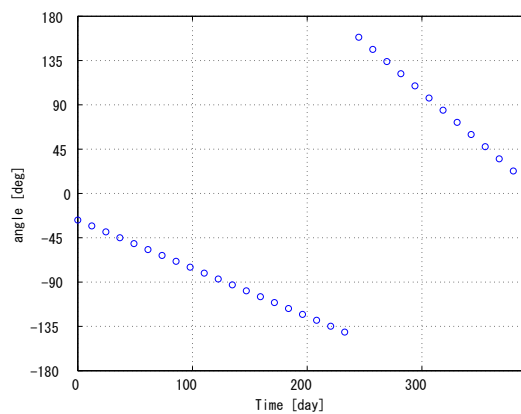


図 5.3.4 Steering Angle (Hill 座標系)

表 5.3.1 値の比較 1

項目	値
効率	1.5815
初期無限遠速度	1534.30 [m/sec]
終端無限遠速度	3456.84 [m/sec]
増速量	1215.61 [m/sec]
ToF	391.94 [day]
初期重量	780 [kg]
消費燃料	25.03 [kg]

表 5.3.2 値の比較 2

項目	値
k_1/ω_0	0.496
θ_{10}	333 [deg]
T_{11}	0 [day]
T_{12}	232.72 [day]
k_2/ω_0	1.023
θ_{20}	171 [deg]
T_{21}	232.72 [day]
T_{22}	391.94 [day]

図 5.3.1 から図 5.3.4 までの見方は、今まで示してきたフルスラストやシングルスラストの場合と同様である。

図 5.3.4 の Steering Angle ではハッキリと現れているが、ノード 20 (232.7165[day]) を境に、第 1 スラストと第 2 スラストが切り替わっている。

5.3.2 解の比較 (フルスラスト)

第 2.2.4 項で示した DCNLP による最適解と第 5.3.1 項で示したフルスラストを 2 区間にわけた解析解の比較を行う。フルスラストやシングルスラストで行った解の比較と同様、「SPE 角、地球探査機距離、太陽探査機距離」と「推力の大きさ、Steering Angle」で位置と推力を評価する。以下に比較結果を示す。

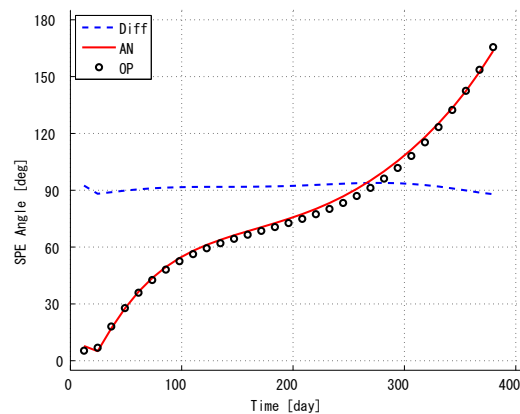


図 5.3.5 SPE 角

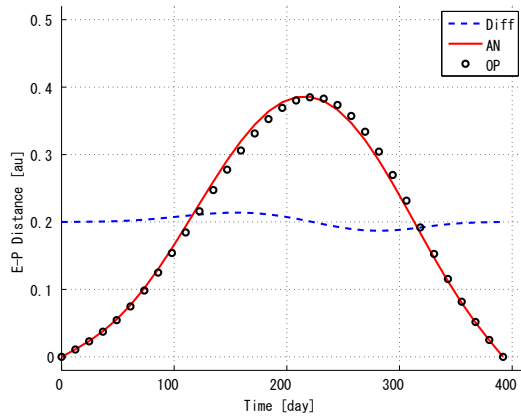


図 5.3.6 地球探査機距離

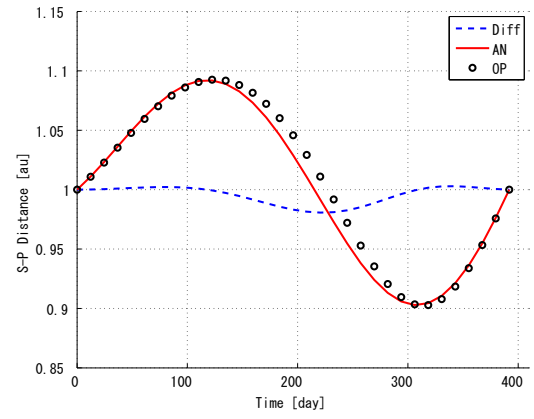


図 5.3.7 太陽探査機距離

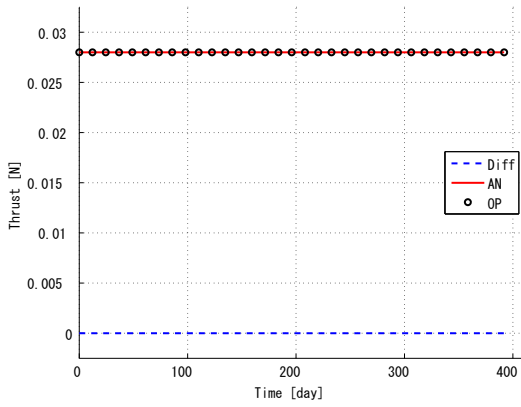


図 5.3.8 推力履歴 (回転座標系 × Hill 座標系)

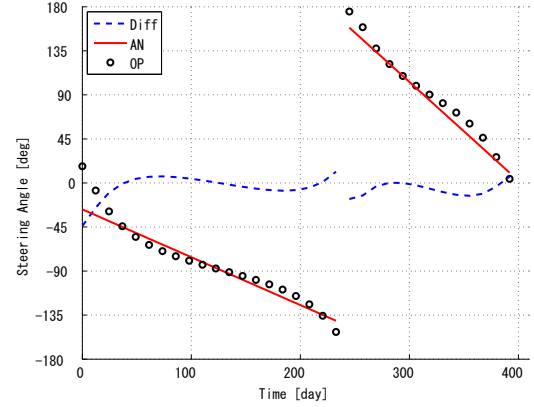


図 5.3.9 Steering Angle (慣性座標系 × Hill 座標系)

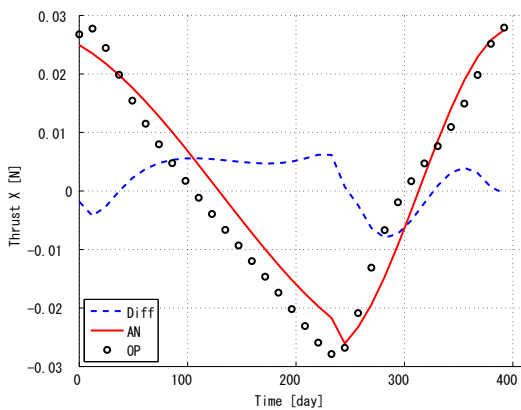


図 5.3.10 推力履歴 X 成分 (回転座標系 × Hill 座標系)

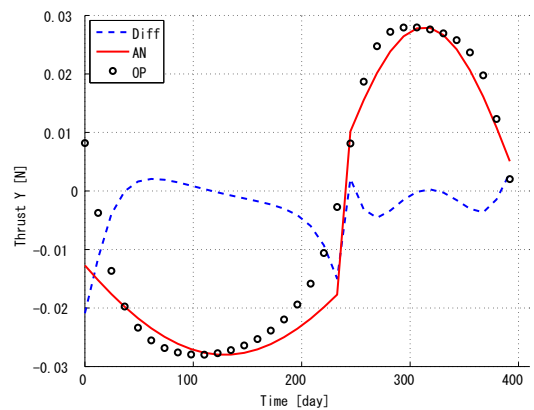


図 5.3.11 推力履歴 Y 成分 (回転座標系 × Hill 座標系)

表 5.3.3 値の比較 1

項目	差分の平均値	差分の最大
地球探査機距離 [au]	0.0063	0.0139
太陽探査機距離 [au]	0.0059	0.0193
SPE 角 [deg]	2.0933	3.8837

表 5.3.4 値の比較 2

項目	差分の平均値	差分の最大
推力 (norm) [mN]	3.4×10^{-4}	3.4×10^{-4}
推力 (X 成分) [mN]	4.0262	7.9926
推力 (Y 成分) [mN]	3.5293	20.8986
Steering Angle [deg]	7.8270	44.0012

表 5.3.5 各種値

項目	DCNLP 最適解	マルチスラスト解析解
効率	1.626	1.5815
初期無限遠速度	1500.00 [m/sec]	1534.30 [m/sec]
終端無限遠速度	3500.00 [m/sec]	3456.84 [m/sec]
増速量	1230.07 [m/sec]	1215.61 [m/sec]
ToF	391.94 [day]	391.94 [day]
初期重量	780 [kg]	780 [kg]
消費燃料	25.32 [kg]	25.03 [kg]

図 5.3.5 から表 5.3.5 までの見方は、シングルスラストの場合と同様である。

結果としては、第 3.3.2 項で示したフルスラストの結果に対し、激的な改善が見られた。そもそも第 3.3.2 項のフルスラストの結果も悪いものではなかったが、それに比較しても改善が見られている。具体的には、全ての数値で良い側に改善が見られている。中でも特筆すべき改善が見られているのが、Steering Angle の改善である。単純なフルスラスト解析解の場合には、平均値の差分で 20.78 度もあったものが、半分以下の 7.83 度まで改善している。この値であれば、システム解析にもある程度信頼して用いれるのではないかと考えられる。

スラスト区間を 2 分割したことで、より忠実に最適解を再現できる結果となった。図 5.3.9 の Steering Angle に見られるように、遠日点付近では Steering Angle の傾きが緩やかになり、近日点付近では Steering Angle の傾きが急になり、しっかりと最適解の真を貫くような結果となっている。また、推力の X 成分と Y 成分に関しても、ノード 20 で適切に位相が切り替わることで、X 成分の V の字状の変化と、Y 成分の矩形波的变化をしっかりと再現する結果となった。

以上の結果より、単純なフルスラストの解析解よりスラスト区間を 2 区間に分割したフルスラストの方が DCNLP による最適解をより良く再現できることが明確に示された。これは、1 年同期の EDVEGA 軌道が遠日点と近日点、軌道上で最も角速度が異なる 2 箇所のポイントでスラスト方向が重要になるからである。

5.3.3 マルチスラストの解析解

第 2.2.5 項で示した一般の場合の EDVEGA 軌道の最適解の再現に試みる。

解析解生成手法

全変数 $(\omega_0, a, k_1, \theta_{10}, T_{11}, T_{12}, t_1, k_2, \theta_{20}, T_{21}, T_{22}, t_2)$ の内, $(\omega_0, a, T_{11}, T_{12}, t_1, T_{21}, T_{22}, t_2)$ をこちらから指定する値, $(k_1, \theta_{10}, k_2, \theta_{20})$ を振る値とした。具体的な値を以下に示す。

ω_0	地球の角速度 $(2\pi / (365.256363004 \times 24 \times 60 \times 60) \text{ [rad/sec]})$
a	$3.5897 \times 10^{-5} \text{ [m/sec}^2\text{]} (= 40\text{mN}/780\text{kg} \times 70\%)$
k_1	$0.3:0.011:0.5 \times \omega_0 \text{ [rad/sec]}$
θ_{10}	$310:1:330 \text{ [deg]}$
T_{11}	4 [ノード] (37.9400 [day])
T_{12}	14 [ノード] (164.4069 [day])
t_1	18 [ノード] (214.9936 [day])
k_2	$0.75:0.011:0.95 \times \omega_0 \text{ [rad/sec]}$
θ_{20}	$175:1:195 \text{ [deg]}$
T_{21}	5 [ノード] (50.5867 [day])
T_{22}	14 [ノード] (126.4668 [day])
t_2	14 [ノード] (189.7002[day])

DCNLP による最適解 (図 2.2.11) から, 遠日点部分のスラストと近日点部分のスラストのそれぞれに対して最小二乗法を実施し, $(k_1, \theta_{10}, k_2, \theta_{20})$ のおよその値を求めた。その値を以下に示す。

k_1	$0.383 \times \omega_0 \text{ [rad/sec]}$
θ_{10}	320.71 [deg]
k_2	$0.849 \times \omega_0 \text{ [rad/sec]}$
θ_{20}	$364.31 \text{ [deg]} \text{ (通しの 1 ノード目から算出)}, 184.38 \text{ [deg]} \text{ (通しの 18 ノード目から算出)}$

これらの値より, $(k_1, \theta_{10}, k_2, \theta_{20})$ の値を振る範囲を定めた。また, T_{11} から T_{22} に関しては, 図 2.2.10 の値を参考にしつつ, 良い解が得られるまで手動で探索を行った。

上記の設定内で網羅的に軌道の解析を行い, 最も DCNLP の最適解に初速度と終端速度が近かったものを抽出し, 以下に示す。

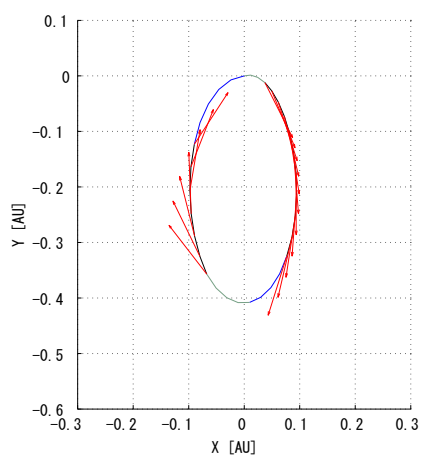


図 5.3.12 軌道図 (Hill 座標系)

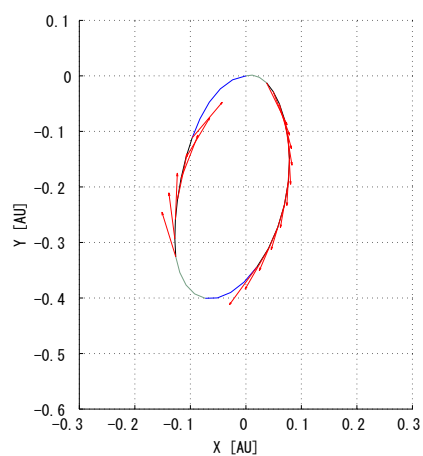


図 5.3.13 軌道図 (回転座標系)

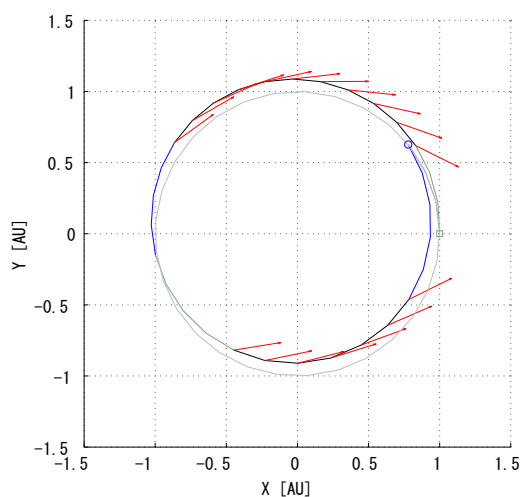


図 5.3.14 軌道図 (慣性座標系)

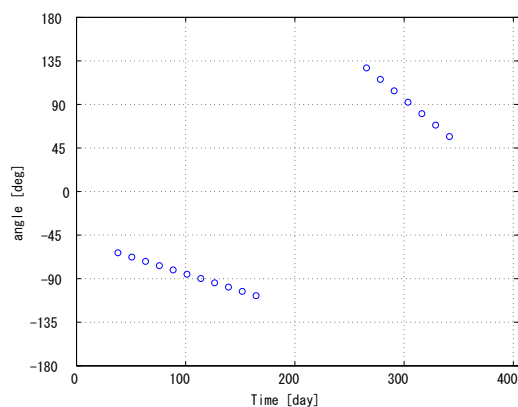


図 5.3.15 Steering Angle (Hill 座標系)

表 5.3.6 値の比較 1

項目	値
効率	1.8335
初期無限遠速度	1567.50 [m/sec]
終端無限遠速度	3362.59 [m/sec]
増速量	979.04 [m/sec]
ToF	404.69 [day]
初期重量	500 [kg]
消費燃料	12.96 [kg]

表 5.3.7 値の比較 2

項目	値
k_1/ω_0	0.355
θ_{10}	310 [deg]
T_{11}	37.94 [day]
T_{12}	164.4069 [day]
k_2/ω_0	0.948
θ_{20}	175 [deg]
T_{21}	50.5867 [day]
T_{22}	126.4668 [day]

図 5.3.12 から図 5.3.14 に軌道図を示しているが、薄い緑色の期間では第 1 区間のコースティング、赤いベクトルの付いた黒色の期間では第 2 区間のスラスト、青い色の期間では第 3 区間のコースティングをそれぞれ表している。第 1 スラストと第 2 スラストの軌道を経て、しっかりと原点（地球）に帰ってきていることが視覚的に確認できる。また、スラストの向きより、遠日点付近では近日点を下げるマヌーバ、近日点付近では遠日点を上げるマヌーバを行っていることも確認できる。

5.3.4 解の比較

第 2.2.5 項で示した DCNLP による最適解と第 5.3.3 項で示した解析解の比較を行う。今までと同様に「SPE 角，地球探査機距離，太陽探査機距離」と「推力の大きさ，Steering Angle」で位置と推力を評価する。以下に比較結果を示す。

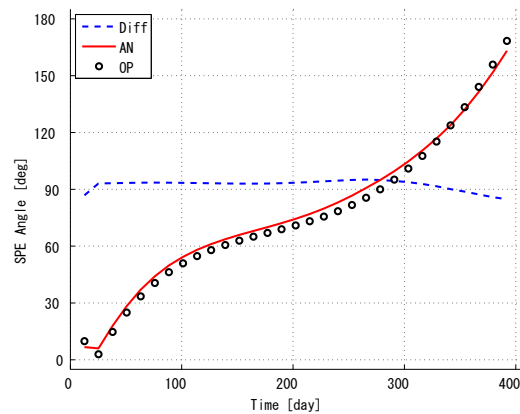


図 5.3.16 SPE 角

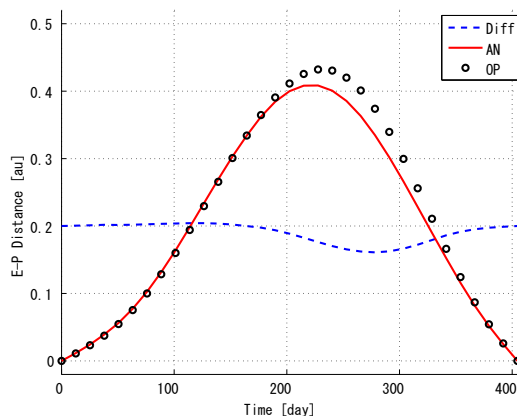


図 5.3.17 地球探査機距離

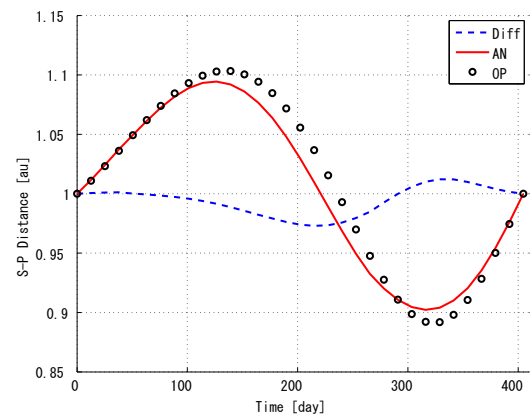


図 5.3.18 太陽探査機距離

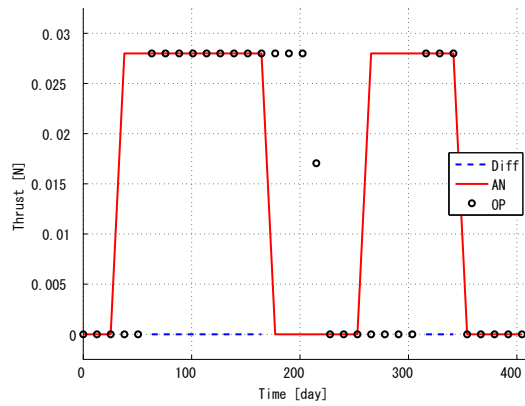


図 5.3.19 推力履歴 (回転座標系 × Hill 座標系)

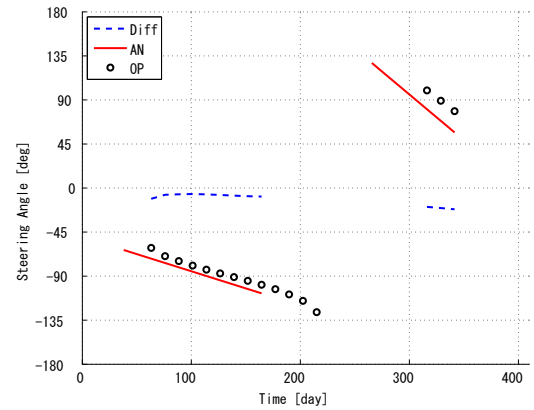


図 5.3.20 Steering Angle (慣性座標系 × Hill 座標系)

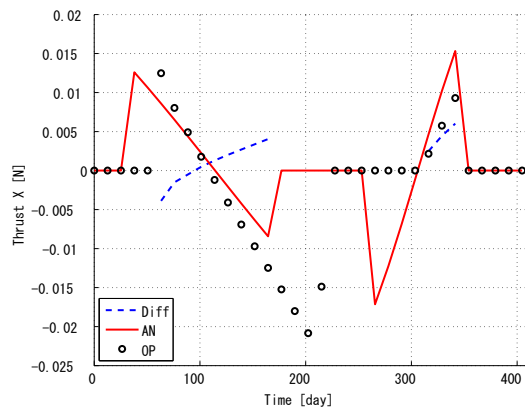


図 5.3.21 推力履歴 X 成分 (回転座標系 × Hill 座標系)

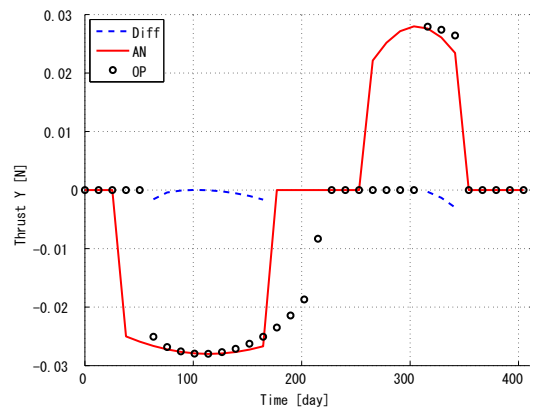


図 5.3.22 推力履歴 Y 成分 (回転座標系 × Hill 座標系)

表 5.3.8 値の比較 1

項目	差分の平均値	差分の最大
地球探査機距離 [au]	0.0116	0.0391
太陽探査機距離 [au]	0.0098	0.0271
SPE 角 [deg]	3.4210	5.2101

表 5.3.9 値の比較 2

項目	差分の平均値	差分の最大
推力 (norm) [mN]	1.2×10^{-13}	2.8×10^{-13}
推力 (X 成分) [mN]	2.7278	6.0199
推力 (Y 成分) [mN]	0.8455	2.9725
Steering Angle [deg]	10.8543	21.7108

表 5.3.10 各種値

項目	DCNLP 最適解	マルチスラスト解析解
効率	2.069	1.8335
初期無限遠速度	1500.00 [m/sec]	1567.50 [m/sec]
終端無限遠速度	3500.00 [m/sec]	3362.59 [m/sec]
増速量	966.6 [m/sec]	979.04 [m/sec]
ToF	404.69 [day]	404.69 [day]
初期重量	500 [kg]	500 [kg]
消費燃料	12.80 [kg]	12.96 [kg]
k_1/ω_0	0.383	0.355
θ_{10}	320.71 [deg]	310 [deg]
T_{11}	50.59 [day]	37.94 [day]
T_{12}	214.99 [day]	164.4069 [day]
k_2/ω_0	0.849	0.948
θ_{20}	364.31 [deg]	175 [deg]
T_{21}	88.53 [day]	50.5867 [day]
T_{22}	126.47 [day]	126.4668 [day]

表 5.3.10 の、「DCNLP 最適解」の「 k_1/ω_0 」等の推力の方向に関する値は、先ほど示した線形近似したときの値であり、「 T_{11} 」等の推力の期間に関する値は、図 2.2.10 から値を得たものである。

結果としては、シングルスラストの場合よりは全体的に値が改善する結果となった。地球探査機距離と太陽探査機距離の最遠距離の差に関しても、

地球探査機距離の最遠距離の差 シングルスラスト 0.0381 [au] マルチスラスト 0.0237 [au]

太陽探査機距離の最遠距離の差 シングルスラスト 0.0105 [au] マルチスラスト 0.0089 [au]

と、こちらに関しても値が改善した。推力区間を 2 つに分解したことにより、無駄なスラスト区間を減少させ、遠日点付近と近日点付近での効率的なスラストに成功している。

今回示したマルチスラストの解は、シングルスラストに比べれば値としては全体的に改善していた。しかしこの解は、解空間全ての探索を行って得た解ではなく、天下りのシングルスラストよりも改善する解を探索した結果の解であった。そのため、「激的な改善」自体は見られなかった。よりきちんとした解の探索を行うことで、より良い階の再現を行うことができると期待できる。

第 6 章

結論

6.1 本研究の成果

- 第 3 章のフルスラスト解析解は、すでに先行研究 [11] で試みられたものであったが、この DCNLP による最適解との比較、検証は行われていなかったため実施した。フルスラスト最適解は良い精度で再現できるが、マルチスラスト最適解では効率が 50% 程度ズレてしまうことを示した。
- 第 4 章では、シングルスラストの VILM の解析解を導き、DCNLP による最適解との比較、検証を行った。マルチスラスト最適解の再現においては、効率や消費燃料がフルスラスト解析解の値から激的に改善して最適解の値に近づくことを示した。
- 第 5 章では、マルチスラスト（今回はスラスト区間を 2 つ含むもの）の算出方法を説明し、DCNLP による最適解との比較、検証を行った。まずはフルスラストを 2 区間に分割するケースで部分的な解の探索を行い、1 区間だけによるフルスラスト解析解よりもさらに精度良く再現できることを示した。
- 同様にマルチスラストの別のケースとして、コースティングを前後に含み、スラスト区間が離れて 2 つ存在するケースで最適解との比較、検証を行った。部分的な解の探索を行い、フルスラスト解析解とシングルスラスト解析解よりも精度良く再現できることを示した。

6.2 今後の課題

まず、決定的な課題として、マルチスラストの場合で十二分に解の探索が行えていないことが挙げられる。 ω_0 まで含めると計 12 個のパラメータが存在しており、全パラメータを振って全域的に探索することが難しくなっている。GA 等を用いることによる最適化が必要なものと思われる。しかし、それでも DCNLP を用いた軌道最適化に比べれば変数の数も激的に少なく、問題自体も扱いやすいものになっている。

今回得られた解析結果から行ってみたい研究は以下の 2 点である。「解析的な最適解の導出」と「低推力を用いた VILM の特性解析」である。解析的な最適解の導出（VILM 効率の解析的導出等）にも多少試みたが、なにぶん式が複雑であり、途中で断念してしまった。また、低推力を用いた VILM の特性解析に関しても、複数ある変数をうまく振ったり、グラフで軸の取り方を工夫したりすることによって、何か知見を得られる望みがあるのではないかと考えている。

最後に、本研究手法を応用した、2 年同期軌道での解析解を求める案がある。今回は第 2 天体を真円とする Hill 方程式を用いたため、1 年同期と 1.4 年同期までしか対応できていなかった。第 2 天体が楕円軌道の場合の Hill 方程式に対して同様にの手法を用いることで、2 年同期の場合の解析解を得られる望みがある。こちらは 1 年同期などとは違い、まだ先行研究も見当たらない状態にある。

参考文献

- [1] 第6回宇宙科学・探査部会. 宇宙科学・探査ロードマップ 検討の現状. 宇宙航空研究開発機構, 2013.
- [2] 科学技術・学術審議会, 研究計画・評価分科会, 宇宙開発利用部会. 文部科学省における宇宙分野の推進方策について [参考資料3]. 2012.
- [3] 科学技術・学術審議会, 研究計画・評価分科会, 宇宙開発利用部会, ISS・国際宇宙探査小委員会. 宇宙科学・探査ロードマップの検討状況について. 宇宙航空研究開発機構 宇宙科学研究所, 2015.
- [4] 渡邊 誠一郎. 宇宙科学・探査ロードマップと惑星科学. 遊・星・人: 日本惑星科学会誌, 23(2):111–115, 2014.
- [5] 坂井真一郎, SLIM/WG. 小型月着陸実験機 SLIM とその検討状況. 小型科学衛星シンポジウム, 2013.
- [6] 科学技術・学術審議会, 研究計画・評価分科会, 宇宙開発利用部会. 小型探査機による高精度月面着陸の技術実証 (SLIM) について. 2015.
- [7] 日本経済新聞. JAXA、火星の衛星へ22年にも探査機岩石など採取, 2015.
- [8] 宇宙科学研究所. 宇宙帆船で太陽系大航海へ乗り出すソーラー電力セイルによる木星圏探査, 2014.
- [9] P J Enright. Optimal Finite-Thrust Spacecraft Trajectories using Direct Transcription and Nonlinear Programming. 14(5):981–985, 1991.
- [10] Jun'ichiro Kawaguchi. Solar Electric Propulsion Leverage: Electric Delta-VEGA (EDVEGA) Scheme and its Application. *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, AAS 01-213:1577–1586, 2001.
- [11] Toshinori Ikenaga, Masayoshi Utashima, Nobuaki Ishii, Yasuhiro Kawakatsu, and Makoto Yoshikawa. Interplanetary parking method and its applications. *Acta Astronautica*, 116:271–281, 2015.
- [12] Koki TAKIURA and Hiroki MATSUO. The numerical solution of the optimal control problem by the direct collocation with nonlinear programming. *Proceedings of 2nd Workshop on Astrodynamics and Flight Mechanics*, pages 30–34, 1992.
- [13] 川勝康弘. DCNLP 法による電気推進軌道計画. Technical report, 2009.
- [14] 荒川義博, 國中均, 中山宜典, and 西山和孝. イオンエンジンによる動力航行. 2006.
- [15] Satoshi Ogura and Yasuhiro Kawakatsu. A Study on V-Infinity Leverage Maneuver (VILM) with Low Thrust Propulsion System. *25th Workshop on JAXA Astrodynamics and Flight Mechanics*, pages A–12, 2015.

謝辞

まず、3年間ご指導いただいた川勝先生には感謝の念に堪えません。右も左もわからないまま宇宙工学の世界に飛び込んできた私に丁寧で的確な指導を賜り心より感謝しております。

川勝研のヒッポーさん、ステファノさん、ブルーノさん、チェンさん、ダニエルさんには、プロジェクト、研究等でお世話になりました。特に、ヒッポーさんには、論文等の英語のご指導から、研究指導、プロジェクトの解析での助言をいただく等、大変親切、丁寧にご指導いただきました。また、ブルーノさんとチェンさんにも、技術研修生としてまだ宇宙研に慣れていない私のサポートを様々なしていただきました。

すでに卒業された杉本さんには、軌道の初歩の部分で面倒を見ていただきました。また、川端さんには、運用と研究で大変なときに助けていただきました。堀川、香山、小川、須田は、輪講を通して多くの学びを与えてくれました。川勝研の先輩方、後輩たちには心から感謝しております。

次に、川口研の大野さん、松本さん、マルコさん、ルカさん、ギヨムさん、中条さん、林さん、濱崎さん、翔太さん、寺本さん、隼仁さん、水森さんには、無知だった技術研修生時代に様々なことで大変お世話になりました。特に翔太さんには、英語や軌道に関する知識、MATLABの技術的な面で助けていただきました。また、マルコさんには国際学会でイタリアに行った際、非常に良くしていただきました。最後に、ラルフさん、大木、赤塚、北尾、高尾、池本、小山、木下、中村には、日常生活のサポートなどをしていただきました。特に、同期の赤塚は私に良い刺激を与え、大木は良い緩衝材となってくれました。川口研の先輩方、同期、後輩たちにも心から感謝しております。

また、宇宙科学研究所のザシさん、ザキさん、岩崎さん、馬場さん、大津さん、外岡さん、仲内さん、少林さん、こまめさん、盛本、高橋、万里には、プロジェクトと研究で忙しいときに心の支えとなっていただきました。

修士論文発表リスト

- 1 Satoshi Ogura and Yasuhiro Kawakatsu, “ Performance Study of Electric Propulsion Delta-V Earth Gravity Assist (EDVEGA) for V-Infinity Leveraging ” , International Symposium on Space Technology and Science, 2015-d-50, Kobe, July 2015.
- 2 Satoshi Ogura and Yasuhiro Kawakatsu, “ A Study on V-Infinity Leverage Maneuver (VILM) with Low Thrust Propulsion System ” , 25th Workshop on Astrodynamics and Flight Mechanics, B-18, Sagamihara, July 2015.

