東京大学 大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系 先端エネルギー工学専攻
2016 年 3 月修了　修士論文要旨

電磁流体方程式のカシミール元とクレブシュ表現のゲージ対称性の関係について

Casimir Invariants of Magnetohydrodynamics Equations and Gauge Symmetries of Clebsch Parameterization

47-146057　種橋　航
（指導教員：吉田　善章）

Key Words: Clebsch parameterization, gauge symmetry, magnetohydrodynamics, Hamiltonian formalism

1．背景

一般に流体方程式はラグランジュ変数によりラグランジュ形式に記述できる [1]。ラグランジュ変数は完全な表現でないことや、プラズマではオイラー場である電磁場と流体が相互作用することからオイラー変数での定式化が試みられた。オイラー変数を用いると流体方程式は非正準ハミルトン形式で記述できる [2]。非正準ハミルトン形式ではポアソン作用素が退化し、退化した自由度が相空間をトポロジー的に束縛する。この束縛はカシミール元と呼ばれる保存量を生み出すことがある。カシミール元はその葉層構造が非自明な平衡解を生み出すため重要な保存量だ。このことは非正準性が系を複雑化し解析を難しくしていることも意味する。これを避ける手段としてクレブシュ表現によって系を正準化することが考えられる [3]。クレブシュ表現とはベクトル場 $\boldsymbol{U}$ を複数のスカラー場を用いて $\boldsymbol{U}=\nabla\phi+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\nabla\beta_i$ などと表現する方法である。クレブシュ表現は ν を十分大きくとったとき完全な表現である。また、クレブシュ表現は冗長な表現であるためあるベクトル $\boldsymbol{V}$ のクレブシュ表現は一意に定まらない。この任意性をゲージ自由度と呼ぶ。ゲージ自由度の範疇でクレブシュ変数を変化させる変換のことをゲージ変換と呼ぶ。方程式を解析するとき対称性を知ることは重要だ。しかし、クレブシュ表現のゲージ対称性は今まであまり集中的な研究がなされておらず自明なものしか見つかっていなかった。

2．目的

クレブシュ表現によってカシミール元はどうなるのか、という疑問が浮かぶ。予想としてはクレブシュ表現のゲージ対称性に起因する保存量に翻訳されると考えられる。本研究では理想電磁流体 (MHD) 方程式を例にとり、非正準な系のカシミール元がクレブシュ表現によって正準化された系での振る舞いを調べる。対称性と保存量の関係からクレブシュ表現のゲージ変換の具体形を求める。そして最終的にゲージ変換全体を明らかにする。

3．クレブシュ表現された理想電磁流体方程式

3.1．ハミルトン形式

ハミルトン形式では系の時間発展は $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\mathcal{J}\partial_u H$ と記述される。ただし u：状態変数、$\mathcal{J}$：ポアソン作用素、H：ハミルトニアンである。ポアソン括弧を $\{F,G\}=\int_\Omega \partial_u F\cdot\mathcal{J}\partial_u G\mathrm{d}^3x$ と定めると物理量 M の時間発展は $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=\{M,H\}$ と計算できる。$\mathcal{J}$ はポアソン括弧が反対称性、ヤコビ律を満たすように選ばれなくてはならない。$\mathcal{J}$ が退化している場合を非正準な系、していない場合を正準な系と呼ぶ。ハミルトン形式で書ける系には対称性から生まれる保存量と、$\mathcal{J}\partial_u C=0$ を満たすカシミール元 C が存在する。カシミール元は非自明な平衡解を生み出す重要な保存量である。

3.2．理想電磁流体方程式

MHD 方程式:

$$\partial_t\rho=-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}), \tag{1}$$

$$\partial_t\boldsymbol{V}=-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}-\nabla(h+V^2/2)+\rho^{-1}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}, \tag{2}$$

$$\partial_t\boldsymbol{B}=\nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}). \tag{3}$$

ただし ρ：密度、$\boldsymbol{V}$：速度、$\boldsymbol{B}$：磁場、$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{V}$：渦度、$\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{B}$：電流、$h=h(\rho)$：比エンタルピーここではバロトロピックな場合を仮定。）各変数はアルヴェン単位で規格化されている。境界で $\boldsymbol{V},\boldsymbol{B}$ が法線成分を持たないこととする。MHD 方程式は非正準ハミルトン形式で記述でき、3 つのカシミール元

$$C_1=\int_\Omega\rho\mathrm{d}^3x, \tag{4}$$

$$C_2=\int_\Omega\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x, \tag{5}$$

$$C_3=\int_\Omega\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x, \tag{6}$$

を持つ。ただし $\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャルである。

3.3. クレブシュ表現

クレブシュ表現はベクトルを複数のスカラーで

$$\boldsymbol{U} = \nabla\phi + \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \nabla\beta_i \tag{7}$$

などと表現することをいう。空間の次元 $n=3$ に対しペアの数 ν が $\nu=n-1$ ならば完全な表現、$\nu=n$ ならばさらにクレブシュ変数に独立な境界条件を課すことができる。これ以降 $\nu=3$ とする。また、縮約規則を用いる。MHD もこの方法で正準化できる：

$$u = (\rho, \phi_0, \mu_i, \alpha_i, \beta_i, \phi_i)^T, \tag{8}$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -I & & \\ & & I & 0 & & \\ & & & & 0 & -I \\ & & & & I & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$H = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho V(u)^2 + \rho\mathcal{E} + \frac{1}{2}B(u)^2 \right) \mathrm{d}^3x. \tag{10}$$

$$\boldsymbol{V}(u) = -\nabla\phi_0 - \sigma_i\nabla\alpha_i - \gamma_i\nabla\phi_i, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{B}(u) = \nabla\sigma_i \times \nabla\phi_i, \tag{12}$$

$$\sigma_i = \frac{\mu_i}{\rho}, \gamma_i = \frac{\beta_i}{\rho}, \tag{13}$$

ただし I：三次単位行列、$\mathcal{E}=\mathcal{E}(\rho)$：比内部エネルギー

4. 保存量と対応するゲージ変換

保存量 C に対し

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = \{C, H\} = -\int \mathcal{J}\partial_u C \cdot \partial_u H \mathrm{d}^3x = 0, \tag{14}$$

である。そして微小変数変換 $u \to u + \delta u$ の下で δH は

$$\delta H = \int \delta u \cdot \partial_u H \mathrm{d}^3x, \tag{15}$$

(14)、(15) を見比べると微小定数 ϵ を用いて $\delta u = \epsilon\mathcal{J}\partial_u C$ と置けばこの変換は H を変化させない。それでは非正準な系でカシミール元だった保存量に対し δu を計算してみる：

$$C_1 \to \delta\phi_0 = \epsilon. \tag{16}$$

$$C_2 \to \begin{cases} \delta\phi_0 = -2\epsilon\rho^{-1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}, \\ \delta\alpha_i = 2\epsilon\rho^{-1}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}, \\ \delta\beta_i = 2\epsilon\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}, \end{cases} \tag{17}$$

$$C_3 \to \begin{cases} \delta\phi_0 = -\epsilon\rho^{-1}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\omega}), \\ \delta\alpha_i = \epsilon\rho^{-1}(\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{\omega} - \nabla\alpha_i\cdot\boldsymbol{B}), \\ \delta\mu_i = -\epsilon\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}, \\ \delta\phi_i = -\epsilon\rho^{-1}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}, \\ \delta\beta_i = \epsilon(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega} - \nabla\frac{\beta_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}), \end{cases} \tag{18}$$

ただし $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \nabla\phi_0, \boldsymbol{A} = \sigma_i\nabla\phi_i$ である。これらの下での $\delta\boldsymbol{V}, \delta\boldsymbol{B}$ を計算すると 0 となる。よってこれらクレブシュ表現のゲージ変換である。

5. 一般のゲージ変換

(17) の ϵ をスカラー $\varepsilon(t,x)$ に拡張した変換

$$\delta u = \varepsilon(t,x)\partial_u C_2 \tag{19}$$

もゲージ変換であることが分かった。この変換は作用積分を変化させることから保存量と対応づかないゲージ変換である。このことから保存量からたどってもゲージ変換全体を見つけることはできない。

そこで直接ゲージ変換を計算してみよう。$u \to u + \delta u$ がゲージ変換である時

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{V} =& -\nabla\delta\phi_0 - \delta\sigma_i\nabla\alpha_i - \sigma_i\nabla\delta\alpha_i \\ &- \delta\gamma_i\nabla\phi_i - \gamma_i\nabla\delta\phi_i = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\delta\boldsymbol{B} = \nabla\delta\sigma_i \times \nabla\phi_i + \nabla\sigma_i \times \nabla\delta\phi_i, \tag{21}$$

が成立する。これ以降 $\nu=2$ とする。(20)、(21) は与えられた u の下での δu についての偏微分方程式である。(20)、(21) が任意スカラー f_1, f_2 を含む線形代数方程式

$$-\delta\sigma_i\nabla\alpha_i + \delta\alpha_i\nabla\sigma_i - \delta\gamma_i\nabla\phi_i - \delta\phi_i\nabla\gamma_i = \nabla f_1, \tag{22}$$

$$\delta\phi_0 + \sigma_i\delta\alpha_i + \gamma_i\delta\phi_i = f_1, \tag{23}$$

$$\delta\sigma_i\nabla\phi_i - \delta\phi_i\nabla\sigma_i = \nabla f_2, \tag{24}$$

と変形できることを発見した。(22)-(24) の解の自由度は与えられた u に依存する。$\nabla\sigma_i, \nabla\alpha_i, \nabla\gamma_i, \nabla\phi_i$ のうちどの 3 つを選んでも各点で一次独立となるというもっともシンプルなケースについて (22)-(24) のすべての解を求めた。

6. まとめ

非正準 MHD 系のカシミール元がクレブシュ表現によってゲージ対称性に起因する保存量へと翻訳されることを示し、ゲージ変換の具体形を計算した。ゲージ変換が必ずしも保存量を導かないことを発見した。ゲージ変換を求める偏微分方程式は代数方程式に帰着できることを発見し、各点でクレブシュ変数が縮退しないような場合の u についてゲージ変換の一般形を計算した。

参考文献

[1] Frieman, E., Rotenberg, M., 1960, *Rev. Mod. Phys.* **32**, 898.

[2] Morrison, P. J., Greene, J. M., 1980, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 790.

[3] Lin, C. C., 1963, *Hydrodynamics of helium II.*