東京大学大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系
先端エネルギー工学専攻

平成 27 年度
修士論文

電磁流体方程式のカシミール元とクレブシュ表現のゲージ対称性の関係について

Casimir Invariants of Magnetohydrodynamics Equations and Gauge Symmetries of Clebsch Parameterization

2016 年 2 月 2 日 提出

指導教員　吉田 善章　教授

47146057　種橋　航

概要

一般に流体はオイラー変数の下で定式化すると非正準ハミルトン形式で記述できる。そして総質量やヘリシティといったカシミール元を持つ。カシミール元が作る葉層構造は非自明な平衡解を生み出すことからカシミール元は重要な保存量だ。クレブシュ表現によりオイラー変数を用いながら非正準な系を正準化できることが知られている。正準な系ではポアソン作用素が作るトポロジー束縛はなくなるため、カシミール元は存在しない。よって総質量やヘリシティといった保存量は何らかの対称性と関係づくことが予想できる。さらにこの対称性は正準な系から非正準な系に戻ると失われてしまうことからゲージ対称性であることが予想される。

本研究では理想電磁流体方程式を例にとりこの関係について調べる。非正準な系では総質量とマグネティックヘリシティ、そしてクロスヘリシティがカシミール元として知られている。これらが正準化された系ではゲージ対称性によって生み出されるネーターチャージに翻訳されることを明らかにし、対称性と保存量の関係からゲージ変換の具体形を求めた。

さらにクレブシュ表現のゲージ変換を求める偏微分方程式は代数方程式に帰着できることを示した。これを解き、ゲージ変換の一般形を求めることに成功した。

目次

表目次

第 1 章

序論

1.1　研究の背景

解析力学の代表的な定式化としてラグランジュ形式とハミルトン形式がある [1]。これらの記述できる範囲は異なっていて、大まかにいうと正準ハミルトン形式で記述される系はラグランジュ形式にでき、非正準ハミルトン形式はラグランジュ形式にできない。また、ラグランジュ形式は適当な処理を行ってからルジャンドル変換により正準ハミルトン形式にできる。ラグランジュ形式は接バンドル上の関数であるラグランジアンから運動方程式を作る手法である。運動方程式はラグランジアンを時間で積分した作用積分に対し変分原理を適用することで得られる。ハミルトン形式は物質を記述する汎関数であるハミルトニアンと空間の代数構造を決定する反対称作用素であるポアソン作用素とによって運動方程式を作る手法である。状態変数の時間発展はハミルトニアンの勾配にポアソン作用素を作用させたものになる。ハミルトン形式では物理量の空間上にポアソン括弧という代数が定義される。そして物理量の時間発展はその物理量とハミルトニアンとのポアソン括弧として計算される。ポアソン括弧が非自明な零元を持つ場合を非正準、持たない場合を正準と呼ぶ。ポアソン括弧の非自明な零元をカシミール元と呼ぶ。物理量の時間変化はポアソン括弧を用いて計算できるためカシミール元は保存量

になる。しかもカシミール元はハミルトニアンの選び方に依らず保存する特別な保存量だ。カシミール元の等高面は相空間を分断し、葉層構造を生み出す。プラズマが持つ多様な構造は葉層構造によって生み出されてると言っても過言ではない。例えば平衡解を求めることを考えよう。質点系などの正準な系では平衡解はハミルトニアンの停留点として求めることができる。もしこれが流体に当てはめられるならばハミルトニアンは速度について二次形式なので平衡解は速度 0 の点のみになってしまう。しかし実際には流体は非正準なので各葉層上のハミルトニアンの停留点が平衡解となり多様な平衡解が出現することとなる。葉層構造を理解するために非正準ハミルトン形式で記述された系を正準ハミルトン形式ないしラグランジュ形式で書きなおすことによってトポロジー的な束縛を「隠れていた対称性」に置き換えその具体形を探るというのが本研究の主眼である。

そのことを詳しく述べる前にまず一般の流体方程式の定式化の歴史をみていこう。流体は密度場と速度場によって記述される場の理論である。美しい定式化が成功した場の理論の代表例として電磁気学があげられる。電磁場の時間発展を記述するマクスウェル方程式はラグランジュ形式で記述される。電磁気の場合は方程式が線形であるため比較的すんなりと定式化がなされた。非線形な項を含む流体方程式においてもラグランジュ形式で書けないかという試みがなされてきた。これはラグランジュ座標を導入することで達成された [2, 3, 4, 5]。ラグランジュ座標とはある場所を、「時刻」とその位置にある流体エレメントが初期時刻において存在した「初期位置」の組で指定する座標系のことである。あらかじめ割り振られた初期位置という属性が流体エレメントとともに動くというイメージからラベルとも呼ばれる。ラグランジュ座標を用いて場を記述する流儀のことをラグランジュ描像という。それに対し、「時刻」とその時刻における「位置」を用いて場を記述する流儀をオイラー描像と呼ぶ。ここで、各描像の下で定義された変数をそれぞれラグランジュ変数/オイラー変数と呼ぶこととしよう。ラグランジュ変数が流体のラグランジアンの構築に成功するのはそもそもラグランジュ変数の成りたち

に流体が持つ「流れの構造」が反映されているためであるこの性質はラグランジュ形式での定式化を助けるというメリットを持つが同時に適用範囲を狭めるという負の一面を合わせ持つ。散逸や湧き出しが存在するような系ではラグランジュ座標を定義することができないため、ラグランジュ変数は不完全な表現に陥るのだ。そこでオイラー変数を用いて流体方程式のラグランジアンを構築する試みがなされた。特にプラズマや重力化にある流体では流体の変数と電磁場や重力場といったオイラー変数が結合することになる。ラグランジュ変数とオイラー変数が混在することは不必要な煩雑さをもたらすため、このような系の解析を行う際には一層オイラー描像での定式化が必要となる。素直な発想でオイラー変数のラグランジアンを作ろうと思うとラグランジュ描像のラグランジアンの中に入っているラグランジュ変数をそれぞれ対応するオイラー変数に入れ替えることを考えるのではないだろうか。しかしこの方法でオイラー描像のラグランジアンを作ることはできない。実際、作用積分に対し変分を計算してみるとすべての変数が 0 になってしまう。オイラー変数には「流れの構造」がないためこのようなことが起こるのだ。そこで流体エレメントの初期位置の保存と粒子数の保存という二つの制約を未定乗数法で導入する。この際初期位置を表すスカラー場と初期位置保存の未定乗数を ν 個ずつ、粒子数保存の未定乗数を 1 つの合計 $2\nu+1$ 個のスカラー場を新たに導入することになる。ここで導入したスカラー場のことをクレブシュ変数と呼ぶ。この新たなラグランジアンから方程式を作ると二種類の方程式が得られる。一つ目がクレブシュ変数の運動方程式であり、二つ目が速度場などの元から存在した物理変数の場をクレブシュ変数で表現する式だ。後者の式をクレブシュ表現と呼ぶ。このようにクレブシュ変数を導入することでラグランジュ形式で定式化することが可能になる [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]。クレブシュ表現を代入してラグランジアンの中の物理変数をクレブシュ変数に置き換える。すると状態変数は物理変数でなくクレブシュ変数になるものの、オイラー描像のもとでラグランジュ形式に定式化される。ν を十分大きくとればクレブシュ表現は完全な表現になる。しかしクレブシュ表現は非線形な表現なので一つの

物理変数の状態を表すクレブシュ変数の状態が複数あるような冗長性が生まれる。これがのちに述べるゲージ対称性である [12]。

さて、話をもう一つの定式化の手法であるハミルトン形式の側から眺めてみよう。オイラー変数で記述された流体の系は (散逸が存在せずエネルギーが保存する場合) 総質量やヘリシティといったカシミール元を持つ非正準ハミルトン形式で記述できる [5, 13, 14, 15]。オイラー変数の相空間はポアソン作用素によってトポロジー的な束縛を受けており、この束縛が「流れの構造」をオイラー変数に付与しているのだ。ラグランジュ変数やクレブシュ変数を用いると系がラグランジュ形式で記述できることを述べた。これはラグランジュ変数やクレブシュ変数を導入すると葉層構造を取り払うことができるということだ。結果は同じなのだが、両者が進んでいる道は真逆のものと言える。ラグランジュ変数は完全な表現ではない。そのため相空間が削減され、不都合な部分が取り除かれる。クレブシュ変数は冗長な表現である。この冗長性によりポアソン括弧の退化した自由度が埋められ非退化になるのだ。

ここで一つの疑問が生じる。非正準な系のカシミール元は系が正準化されるときどうなるのだろうか。ここからは具体的な方程式の話に移ろう。本研究で取り扱うのは三次元理想電磁流体方程式 (MHD) である。MHD はプラズマの運動を記述する方程式であり、理想流体方程式に磁場を追加した恰好をしている。MHD はオイラー変数の下で非正準ハミルトン形式で記述できる。この系は 3 種類のカシミール元 (総質量、マグネティックヘリシティ、クロスヘリシティ) を持つ [13]。そしてラグランジュ変数やクレブシュ変数で正準化できることが知られている [4, 5, 16, 17]。実はハミルトン形式で記述される系には 2 種類の保存量が存在する。1 つ目がカシミール元であり、2 つ目はハミルトニアンの対称性が生み出す保存量だ [5, 18, 19]。対称性から生み出される保存量のことをネーターチャージと呼ぶ。カシミール元はネーターチャージに変換されているのではないかと予想できる。実際ラグランジュ変数を用いた場合クロスヘリシティはラベル対称性という対称性から生み出されるネーターチャージに変換される

ことが知られている [23, 24]。しかし総質量とマグネティックヘリシティは対称性と結びつけることができない。これはラグランジュ変数が縮減による正準化の結果総質量やマグネティックヘリシティを自明な定数にして運動の外へ放り出してしまうからだと考えられる。それではクレブシュ変数を用いる場合はどうなるだろうか。クレブシュ表現は完全な表現である。そのため 3 つのカシミール元はすべてネーターチャージに変換されることが予想される。この対称性は元の非正準な系では観測できない「隠れていた対称性」であるはずだ。つまりクレブシュ変数を変化させたとき物理変数である密度、速度、磁場が変化しないような変換についての対称性だと言える。このような変換をゲージ変換と呼ぶ。対称性を持つ方程式を解析するうえでその対称性について知ることは必要不可欠なことだ。しかしクレブシュ表現が非線形かつ微分を含むような表現であることからいままでクレブシュ表現のゲージ変換はほぼ自明なものを除いて知られていなかった。

1.2 研究目的

非正準 MHD 系は総質量、マグネティックヘリシティ、クロスヘリシティの 3 つのカシミール元を持つ。また、クレブシュ表現により MHD を正準化できる。このとき元の系のカシミール元たちは対称性から生み出された保存量へと変換されるはずである。この新たな対称性はクレブシュ表現のゲージ対称性であることが予想される。そこで本研究ではクレブシュ MHD 系の保存量とゲージ対称性の間の関係について調べた。第 2 章では本研究に必要な基礎的な知識の整理を行う。第 3 章では実際に総質量、マグネティックヘリシティ、(さらにこれらの局所保存則) そしてクロスヘリシティに対応するゲージ変換を計算する。そして各保存量がネーターチャージであることを計算する。さらに正準化の際にカシミール元がゲージ対称性に起因するネーターチャージになることは MHD に特有の現象ではなく、一般に成り立つことを示した。第 4 章ではクレブシュ表現のゲージ変換全体を求める方程式を立てる。この式はクレブシュ表

現が微分を含む表現であることから偏微分方程式になる。これを代数方程式に帰着させ、一般解を求める。そして第 5 章ではまとめを行う。Appendix A では MHD 以外の系について行った計算を紹介する。具体的にはホール MHD 方程式、中性流体方程式、そして 2 次元の中性流体方程式についてである。Appendix B ではクレブシュ MHD が持つ平衡解についての解析を紹介する。

第 2 章

基礎知識の整理

2.1　一般ハミルトン形式

　このセクションでは一般ハミルトン形式を紹介する。一般ハミルトン形式では系の時間発展を

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \mathcal{J}\partial_u H, \tag{2.1}$$

と記述する。$u \in X$ は状態変数 (ここでは X がヒルベルト空間だとする)、$\mathcal{J} \in \mathrm{End}(X)$ はポアソン作用素、$H \in C^\infty(X)$ はハミルトニアンである。ポアソン作用素 $\mathcal{J}$ はポアソン括弧 $\{F, G\} = \langle \partial_u F, \mathcal{J}\partial_u G \rangle$ が反対称性、ライプニッツ則、ヤコビ律を満たすよう選ばれているものとする。非退化であることは特に要求しない。$\langle\ ,\ \rangle$ は X 上の内積である。物理量 F の時間発展はポアソン括弧とハミルトニアン H を用いて

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \{F, H\}, \tag{2.2}$$

と計算できる。ポアソン作用素が非自明な核空間を持つとき系は非正準となり、自明な核空間を持つときは正準になる。

ハミルトン形式で記述される系にはポアソン括弧の非正準性から生み出されるものと系の対称性から生み出されるものの 2 種類の保存量が存在する。前者をカシミール元と呼ぶ。$\{F, G\} = 0$ がすべての G について成立する、すなわち

$$\partial_u F \in \mathrm{Ker}(\mathcal{J}), \tag{2.3}$$

であるとき F は (ハミルトニアンの選び方に依らずに) 保存する。このような保存量のことをカシミール元と呼ぶ。カシミール元が存在するとき状態変数の空間はカシミール元の等高面に葉層化される。このような系を非正準な系と呼ぶ。二つ目は系の対称性に起因する保存量だ。C 保存量とすると (2.2) より $\{C, H\} = 0$ である。つまりハミルトニアン H が C が生成するハミルトンベクトル場 $X_C = -\{C, \circ\}$ を作用させたときに 0 になるように選ばれれば C が保存量になる。これは H が X_C の定める方向に対称性を持つことに他ならない。このような例としては空間の並進対称性に対応して運動量が保存することなどが知られている。

2.2 電磁流体方程式

このセクションでは理想電磁流体 (MHD) 方程式を紹介する。MHD は二流体方程式とマクスウェル方程式を連立させたものから平均の速度と密度を状態変数とし、オーダーの小さい項 (変位電流、クーロン力、電荷保存の式) を落としたものである [20]。MHD は 1942 年にアルフヴェン波（磁場があるとき電導性の流体中で伝わる横波）の存在を予測 [21] されて以来プラズマの基礎方程式として利用されてきた。MHD 方程式：

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}), \tag{2.4}$$

$$\partial_t \boldsymbol{V} = -(\nabla \times \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{V} - \nabla(h + V^2/2) + \rho^{-1}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}, \tag{2.5}$$

$$\partial_t \boldsymbol{B} = \nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}). \tag{2.6}$$

ただし ρ は密度、$\boldsymbol{V}$ は速度、$\boldsymbol{B}$ は磁場である。h は比エンタルピーであり、ここではバロトロピックなモデル $h = h(\rho)$ を仮定する。また、各変数はアルヴェン単位とシステムサイズによって規格化され無次元量である。簡単のため対象とする領域 Ω は単連結で有限の大きさを持つとする。境界条件として

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.8}$$

を課す。ただし $\partial\Omega$ は領域 Ω の境界とし、$\boldsymbol{n}$ は $\partial\Omega$ の外向きの単位法線ベクトルであるとする。MHD 方程式は

$$u = (\rho, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{B})^T, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla\cdot & 0 \\ -\nabla & -\rho^{-1}(\nabla \times \boldsymbol{V})\times & \rho^{-1}(\nabla \times \circ) \times \boldsymbol{B} \\ 0 & \nabla \times (\circ \times \rho^{-1}\boldsymbol{B}) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

$$H = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho\mathcal{E} + \frac{1}{2}B^2 \right) \mathrm{d}^3x, \tag{2.11}$$

と定義するとハミルトン形式をなすことが知られている [13]。ただし $V = |\boldsymbol{V}|$、$B = |\boldsymbol{B}|$ である。$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho)$ は比内部エネルギーであり、$\partial(\rho\mathcal{E})/\partial\rho = h$ を満たす。

この系は次の 3 つのカシミール元

$$C_1 = \int_\Omega \rho \mathrm{d}^3x, \tag{2.12}$$

$$C_2 = \int_\Omega \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}^3x, \tag{2.13}$$

$$C_3 = \int_\Omega \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}^3x, \tag{2.14}$$

を持つ。それぞれ総質量、マグネティックヘリシティ、クロスヘリシティと呼ばれる。ただし $\boldsymbol{A} = \mathrm{curl}^{-1}\boldsymbol{B}$ はベクトルポテンシャルである。(curl^{-1} の取り扱いについては [22] を参照)

この系はカシミール元を持つことから非正準な系である。よって以後この系のことを非正準MHD 系と呼ぶ。

2.3 クレブシュ表現

ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ を複数のスカラー場 $a, b_i, c_i (i = 1, 2, 3, \cdots, \nu)$ を用いて

$$\boldsymbol{U} = \nabla a + \sum_{i=1}^{\nu} b_i \nabla c_i, \tag{2.15}$$

の形で記述することをクレブシュ表現と呼ぶ。また、このとき用いるスカラー場達のことをクレブシュ変数と呼ぶ。このとき $\boldsymbol{W} = \nabla \times \boldsymbol{U}$ は

$$\boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^{\nu} \nabla b_i \times \nabla c_i, \tag{2.16}$$

となる。磁場や渦度などのダイバージェンスフリーなベクトルはこの形で表現する。(こちらもクレブシュ表現と呼ぶ。) 空間の次元を n とするとクレブシュ表現は $\nu = n - 1$ の場合完全な表現である。$\nu = n$ の場合完全な表現でかつクレブシュ変数達に独立に境界条件を課すことが可能である [12]。以後特に指定がない限り縮約記法を用いて $\sum$ 記号を省略してある。

クレブシュ表現のゲージ変換としては $\nu = 1$ の場合において

$$\nabla\phi + \alpha\nabla\beta, \tag{2.17}$$

に対し変換

$$\begin{cases} \delta\phi = f(\beta), \\ \delta\alpha = f'(\beta), \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} \delta\phi = f(\alpha), \\ \delta\beta = g(\alpha), \end{cases} \tag{2.19}$$

が知られている [12]。ただし $f(x), g(x)$ は滑らかな関数であり $xf' = g'$ を満たすものとする。ペアの数 ν を増やすことでゲージ自由度は増えることが予想される。しかしその具体形は見つかっていなかった。

2.4　クレブシュ表現された理想電磁流体方程式

　このセクションではクレブシュ表現された MHD 方程式を紹介する。クレブシュ表現を用いて MHD 方程式を書き直すと正準ハミルトン形式に記述できる [16, 17]。これをクレブシュ MHD 系と呼ぶことにする。

クレブシュ MHD 系：

$$u_c = (\rho, \phi_0, \mu_i, \alpha_i, \beta_i, \phi_i)^T, \tag{2.20}$$

$$\mathcal{J}_c = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_c^1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_c^3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_c^3 \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

$$H = \int_\Omega \mathcal{H} \mathrm{d}^3 x = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho V(u_c)^2 + \rho\mathcal{E} + \frac{1}{2}B(u_c)^2 \right) \mathrm{d}^3 x. \tag{2.22}$$

ただし

$$\mathcal{J}_c^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

$$\mathcal{J}_c^3 = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_c^1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_c^1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_c^1 \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

$$\boldsymbol{V}(u_c) = -\nabla\phi_0 - \sigma_i\nabla\alpha_i - \gamma_i\nabla\phi_i, \tag{2.25}$$

$$\boldsymbol{B}(u_c) = \nabla\sigma_i \times \nabla\phi_i, \tag{2.26}$$

$$\sigma_i = \frac{\mu_i}{\rho}, \tag{2.27}$$

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{\rho}, \tag{2.28}$$

である。添え字は $i = 1, 2, 3$ である。物理変数の境界条件 (2.7)、(2.8) と矛盾しない (つまりすべてのクレブシュ変数に対して $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}$ が境界条件 (2.7)、(2.8) を満たしかつ (2.7)、(2.8) を満たすすべての $\rho, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}$ に対しあるクレブシュ変数が存在してクレブシュ表現が可能である) ために、そしてハミルトニアン H の微分可能性を担保するためにクレブシュ変数の境界条件を以下のように定める:

$\partial\Omega$ において

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla\phi_0 = 0, \tag{2.29}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla\alpha_i = 0, \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla\phi_i = 0, \tag{2.31}$$

$$\frac{\mu_i}{\rho} = Const. \tag{2.32}$$

$$\nabla\frac{\beta_i}{\rho} \times \boldsymbol{n} = 0. \tag{2.33}$$

(2.32)、(2.33) は ρ を含んだ式であるが、(2.29)-(2.33) の本数が状態変数の数より一つ少ないので、クレブシュ変数の相空間上でも ρ の境界は制限されない。また、(2.32) と (2.33) で異な

る表現を取っているのは、(2.32) は $\frac{\mu_i}{\rho}|_{\partial\Omega}$ が空間と時間について一定、(2.33) は $\frac{\beta_i}{\rho}|_{\partial\Omega}$ が空間についてのみ一定で時間的には変動してもよいことを表している。

(2.20)-(2.22) から導かれるクレブシュ変数の運動方程式は

$$\dot{\phi}_0 = \partial_\rho H = -\boldsymbol{V}\cdot\nabla\phi_0 + h - V^2/2 - \rho^{-1}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}, \tag{2.34}$$

$$\dot{\rho} = -\partial_{\phi_0} H = -\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\rho), \tag{2.35}$$

$$\dot{\alpha}_i = \partial_{\mu_i} H = -\boldsymbol{V}\cdot\nabla\alpha_i + \rho^{-1}\boldsymbol{J}\cdot\nabla\phi_i, \tag{2.36}$$

$$\dot{\mu}_i = -\partial_{\alpha_i} H = -\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\mu_i), \tag{2.37}$$

$$\dot{\phi}_i = \partial_{\beta_i} H = -\boldsymbol{V}\cdot\nabla\phi_i, \tag{2.38}$$

$$\dot{\beta}_i = -\partial_{\phi_i} H - \nabla\cdot(\boldsymbol{V}\beta_i) + \boldsymbol{J}\cdot\nabla\mu_i/\rho, \tag{2.39}$$

である。ただし $\boldsymbol{J} = \nabla\times\boldsymbol{B}$ は電流である。ベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{A} = \nabla\frac{\mu_i}{\rho}\nabla\phi_i$ にゲージ固定されているものとする。(2.34)-(2.39) を (2.25) と (2.26) に代入すると (2.5) と (2.6) が得られる。

非正準 MHD 系のポアソン括弧がクレブシュ MHD 系のポアソン括弧から計算できる [16]。それぞれの系の状態変数を u_n, u_c、ポアソン括弧を $\{\ ,\ \}_n, \{\ ,\ \}_c$ と区別し、クレブシュ表現を $u_n = \psi(u_c)$ とおく。すると非正準 MHD の任意の物理量 F, G に対して

$$\{F, G\}_n \circ \psi = \{F\circ\psi, G\circ\psi\}_c \tag{2.40}$$

が成立する。

正準ハミルトン系はラグランジュ形式 (すなわち変分原理) で記述することが可能な場合が多い。クレブシュ MHD 系もその例に漏れない。作用積分

$$S = \int_D \mathcal{L}\mathrm{d}^4x = \int_D \left(\rho\dot{\phi}_0 + \mu_i\dot{\alpha}_i + \beta_i\dot{\phi}_i - \mathcal{H}\right)\mathrm{d}^4x, \tag{2.41}$$

を導入することで、(2.34)-(2.39) は変分原理から導くことができる。ただし D は対象とする

空間領域 Ω と時間領域の積空間とする。また正準一次形式の部分を

$$\theta = \rho\dot{\phi}_0 + \mu_i\dot{\alpha}_i + \beta_i\dot{\phi}_i, \tag{2.42}$$

とおく。

2.5 ネーターの定理

このセクションではネーターの定理を紹介する。ネーターの定理とは連続的な対称性を持つ系においてその対称性に対応する保存量を導く定理である。後に述べるようにハミルトンベクトル場の形で記述できない変数変換に対しても解析を行いたいため、この定理を利用することになる。

本来ネーターの定理は変数変換と座標変換の両方に対して適用ができるのだが本研究においては座標変換は特に行わないため変数変換についての部分だけ紹介する。また、対象とする系は 3 次元空間上の場の理論だとし、ラグランジアン密度が状態変数 u_i の 1 次微分までを含む場合を考える。すなわち

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u_i, \partial_\nu u_i), \tag{2.43}$$

であるとする。ただし $\nu = 0, 1, 2, 3$ とする。添え字が 0 のものは時間成分であり、1 から 3 のものは空間成分である。

対称性とは変数変換のうち作用積分を変化させないものをいう。変換 $u \to u'$ が対称性であるとき、$S(u_i') - S(u_i) = 0$ すなわちある 4 次元ベクトル Λ^ν が存在して $\mathcal{L}(u_i') - \mathcal{L}(u_i) = \partial_\nu \Lambda^\nu$ である。ここで、変数変換として微小変数変換 $u_i \to u + \delta u_i$ を考えることにする。すると 2 次の項を無視することができるため計算が簡単になる。微小変数変換 $u_i \to u_i + \delta u_i$ のもとで

のラグランジアン密度の変化は

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\delta u_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu u_i\right)}\delta(\partial_\nu u_i) \\ &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} - \partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu u_i\right)}\right)\delta u_i + \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu u_i\right)}\delta u_i\right),\end{aligned}\tag{2.44}$$

となる。ただし途中 $\delta(\partial_\nu u_i) = \partial_\nu(\delta u_i)$ を用いた。よってオイラーラグランジュ方程式 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} - \partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu u_i)} = 0$ の解のもとでは

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu u_i\right)}\delta u_i\right),\tag{2.45}$$

となる。ここでこの微小変数変換 $u_i \to u_i + \delta u_i$ が対称性であったことを思い出すと、

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu u_i\right)}\delta u_i - \Lambda^\nu\right) = 0,\tag{2.46}$$

である。これは保存則を表す式である。括弧の中身をネーターカレント I^ν、その第 0 成分を空間で積分したもの

$$\int_\Omega I^0\mathrm{d}^3x = \int_\Omega\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{u}_i}\delta u_i - \Lambda^0\right)\mathrm{d}^3x,\tag{2.47}$$

をネーターチャージと呼ぶ。ネーターチャージは対称性 $u_i \to u_i + \delta u_i$ に対応する保存量である。ネーターチャージが保存量であることは

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega I^0\mathrm{d}^3x = \int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{I}\mathrm{d}^3x = 0,\tag{2.48}$$

と確かめられる。ただし $\boldsymbol{I}$ はネーターカーレントの空間成分を表す。

第 3 章

クレブシュ MHD 系における保存量とゲージ変換との関係

3.1　元のカシミール元が生成する対称性

クレブシュ MHD 系は正準なので保存量はすべて対称性と関係づけられると考えられる。このセクションでは元のカシミール元 C_i それぞれについて対称性を変数変換 $u \to \delta u$ の形で具体的に計算していく。

C_i は保存量なので $\{C, H\} = 0$ なのだが、これは変数変換

$$u \to u + \delta u = u - \epsilon \mathcal{J} \partial_u C_i, \tag{3.1}$$

の下でのハミルトニアン H の変化

$$\begin{aligned} H(u - \epsilon \mathcal{J} \partial_u C_i) - H(u) &= -\epsilon \int_\Omega \partial_u \mathcal{H} \mathcal{J} \partial_u C_i \mathrm{d}^3 x + o(\epsilon) \\ &= \epsilon \{C, H\} + o(\epsilon), \end{aligned} \tag{3.2}$$

の 1 次の項が 0 であることを意味する。ϵ を微小定数とすればこの変換の下でハミルトニア

ン H が不変となる。各 C_i について δu を計算すると次のようになる。(0 となる成分は省略する。)

$$C_1 = \int_\Omega \rho \mathrm{d}^3 x \to \delta\phi_0 = \epsilon\partial_\rho C_1 = \epsilon. \tag{3.3}$$

$$C_2 = \int_\Omega \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3 x \to \begin{cases} \delta\phi_0 = \partial_\rho C_2 = -2\epsilon\rho^{-1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}, \\ \delta\alpha_i = \partial_{\mu_i} C_2 = 2\epsilon\rho^{-1}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}, \\ \delta\beta_i = -\partial_{\phi_i} C_2 = 2\epsilon\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$C_3 = \int_\Omega \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3 x \to \begin{cases} \delta\phi_0 = \partial_\rho C_3 = -\epsilon\rho^{-1}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\omega}), \\ \delta\alpha_i = \partial_{\mu_i} C_3 = \epsilon\rho^{-1}(\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{\omega}-\nabla\alpha_i\cdot\boldsymbol{B}), \\ \delta\mu_i = -\partial_{\alpha_i} C_3 = -\epsilon\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}, \\ \delta\phi_i = \partial_{\beta_i} C_3 = -\epsilon\rho^{-1}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}, \\ \delta\beta_i = -\partial_{\phi_i} C_3 = \epsilon(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega}-\nabla\frac{\beta_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}), \end{cases} \tag{3.5}$$

ただし $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{V}, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}+\phi_0$ とする。

3.2 クレブシュ表現のゲージ対称性

変数変換 (3.3)-(3.5) がなぜハミルトニアン H を保存するのかを考察する。(3.3)-(3.5) は $\delta\rho = 0$ という共通点がある。まず (3.3) について考える。(2.26) より磁場 $\boldsymbol{B}$ は ϕ_0 を含まないため磁場 $\boldsymbol{B}$ は変化しない。(2.25) より $\boldsymbol{V}$ は ϕ_0 を $\nabla\phi_0$ の形でしか含まないため、ϕ_0 が定数分ずれても $\boldsymbol{V}$ は変化しない。このことから (3.3) は物理変数 $\rho, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}$ を不変にする変数変換であることがわかる。このような物理変数を変化させないようなクレブシュ変数の変換をクレブシュ表現のゲージ変換と呼ぶ。次に (3.4) について考える。(2.26) より磁場 $\boldsymbol{B}$ は $\phi_0, \alpha_i, \beta_i$

を含まないため磁場 $\boldsymbol{B}$ は変化しない。$\boldsymbol{V}$ の変化を変化すると

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{V} &= -\nabla\delta\phi_0 - \frac{\mu_i}{\rho}\nabla\delta\alpha_i - \frac{\delta\beta_i}{\rho}\nabla\phi_i \\
&= \nabla\left(\frac{2\epsilon\mu_i}{\rho^2}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}\right) - \frac{\mu_i}{\rho}\nabla\left(\frac{2\epsilon}{\rho}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}\right) - \left(\frac{2\epsilon}{\rho}\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}\right)\nabla\phi_i \\
&= \frac{2\epsilon}{\rho}\left((\phi_i\cdot\boldsymbol{B})\,\nabla\frac{\mu_i}{\rho} - \left(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}\right)\nabla\phi_i\right) \\
&= \frac{2\epsilon}{\rho}\boldsymbol{B}\times\left(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\times\nabla\phi_i\right) \\
&= \frac{2\epsilon}{\rho}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B} \\
&= 0,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

となる。よって (3.4) もゲージ変換である。途中の変形でベクトル公式

$$
\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}, \tag{3.7}
$$

を用いた。最後に (3.5) について計算する。磁場 $\boldsymbol{B}$ の変化は

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{B} &= \nabla\frac{\delta\mu_i}{\rho}\times\nabla\phi_i + \nabla\frac{\mu_i}{\rho}\times\nabla\delta\phi_i \\
&= \nabla\times\left(\frac{\delta\mu_i}{\rho}\nabla\phi_i - \delta\phi_i\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\right) \\
&= \nabla\times\left(-\frac{\epsilon}{\rho}\left(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}\right)\nabla\phi_i + \frac{\epsilon}{\rho}\left(\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}\right)\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\right) \\
&= \nabla\times\left(\frac{\epsilon}{\rho}\boldsymbol{B}\times\left(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\times\nabla\phi_i\right)\right) \\
&= \nabla\times\left(\frac{\epsilon}{\rho}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

である。また、速度 $\boldsymbol{V}$ の変化は

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{V} =& -\nabla\delta\phi_0 - \frac{\delta\mu_i}{\rho}\nabla\alpha_i - \frac{\mu_i}{\rho}\nabla\delta\alpha_i - \frac{\delta\beta_i}{\rho}\nabla\phi_i - \frac{\beta_i}{\rho}\nabla\delta\phi_i \\
=& -\epsilon\nabla\left(\left(\frac{\mu_i}{\rho^2}\nabla\alpha_i + \frac{\beta_i}{\rho^2}\nabla\phi_i\right)\cdot\boldsymbol{B} - \frac{\mu_i}{\rho^2}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{\omega}\right) \\
& + \frac{\epsilon}{\rho}\left(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}\right)\nabla\alpha_i \\
& + \frac{\epsilon\mu_i}{\rho}\nabla\left(\frac{1}{\rho}\nabla\alpha_i\cdot\boldsymbol{B} - \frac{1}{\rho}\phi_i\cdot\boldsymbol{\omega}\right) \\
& + \frac{\epsilon}{\rho}\left(\nabla\frac{\beta_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B} - \nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)\nabla\phi_i \\
& + \frac{\epsilon\beta_i}{\rho}\nabla\left(\frac{1}{\rho}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}\right) \\
=& \frac{\epsilon}{\rho}\left(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}\right)\nabla\alpha_i - \frac{\epsilon}{\rho}\left(\nabla\alpha_i\cdot\boldsymbol{B}\right)\nabla\frac{\mu_i}{\rho} \\
& + \frac{\epsilon}{\rho}\left(\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{\omega}\right)\nabla\frac{\mu_i}{\rho} - \frac{\epsilon}{\rho}\left(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)\nabla\phi_i \\
& + \frac{\epsilon}{\rho}\left(\nabla\frac{\beta_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}\right)\nabla\phi_i - \frac{\epsilon}{\rho}\left(\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}\right)\nabla\frac{\beta_i}{\rho} \\
=& \frac{\epsilon}{\rho}\boldsymbol{B}\times\left(\nabla\alpha_i\times\nabla\frac{\mu_i}{\rho} + \nabla\phi_i\times\nabla\frac{\beta_i}{\rho}\right) + \frac{\epsilon}{\rho}\boldsymbol{\omega}\times\left(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\times\nabla\phi_i\right) \\
=& \frac{\epsilon}{\rho}\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{B}\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

である。以上より (3.5) もゲージ変換である。変数変換 (3.3)-(3.5) がハミルトニアン H を保存する理由は変数変換 (3.3)-(3.5) がゲージ変換であるからである。

クレブシュ変数のペアの数が $\nu = 1$ であるとき $\boldsymbol{B} = \nabla\frac{\mu_1}{\rho}\times\nabla\phi_1$ は $\nabla\frac{\mu_1}{\rho}$ や $\nabla\phi_1$ と直交するので (3.4)、(3.5) の各成分は 0 となる。つまり (3.4)、(3.5) は ν が 1 より大きいときに特有なゲージ変換である。このような性質を持つゲージ変換は今回初めて見つかった。これは

$\nu = 1$ のときそもそも

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \int_\Omega \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}^3 x \\
&= \int_\Omega \frac{\mu_1}{\rho} \nabla \phi_1 \cdot \left(\nabla \frac{\mu_1}{\rho} \times \nabla \phi_1 \right) \mathrm{d}^3 x = 0, \qquad (3.10) \\
C_3 &= \int_\Omega \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}^3 x \\
&= - \int_\Omega \left(\nabla \phi_0 + \frac{\mu_1}{\rho} \nabla \alpha_1 + \frac{\beta_1}{\rho} \nabla \phi_1 \right) \cdot \left(\nabla \frac{\mu_1}{\rho} \times \nabla \phi_1 \right) \mathrm{d}^3 x \\
&= - \int_\Omega \nabla \left(\phi_0 + \frac{\mu_1}{\rho} \alpha_1 \right) \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}^3 x \\
&= - \int_{\partial\Omega} \left(\phi_0 + \frac{\mu_1}{\rho} \alpha_1 \right) \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}^2 x = 0, \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

であることから説明できる。

3.3 ネーターチャージ

C_i たちはゲージ変換を生成する保存量であることがわかった。このとき C_i たちはネーターチャージとなるのだがそれを確認して行こう。

まず (3.3) について計算する。(3.3) が対称性であることを確認する。対称性とは変数変換でありかつその下でのラグランジアン密度の変化が $\delta\mathcal{L} = \partial_\nu \Lambda^\nu$ なる Λ が存在することだった。$\mathcal{L}$ は正準一次形式 θ の部分とハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ の部分とに分けられる。このうち後者は物理変数 $\rho, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}$ の関数であるためゲージ変換の下で不変である。よって

$$
\delta\theta = \partial_\nu \Lambda^\nu, \qquad (3.12)
$$

なる Λ^ν が存在すればよい。θ は ϕ_0 をその時間微分の形でしか含まない。よって (3.3) の下で明らかに $\delta\theta = 0$ である。すなわち $\Lambda^\mu = 0$ とすれば (3.12) が成り立つ。これで (3.3) にネー

ターの定理が適用できることがわかった。(2.47) よりネーターチャージを計算すると

$$\int_\Omega (\rho \times 1 - 0)\mathrm{d}^3 x = \int_\Omega \rho \mathrm{d}^3 x, \tag{3.13}$$

となる。これは C_1 と一致する。ただしネーターチャージの計算において ϵ は省略した。

次に (3.4) について計算する。途中に登場する変数を以下のように定義する:

$$A_0 = \sigma_i \dot{\phi}_i, \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{B}_0 = \dot{\boldsymbol{A}} - \nabla A_0 = \dot{\sigma}_i \nabla \phi_i - \dot{\phi}_i \nabla \sigma_i. \tag{3.15}$$

(3.4) のもとで θ の変化は

$$\begin{aligned}
\delta\theta &= \rho\delta\dot{\phi}_0 + \mu_i \delta\dot{\alpha}_i + \delta\beta\dot{\phi}_0 \\
&= \partial_t \left(\rho\delta\phi_0 + \mu_i\delta\alpha_i\right) - \delta\phi_0\dot{\rho} - \delta\alpha_i\dot{\mu}_i + \delta\beta_i\dot{\phi}_i \\
&= 2\epsilon\left(\left(\frac{\dot{\mu}_i}{\rho} - \frac{\mu_i\dot{\rho}}{\rho^2}\right)(\nabla\phi_i \cdot \boldsymbol{B}) - \dot{\phi}_i\left(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}\right)\right) \\
&= 2\epsilon\boldsymbol{B}\cdot\left(\dot{\sigma}_i\nabla\phi_i - \dot{\phi}_i\nabla\sigma_i\right) \\
&= 2\epsilon\boldsymbol{B}\cdot\left(\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla A_0\right) \\
&= -\epsilon\left(\partial_t\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right) - \nabla\cdot\left(A_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{A}\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

である。ただし最後の変形で

$$\partial_t\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right) = \dot{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{B}} = 2\dot{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{B} + \nabla\cdot\left(\dot{\boldsymbol{A}}\times\boldsymbol{A}\right), \tag{3.17}$$

$$\nabla A_0\cdot\boldsymbol{B} = \nabla\cdot\left(A_0\boldsymbol{B}\right) = -\nabla\cdot\left(\nabla A_0\times\boldsymbol{A}\right), \tag{3.18}$$

を用いた。よって

$$\Lambda^0 = -\epsilon\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}, \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \epsilon\left(A_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{A}\right), \tag{3.20}$$

と置けばよい。(2.47) よりネーターチャージを計算すると

$$\int_\Omega \left(0-(-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\right)\mathrm{d}^3x = \int_\Omega \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x, \tag{3.21}$$

となる。これは C_2 と一致する。

最後に (3.5) について計算する。途中に登場する変数を以下のように定義する:

$$v_0 = -\sigma_i\dot{\alpha}_i - \gamma_i\dot{\phi}_i, \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\boldsymbol{v}} - \nabla v_0. \tag{3.23}$$

(3.5) の下での θ の変化は

$$\begin{aligned}
\delta\theta &= \rho\delta\dot{\phi}_0 + \delta\mu_i\dot{\alpha}_i + \mu_i\delta\dot{\alpha}_i + \delta\beta_i\dot{\phi}_0 + \delta\beta\dot{\phi}_0 \\
&= \partial_t\left(\rho\delta\phi_0 + \mu_i\delta\alpha_i + \beta_i\delta\phi_i\right) - \delta\phi_0\dot{\rho} + \delta\mu_i\dot{\alpha}_i - \delta\alpha_i\dot{\mu}_i + \delta\beta_i\dot{\phi}_i - \delta\phi_i\dot{\beta}_i \\
&= \epsilon\left(\left(\dot{\sigma}_i\nabla\alpha_i + \dot{\gamma}_i\nabla\phi_i - \dot{\alpha}_i\nabla\sigma_i - \dot{\phi}_i\nabla\gamma_i\right)\cdot\boldsymbol{B} - \left(\dot{\sigma}_i\nabla\phi_i - \dot{\phi}_i\nabla\sigma_i\right)\cdot\boldsymbol{\omega}\right) \\
&= -\epsilon\left(\left(\dot{\boldsymbol{v}} - \nabla v_0\right)\cdot\boldsymbol{B} + \left(\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla A_0\right)\cdot\boldsymbol{\omega}\right) \\
&= -\epsilon\left(\partial_t\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\right) - \nabla\cdot\left(v_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{v}\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.24}$$

となる。ただし最後の変形で

$$\partial_t\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\right) = \dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{B}} = \dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{B} + \dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\omega} + \nabla\cdot\left(\dot{\boldsymbol{A}}\times\boldsymbol{v}\right) \tag{3.25}$$

$$\nabla A_0\cdot\boldsymbol{\omega} = \nabla\cdot\left(A_0\boldsymbol{\omega}\right) = -\nabla\cdot\left(\nabla A_0\times\boldsymbol{v}\right) \tag{3.26}$$

を用いた。よって

$$\Lambda^0 = \epsilon\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}, \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \epsilon\left(v_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{v}\right), \tag{3.28}$$

と置けばよい。(2.47) よりネーターチャージを計算すると

$$\int_\Omega (0 - (-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}))\,\mathrm{d}^3x = \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x, \tag{3.29}$$

となる。これは一見 $C_3 = \int_\Omega \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x$ と一致しない。しかし次の計算から一致することがわかる:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x - C_3 &= \int_\Omega \nabla\phi_0\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x \\ &= \int_\Omega \nabla\cdot(\phi_0\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}^3x \\ &= \int_{\partial\Omega} \phi_0\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}d^2x = 0.\end{aligned} \tag{3.30}$$

以上より非正準 MHD 系ではカシミール元だった保存量はゲージ変換に対応するネーターチャージに翻訳されたことがわかった。これは表 3.1 のようにまとめられる。

元のカシミール元	対応するゲージ変換
$\int_\Omega \rho\mathrm{d}^3x$	$\delta\phi_0 = \epsilon$
$\int_\Omega \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x$	$\delta\phi_0 = -\epsilon\rho^{-1}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\omega})$ $\delta\alpha_i = -\epsilon\rho^{-1}(\nabla\alpha_i\cdot\boldsymbol{B}-\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{\omega})$ $\delta\mu_i = -\epsilon\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}$ $\delta\phi_i = -\epsilon\rho^{-1}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}$ $\delta\beta_i = -\epsilon\left(\nabla\frac{\beta_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}-\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)$
$\int_\Omega \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x$	$\delta\phi_0 = -2\epsilon\rho^{-1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ $\delta\alpha_i = 2\epsilon\rho^{-1}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}$ $\delta\beta_i = 2\epsilon\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}$

表 3.1　元のカシミール元と対応するゲージ変換

3.4 正準化されたカシミール元の一般則

前のセクションでは非正準 MHD 系のカシミール元がすべてクレブシュ MHD 系ではゲージ対称性に対応したネーターチャージに変換されることを述べた。この関係は実は MHD 方程式で特別に成立するのではなく、任意の正準化によって結ばれる二つのハミルトン系の組において成り立つことがわかった。このセクションではその証明を行う。

まずは非正準な系でカシミール元だった保存量が正準な系ではゲージ変換を生成することを示す。あるハミルトン系をその系の状態変数とポアソン括弧とハミルトニアンによって指定する。正準化によって結ばれる二つのハミルトン系のうち非正準な系を $(u_n, \{,\}_n, H_n)$、正準な系を $(u_c, \{,\}_c, H_c)$ とおく。$u_n \in X_n, u_u \in X_c$ とする。非正準な系がカシミール元 $C \in C^\infty(X_n)$ を持つものとする。両系の状態変数は X_c から X_n への全射な写像 ψ により $u_n = \psi(u_c)$ の関係で結ばれているものとする。また両系のポアソン括弧は任意の $F, G \in C^\infty(X_n)$ に対し

$$\{F, G\}_n \circ \psi = \{F \circ \psi, G \circ \psi\}_c, \tag{3.31}$$

を満たすものとする。任意の $F \in C^\infty(X_n)$ に対し

$$\{C, F\}_n = 0, \tag{3.32}$$

なので、

$$\{C, F\}_n \circ \psi = \{C \circ \psi, F \circ \psi, \}_c = 0, \tag{3.33}$$

が成り立つ。よって

$$\{C \circ \psi, \psi\}_c = 0, \tag{3.34}$$

となる。よってカシミール元だったの保存量 $C \circ \psi$ が生成する変数変換 $u_c \to u_c + \delta u_c =$

$u_c + \epsilon \mathcal{J} \partial_{u_c} (C \circ \psi)$ は非正準な系の状態変数 $u_n = \psi(u_c)$ を変化させない。これはゲージ変換に他ならない。

次に C を保存量とすると、C が生成した変数変換は対称性であることを示す。$\mathcal{L}$ は正準一次形式 θ の部分とハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ の部分とに分けられる。C が保存量である時 $\{C, H\} = 0$ であることから $\delta H = 0$ である。リウヴィルの定理よりハミルトンベクトルの下で正準二次形式は変化しない。よって正準一次形式の変化は完全形式になる。以上よりラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の変化は完全形式になるので作用積分は変化しない。

最後に C がネーターチャージになることを示す。ただし $C = \int_\Omega f(u, \nabla u) \mathrm{d}^3 x$ の形を仮定する。状態変数を $u = (p, q)$、作用積分を $S = \int_D (p\dot{q} - \mathcal{H}) \, \mathrm{d}^4 x$ とする。C が生成する変数変換は

$$\delta p = -\epsilon \partial_q C = -\epsilon (f_q - \nabla \cdot (f_{\nabla q})), \tag{3.35}$$

$$\delta q = \epsilon \partial_q C = \epsilon (f_p - \nabla \cdot (f_{\nabla p})), \tag{3.36}$$

C が保存量であることから $\delta \mathcal{H} = 0$ である。ラグランジアン密度の変化は

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L} &= \delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} \\
&= \partial_t (p \delta q) - \epsilon \left((f_q - \nabla \cdot (f_{\nabla q})) \, \dot{q} + (f_p - \nabla \cdot (f_{\nabla p})) \, \dot{p} \right) \\
&= \partial_t (p \delta q) - \epsilon \left(f_u - \nabla \cdot (f_{\nabla u}) \right) \dot{u} \\
&= \partial_t (p \delta q - \epsilon f) - \epsilon \left(\dot{u} \nabla \cdot (f_{\nabla u}) + f_{\nabla u} \cdot \nabla \dot{u} \right) \\
&= \partial_t (p \delta q - \epsilon f) - \epsilon \nabla \cdot (\dot{u} f_{\nabla u}) = \partial_\nu \Lambda^\nu,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

となる。よって (2.47) よりネーターチャージは (ϵ を省略すると)

$$\int_\Omega f \mathrm{d}^3 x = C, \tag{3.38}$$

より C がネーターチャージになることが示せた。

3.5 局所保存則

C_1 と C_2 はそれぞれ密度 ρ とマグネティックヘリシティ密度 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ を全空間で積分したものだ。これらの拡張として流れ $\boldsymbol{V}$ に沿って動く領域 $\Omega'(t)$ 上で積分した物理量も保存する。(クロスヘリシティは保存しない。) これを局所保存則と呼ぶこととする。クレブシュ MHD 系において局所保存則について考える。

まず二つのスカラー場の集合

$$G_1 = \{a | \partial_t a + \boldsymbol{V}\cdot\nabla a = 0\}, \tag{3.39}$$

$$G_2 = \{\lambda | \partial_t \lambda + \nabla\cdot(\lambda\boldsymbol{V}) = 0\}, \tag{3.40}$$

を定義する。(2.38) より $\phi_i \in G_1$ である。また (2.35)、(2.37) より $\rho, \mu_i \in G_2$ である。任意の $\lambda \in G_2$ に対して $C = \int_\Omega \lambda \mathrm{d}^3x$ は保存量である。実際、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C &= \int_\Omega \dot{\lambda}\mathrm{d}^3x \\ &= -\int_\Omega \nabla\cdot(\lambda\boldsymbol{V})\,\mathrm{d}^3x \\ &= -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}^2x = 0, \end{aligned} \tag{3.41}$$

である。さて、簡単な計算から G_1, G_2 に属するスカラーたちには次の性質があることがわ

かる:

$$\lambda, \eta \in G_2, s, t \in \mathbb{R} \to s\lambda + t\eta \in G_2, \tag{3.42}$$

$$a, b \in G_1 \to f(a, b) \in G_1, \tag{3.43}$$

$$\lambda, \eta \in G_2 \to \frac{\lambda}{\eta} \in G_1, \tag{3.44}$$

$$a \in G_1, \lambda \in G_2 \to a\lambda \in G_2, \tag{3.45}$$

$$a, b, c \in G_1 \to \nabla a \cdot (\nabla b \times \nabla c) \in G_2. \tag{3.46}$$

ただし (3.44) の f は任意の滑らかな関数である。(3.44) より

$$\sigma_i = \frac{\mu_i}{\rho} \in G_1, \tag{3.47}$$

である。よって (3.43) と (3.45) より

$$\rho f(\sigma_i, \phi_i) \in G_2, \tag{3.48}$$

である。よって

$$C_4 = \int_\Omega \rho f(\sigma_i, \phi_i) \mathrm{d}^3 x, \tag{3.49}$$

は保存量である。(3.45)、(3.46) より任意の i, j, k, l について

$$\sigma_i \nabla\phi_j \cdot \nabla\sigma_k \times \nabla\phi_l \in G_2 \tag{3.50}$$

である。$i = j, k = l$ の場合について足し合わせると

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \in G_2 \tag{3.51}$$

である。さらに (3.45) より

$$f(\sigma_i, \phi_i)\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \in G_2 \tag{3.52}$$

である。以上より

$$C_5 = \int_\Omega f(\sigma_i, \phi_i)\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x, \tag{3.53}$$

は保存量である。

このように G_1 と G_2 の元をどんどん作っていくことで保存量を作っていくことができる。しかし今回はとりあえず C_4 と C_5 に着目する。$\partial_t f + \boldsymbol{V}\cdot\nabla f = 0$ であることから $f(\sigma_i, \phi_i)$ は流れ $\boldsymbol{V}$ に凍り付いたスカラー場である。よって C_4 と C_5 はそれぞれ質量とクロスヘリシティの局所保存則を表していると考えられる。このことは例えば質量の局所保存が台関数

$$g(x, \Omega(t)) = \begin{cases} 1 \ (x \in \Omega'(t)), \\ 0 \ (x \notin \Omega'(t)), \end{cases} \tag{3.54}$$

を用いて

$$\int_{\Omega'(t)} \rho\mathrm{d}^3x = \int_\Omega g\rho\mathrm{d}^3x, \tag{3.55}$$

と表されることを考えると理解しやすいだろう。

さて、C_4,C_5 に対しその対称性を計算してみよう。まず $C_4 = \int_\Omega \rho f(\sigma_i, \phi_i)\mathrm{d}^3x$ について計算すると、

$$\begin{cases} \delta\phi_0 = \epsilon\left(f - \frac{\mu_i}{\rho}f_{\sigma_i}\right), \\ \delta\alpha_i = \epsilon f_{\sigma_i}, \\ \delta\beta_i = -\epsilon\rho f_{\phi_i}, \end{cases} \tag{3.56}$$

となる。f_{σ_i}, f_{ϕ_i} はそれぞれ f の σ_i, ϕ_i についての微分を表す。(3.56) がゲージ変換か確かめ

よう。(3.56) の下で $\rho, \boldsymbol{B}$ は明らかに変化しない。$\boldsymbol{V}$ の変化を計算する:

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{V} &= -\nabla \delta \phi_0 - \frac{\mu_i}{\rho} \nabla \delta \alpha_i - \frac{\delta \beta_i}{\rho} \nabla \phi_i \\
&= -\epsilon \left(\nabla \left(f - \frac{\mu_i}{\rho} f_{\sigma_i} \right) + \frac{\mu_i}{\rho} \nabla f_{\sigma_i} - f_{\phi_i} \nabla \phi_i \right) \\
&= -\epsilon \left(\nabla f - f_{\sigma_i} \nabla \sigma_i - f_{\phi_i} \nabla \phi_i \right) \\
&= -\epsilon \left(\nabla f - \nabla f \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

よって (3.56) はゲージ変換である。次に $C_5 = \int_\Omega f(\sigma_i, \phi_i) \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}^3 x$ に対する対称性は

$$
\begin{cases}
\delta \phi_0 = -\epsilon \frac{\mu_i}{\rho^2} \left(f_{\sigma_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \nabla \phi_i \cdot (f \boldsymbol{B} + \nabla \times (f \boldsymbol{A})) \right), \\
\delta \alpha_i = \epsilon \rho^{-1} \left(f_{\sigma_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \nabla \phi_i \cdot (f \boldsymbol{B} + \nabla \times (f \boldsymbol{A})) \right), \\
\delta \beta_i = \epsilon \left(-f_{\phi_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \nabla \cdot \left(\frac{\mu_i}{\rho} \left(f \boldsymbol{B} + \nabla \times (f \boldsymbol{A}) \right) \right) \right),
\end{cases} \tag{3.58}
$$

である。こちらもやはり $\rho, \boldsymbol{B}$ は変化させない。$\boldsymbol{V}$ の変化を計算する:

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{V} =& - \nabla \delta \phi_0 - \frac{\mu_i}{\rho} \nabla \delta \alpha_i - \frac{\delta \beta_i}{\rho} \nabla \phi_i \\
=& - \nabla \left(\delta \phi_0 + \frac{\mu_i}{\rho} \delta \alpha_i \right) + \delta \alpha_i \nabla \frac{\mu_i}{\rho} - \frac{\delta \beta_i}{\rho} \nabla \phi_i \\
=& \frac{\epsilon}{\rho} \left(f_{\sigma_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \nabla \phi_i \cdot (f \boldsymbol{B} + \nabla \times (f \boldsymbol{A})) \right) \nabla \sigma_i \\
& + \frac{\epsilon}{\rho} \left(f_{\phi_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \nabla \cdot \left(\sigma_i \left(f \boldsymbol{B} + \nabla \times (f \boldsymbol{A}) \right) \right) \right) \nabla \phi_i \\
=& \frac{\epsilon}{\rho} \left(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \nabla f - \sigma_i \nabla \cdot (f \boldsymbol{B}) \cdot \nabla \phi_i \right) \\
& + \frac{\epsilon}{\rho} \left(\left(\nabla \phi_i \cdot (f \boldsymbol{B} + \nabla \times (f \boldsymbol{A})) \right) \nabla \sigma_i - \left(\nabla \sigma_i \cdot (f \boldsymbol{B} + \nabla \times (f \boldsymbol{A})) \right) \nabla \phi_i \right) \\
=& \frac{\epsilon}{\rho} \left(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \nabla f - \left(\nabla \cdot (f \boldsymbol{B}) \right) \boldsymbol{A} \right) + \frac{\epsilon}{\rho} \left(f \boldsymbol{B} + \nabla \times (f \boldsymbol{A}) \right) \times \left(\nabla \sigma_i \times \nabla \phi_i \right) \\
=& \frac{\epsilon}{\rho} \left(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \nabla f - \left(\nabla f \cdot \boldsymbol{B} \right) \boldsymbol{A} + \left(f \boldsymbol{B} + \nabla \times (f \boldsymbol{A}) \right) \times \boldsymbol{B} \right) \\
=& \frac{\epsilon}{\rho} \left(\boldsymbol{B} \times (\nabla f \times \boldsymbol{A}) + (\nabla f \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{B} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

よって (3.58) はゲージ変換である。以上より総質量やマグネティックヘリシティの局所保存を表す保存量もやはりゲージ変換に対応するネーターチャージに翻訳されたことがわかった。

これは表 3.2 のようにまとめられる。

局所保存則を表す打保存量	対応するゲージ変換
$\int_\Omega \rho f(\sigma_i, \phi_i) \mathrm{d}^3 x$	$\delta\phi_0 = \epsilon\left(f - \frac{\mu_i}{\rho} f_{\sigma_i}\right)$ $\delta\alpha_i = \epsilon f_{\sigma_i}$ $\delta\beta_i = -\epsilon\rho f_{\phi_i}$
$\int_\Omega f(\sigma_i, \phi_i) \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \mathrm{d}^3 x$	$\delta\phi_0 = -\epsilon\frac{\mu_i}{\rho^2}\left(f_{\sigma_i}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \nabla\phi_i\cdot\left(f\boldsymbol{B} + \nabla\times\left(f\boldsymbol{A}\right)\right)\right)$ $\delta\alpha_i = \epsilon\rho^{-1}\left(f_{\sigma_i}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \nabla\phi_i\cdot\left(f\boldsymbol{B} + \nabla\times\left(f\boldsymbol{A}\right)\right)\right)$ $\delta\beta_i = \epsilon\left(-f_{\phi_i}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \nabla\cdot\left(\frac{\mu_i}{\rho}\left(f\boldsymbol{B} + \nabla\times\left(f\boldsymbol{A}\right)\right)\right)\right)$

表 3.2　局所保存則と対応するゲージ変換

第 4 章

ゲージ変換を求める方程式とその解法

前の章ではクレブシュ表現のゲージ変換は保存量と関係があることを述べた。このことはゲージ変換について詳しく調べる動機になる。クレブシュ表現のゲージ変換全体を求めるには $\delta\rho = 0, \delta\boldsymbol{V} = \delta\boldsymbol{B} = 0$ を解けばよい。これは 1 階の空間微分を含む偏微分方程式になる。この方程式は線形な代数方程式に帰着させて一般解を求められることがわかった。そこでこの章では方程式の解法とゲージ変換全体の具体形を示す。この章では 3 次元のベクトル場を表すための最小限の数である 2 ペアを用いる。クレブシュ変数のペアの数を増やしていくとその分ゲージ自由度は増えていくが、ゲージ変換の求め方は変わらない。

4.1 理想流体の場合

まずは簡単なケースとして登場するベクトル場の数が 1 つのみの場合

$$\boldsymbol{V} = -\nabla\phi_0 - \sigma_1\nabla\phi_1 - \sigma_2\nabla\phi_2, \tag{4.1}$$

について計算する。これは理想 (中性) 流体のクレブシュ表現に相当する。このセクションでは他のセクションと同じ文字を使っているが定義は異なっているので注意してほしい。微小変数変換 $u \to u + \delta u$ がゲージ変換であるための条件式は

$$\delta \boldsymbol{V} = -\nabla\delta\phi_0 - \delta\sigma_1\nabla\phi_1 - \sigma_1\nabla\delta\phi_1 - \delta\sigma_2\nabla\phi_2 - \sigma_2\nabla\delta\phi_2 = 0, \tag{4.2}$$

である。これを次のように変形することで任意微小スカラー ε_1 を含む線形代数方程式に帰着することができる:

$$\delta\phi_1\nabla\sigma_1 + \delta\phi_2\nabla\sigma_2 - \delta\sigma_1\nabla\phi_1 - \delta\sigma_2\nabla\phi_2 = \nabla\varepsilon_1, \tag{4.3}$$

$$\delta\phi_0 + \sigma_1\delta\phi_1 + \sigma_2\delta\phi_2 = \varepsilon_1, \tag{4.4}$$

これは空間の各点で $\nabla\sigma_i, \nabla\phi_i$ 達のうち 3 つを選んで一次独立にできるとき解を持つ。以降の計算では簡単のためどの 3 つを選んだ場合でも空間の各点で一次独立になるような場合を考える。(4.3) の一般解は (4.3) の特殊解と同次方程式

$$\delta\phi_1\nabla\sigma_1 + \delta\phi_2\nabla\sigma_2 - \delta\sigma_1\nabla\phi_1 - \delta\sigma_2\nabla\phi_2 = 0, \tag{4.5}$$

の一般解の和である。ベクトル恒等式

$$(a \cdot b \times c)d - (d \cdot a \times b)c + (c \cdot d \times a)b - (b \cdot c \times d)a = 0, \tag{4.6}$$

より、(4.5) の一般解は任意微小スカラー ε_2 を用いて

$$\begin{cases} \delta\sigma_1 = \varepsilon_2[\sigma_1, \phi_2, \sigma_2] = -\varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_1, \\ \delta\sigma_2 = \varepsilon_2[\sigma_2, \phi_1, \sigma_1] = -\varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_2, \\ \delta\phi_1 = \varepsilon_2[\phi_2, \sigma_2, \phi_1] = -\varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_1, \\ \delta\phi_2 = \varepsilon_2[\phi_1, \sigma_1, \phi_2] = -\varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_2, \end{cases} \tag{4.7}$$

と表せる。ただし $[a_1, a_2, a_3] = \nabla a_1 \cdot (\nabla a_2 \times \nabla a_3)$ である。また、特殊解は (4.6) を用いて

$$\begin{cases} \delta\sigma_1 = 0, \\ \delta\sigma_2 = R^{-1}[\varepsilon_1, \sigma_1, \sigma_2], \\ \delta\phi_1 = R^{-1}[\varepsilon_1, \phi_2, \sigma_2], \\ \delta\phi_2 = R^{-1}[\varepsilon_1, \sigma_1, \phi_2], \end{cases} \tag{4.8}$$

を作ることができる。($\delta\sigma_1 = 0$ となるものを作った。) ここで $R = [\sigma_1, \phi_2, \sigma_2]$ である。以上より (4.2) の一般解は

$$\begin{cases} \delta\phi_0 = \varepsilon_1 - \sigma_1\delta\phi_1 - \sigma_2\delta\phi_2, \\ \delta\sigma_1 = -\varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_1, \\ \delta\sigma_2 = -\varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_2 + R^{-1}[\varepsilon_1, \sigma_1, \sigma_2], \\ \delta\phi_1 = -\varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_1 + R^{-1}[\varepsilon_1, \phi_2, \sigma_2], \\ \delta\phi_2 = -\varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_2 + R^{-1}[\varepsilon_1, \sigma_1, \phi_2], \end{cases} \tag{4.9}$$

である。(4.9) が含む任意微小スカラーの数は 2 つである。これはクレブシュ変数の数が 5 つでベクトル $\boldsymbol{V}$ の成分の数が 3 つであり、さらに $\nabla\sigma_i, \nabla\phi_i$ 達が縮退しないという仮定を置いて計算していることからことから納得のいく結果であると言える。(4.9) を独立な自由度 ε_i ごとにまとめると表 4.1 のようになる。

ε_1	ε_2
$\delta\phi_0 = \varepsilon_1 - \sigma_1\delta\phi_1 - \sigma_2\delta\phi_2$	$\delta\phi_0 = -\sigma_1\delta\phi_1 - \sigma_2\delta\phi_2$
$\delta\sigma_1 = 0$	$\delta\sigma_1 = \varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_1$
$\delta\sigma_2 = R^{-1}[\varepsilon_1, \phi_2, \sigma_2]$	$\delta\sigma_2 = \varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_2$
$\delta\phi_1 = R^{-1}[\varepsilon_1, \sigma_1, \sigma_2]$	$\delta\phi_1 = \varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_1$
$\delta\phi_2 = R^{-1}[\varepsilon_1, \sigma_1, \phi_2]$	$\delta\phi_2 = \varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_2$

表 4.1　理想流体のタイプのクレブシュ表現のゲージ変換

4.2 理想 MHD の場合

理想 MHD では速度 $\boldsymbol{V}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ がそれぞれ (2.25)、(2.26) と表される。微小変数変換 $u \to u + \delta u$ がゲージ変換であるための条件式は

$$\delta\boldsymbol{V} = -\nabla\delta\phi_0 - \delta\sigma_i\nabla\alpha_i - \sigma_i\nabla\delta\alpha_i - \delta\gamma_i\nabla\phi_i - \gamma_i\nabla\delta\phi_i = 0, \tag{4.10}$$

$$\delta\boldsymbol{B} = \nabla\delta\sigma_i \times \nabla\phi_i + \nabla\sigma_i \times \nabla\delta\phi_i = 0, \tag{4.11}$$

である。ここで (4.11) は (4.2) の各辺に $\nabla\times$ をかけて $\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{B}$ と定義直したものである。よって (4.9) より

$$\begin{cases} \delta\sigma_1 = -\varepsilon_2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_1, \\ \delta\sigma_2 = -\varepsilon_2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_2 + R^{-1}[\varepsilon_1, \sigma_1, \sigma_2], \\ \delta\phi_1 = -\varepsilon_2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_1 + R^{-1}[\varepsilon_1, \phi_2, \sigma_2], \\ \delta\phi_2 = -\varepsilon_2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_2 + R^{-1}[\varepsilon_1, \sigma_1, \phi_2], \end{cases} \tag{4.12}$$

である。このもとで (4.10) を $\delta\phi_0, \alpha_i, \gamma_i$ について解く。(4.10) は次のように変形できる:

$$\delta\alpha_1\nabla\sigma_1 + \delta\alpha_2\nabla\sigma_2 - \delta\gamma_1\nabla\phi_1 - \delta\gamma_2\nabla\phi_2 = \boldsymbol{a}, \tag{4.13}$$

$$\delta\phi_0 + \sigma_i\delta\alpha_i + \gamma_i\delta\phi_i = \varepsilon_3, \tag{4.14}$$

ただし

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} =& \nabla\varepsilon_3 + \delta\sigma_i\nabla\alpha_i - \delta\phi_i\nabla\gamma_i, \\ =& \nabla\varepsilon_3 - \varepsilon_2\left(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_i\right)\nabla\alpha_i + \varepsilon_2\left(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_i\right)\nabla\gamma_i \\ &+ R^{-1}\left([\varepsilon_1, \sigma_1, \sigma_2]\nabla\alpha_2 - [\varepsilon_1, \phi_2, \sigma_2]\nabla\gamma_1 - [\varepsilon_1, \sigma_1, \phi_2]\nabla\gamma_2\right), \end{aligned} \tag{4.15}$$

である。(4.13)、(4.14) は任意微小スカラー ε_3 を含む $\delta\phi_0, \alpha_i, \gamma_i$ についての一次式である。これは空間の各点で $\nabla\alpha_i, \nabla\gamma_i$ 達のうち 3 つを選んで一次独立にできるとき解を持つ。以降の

計算では簡単のためどの 3 つを選んだ場合でも空間の各点で一次独立になるような場合を考える。

$$\boldsymbol{a}_1 = \nabla\varepsilon_3 + R^{-1}\left([\varepsilon_1,\sigma_1,\sigma_2]\nabla\alpha_2 - [\varepsilon_1,\phi_2,\sigma_2]\nabla\gamma_1 - [\varepsilon_1,\sigma_1,\phi_2]\nabla\gamma_2\right), \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = -\varepsilon_2\left(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_i\right)\nabla\alpha_i + \varepsilon_2\left(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_i\right)\nabla\gamma_i, \tag{4.17}$$

とおく。(4.13) の一般解は

$$\delta\alpha_1\nabla\sigma_1 + \delta\alpha_2\nabla\sigma_2 - \delta\gamma_1\nabla\phi_1 - \delta\gamma_2\nabla\phi_2 = \boldsymbol{a}_1, \tag{4.18}$$

の特殊解と

$$\delta\alpha_1\nabla\sigma_1 + \delta\alpha_2\nabla\sigma_2 - \delta\gamma_1\nabla\phi_1 - \delta\gamma_2\nabla\phi_2 = \boldsymbol{a}_2, \tag{4.19}$$

の特殊解と同次方程式

$$\delta\alpha_1\nabla\sigma_1 + \delta\alpha_2\nabla\sigma_2 - \delta\gamma_1\nabla\phi_1 - \delta\gamma_2\nabla\phi_2 = 0, \tag{4.20}$$

の一般解の和である。まず (4.18) の特殊解は (4.6) を用いて

$$\begin{cases} \delta\alpha_1 = R^{-1}(\boldsymbol{a}_1\cdot\nabla\phi_2\times\nabla\sigma_2), \\ \delta\alpha_2 = R^{-1}(\boldsymbol{a}_1\cdot\nabla\sigma_1\times\nabla\phi_2), \\ \delta\gamma_1 = 0, \\ \delta\gamma_2 = R^{-1}(\boldsymbol{a}_1\cdot\nabla\sigma_1\times\nabla\sigma_2), \end{cases} \tag{4.21}$$

を作ることができる。($\delta\gamma_1 = 0$ となるようなものを作った。) 次に (4.19) の特殊解を作る。ベクトル恒等式 (3.7) を用いて (4.17) を変形する:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_2 =& -\varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha_i)\nabla\sigma_i - \varepsilon\boldsymbol{B}\times(\nabla\alpha_i\times\nabla\sigma_i) \\
&+\varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\gamma_i)\nabla\phi_i + \varepsilon_2\boldsymbol{B}\times(\nabla\gamma_i\times\nabla\phi_i) \\
=& -\varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha_i)\nabla\sigma_i + \varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\gamma_i)\nabla\phi_i - \varepsilon_2\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\omega} \\
=& -\varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha_i)\nabla\sigma_i + \varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\gamma_i)\nabla\phi_i + \varepsilon_2\boldsymbol{\omega}\times(\nabla\sigma_i\times\nabla\phi_i) \\
=& -\varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha_i)\nabla\sigma_i + \varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\gamma_i)\nabla\phi_i \\
&+\varepsilon_2(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_i)\nabla\sigma_i - \varepsilon_2(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_i)\nabla\phi_i \\
=&\varepsilon_2(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_i - \boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha_i)\nabla\sigma_i - \varepsilon_2(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_i - \boldsymbol{B}\cdot\nabla\gamma_i)\nabla\phi_i.
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

よって

$$
\begin{cases}
\delta\alpha_i = \varepsilon_2(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_i - \boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha_i), \\
\delta\gamma_i = \varepsilon_2(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_i - \boldsymbol{B}\cdot\nabla\gamma_i),
\end{cases}
\tag{4.23}
$$

は (4.19) の特殊解である。最後に (4.20) の一般解を求める。(4.6) を用いると、(4.20) の一般解は任意微小スカラー ε_4 を用いて

$$
\begin{cases}
\delta\alpha_1 = \varepsilon_4[\phi_2,\sigma_2,\phi_1] = -\varepsilon_4\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_1, \\
\delta\alpha_2 = \varepsilon_4[\phi_1,\sigma_1,\phi_2] = -\varepsilon_4\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_2, \\
\delta\gamma_1 = \varepsilon_4[\sigma_1,\phi_2,\sigma_2] = -\varepsilon_4\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_1, \\
\delta\gamma_2 = \varepsilon_4[\sigma_2,\phi_1,\sigma_1] = -\varepsilon_4\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_2,
\end{cases}
\tag{4.24}
$$

と表せる。また、(4.14) より

$$
\delta\phi_0 = \varepsilon_3 - \sigma_i\delta\alpha_i - \gamma_i\delta\phi_i,
\tag{4.25}
$$

である。以上より (4.10)、(4.11) の一般解は

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\delta\phi_0 = \varepsilon_3 - \gamma_i\delta\phi_i - \sigma_i\delta\alpha_i,\\
&\delta\sigma_1 = -\varepsilon_2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_1,\\
&\delta\sigma_2 = -\varepsilon_2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_2 + R^{-1}[\varepsilon_1,\sigma_1,\sigma_2],\\
&\delta\alpha_1 = -\varepsilon_4\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_1 - \varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha_1 - \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_1) + R^{-1}\boldsymbol{a}_1\cdot\nabla\phi_2\times\nabla\sigma_2,\\
&\delta\alpha_2 = -\varepsilon_4\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_2 - \varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha_2 - \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_2) + R^{-1}\boldsymbol{a}_1\cdot\nabla\sigma_1\times\nabla\phi_2,\\
&\delta\gamma_1 = -\varepsilon_4\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_1 - \varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\gamma_1 - \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_1),\\
&\delta\gamma_2 = -\varepsilon_4\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_2 - \varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\gamma_2 - \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_2) + R^{-1}\boldsymbol{a}_1\cdot\nabla\sigma_1\times\nabla\sigma_2,\\
&\delta\phi_1 = -\varepsilon_2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_1 + R^{-1}[\varepsilon_1,\phi_2,\sigma_2],\\
&\delta\phi_2 = -\varepsilon_2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_2 + R^{-1}[\varepsilon_1,\sigma_1,\phi_2],
\end{aligned}
\right.
\tag{4.26}
$$

となる。ただし

$$
\boldsymbol{a}_1 = \nabla\varepsilon_3 + R^{-1}\left([\varepsilon_1,\sigma_1,\sigma_2]\nabla\alpha_2 - [\varepsilon_1,\phi_2,\sigma_2]\nabla\gamma_1 - [\varepsilon_1,\sigma_1,\phi_2]\nabla\gamma_2\right),
\tag{4.27}
$$

である。(4.26) が含む任意微小スカラーの数は 4 つである。これはクレブシュ変数の数が 9 つであり、ベクトル $\boldsymbol{V},\boldsymbol{B}$ の成分の数が 6、さらに $\boldsymbol{B}$ には $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ という条件が課されていることを考えると納得のいく結果であると言える。

(4.26) はゲージ変換全体なので前章で登場したゲージ変換は ε_i 達をうまく選べば作れるはずだ。実際 $\varepsilon_3=\epsilon$ で他を 0 としたとき (3.3)、$\varepsilon_4=\frac{2\epsilon}{\rho}$ で他を 0 としたとき (3.4)、$\varepsilon_2=\frac{\epsilon}{\rho}$ で他を 0 としたとき (3.5) が得られる。

(4.26) を独立な自由度 ε_i ごとにまとめると表 4.2 のようになる。

ε_1
$\delta\phi_0 = -\gamma_i\delta\phi_i - \sigma_i\delta\alpha_i$ $\delta\sigma_2 = R^{-1}[\varepsilon_1, \sigma_1, \sigma_2]$ $\delta\alpha_1 = R^{-2}([\varepsilon_1, \sigma_1, \sigma_2][\alpha_2, \phi_2, \sigma_2] - [\varepsilon_1, \phi_2, \sigma_2,][\gamma_1, \phi_2, \sigma_2] - [\varepsilon_1, \sigma_1, \phi_2][\gamma_2, \phi_2, \sigma_2])$ $\delta\alpha_2 = R^{-2}([\varepsilon_1, \sigma_1, \sigma_2][\alpha_2, \sigma_1, \phi_2] - [\varepsilon_1, \phi_2, \sigma_2,][\gamma_1, \sigma_1, \phi_2] - [\varepsilon_1, \sigma_1, \phi_2][\gamma_2, \sigma_1, \phi_2])$ $\delta\gamma_2 = R^{-2}([\varepsilon_1, \sigma_1, \sigma_2][\alpha_2, \sigma_1, \sigma_2] - [\varepsilon_1, \phi_2, \sigma_2,][\gamma_1, \sigma_1, \sigma_2] - [\varepsilon_1, \sigma_1, \phi_2][\gamma_2, \sigma_1, \sigma_2])$ $\delta\phi_1 = R^{-1}[\varepsilon_1, \phi_2, \sigma_2]$ $\delta\phi_2 = R^{-1}[\varepsilon_1, \sigma_1, \phi_2]$
ε_2
$\delta\phi_0 = -\gamma_i\delta\phi_i - \sigma_i\delta\alpha_i$ $\delta\sigma_1 = -\varepsilon_2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_1$ $\delta\sigma_2 = -\varepsilon_2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_2$ $\delta\alpha_1 = -\varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha_1 - \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_1)$ $\delta\alpha_2 = -\varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha_2 - \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\phi_2)$ $\delta\gamma_1 = -\varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\gamma_1 - \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_1)$ $\delta\gamma_2 = -\varepsilon_2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\gamma_2 - \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\sigma_2)$ $\delta\phi_1 = -\varepsilon_2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_1$ $\delta\phi_2 = -\varepsilon_2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_2$
ε_3
$\delta\phi_0 = \varepsilon_3 - \sigma_i\delta\alpha_i$ $\delta\alpha_1 = R^{-1}[\varepsilon_3, \phi_2, \sigma_2]$ $\delta\alpha_2 = R^{-1}[\varepsilon_3, \sigma_1, \phi_2]$ $\delta\gamma_2 = R^{-1}[\varepsilon_3, \sigma_1, \sigma_2]$
ε_4
$\delta\phi_0 = -\sigma_i\delta\alpha_i$ $\delta\alpha_1 = -\varepsilon_4\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_1$ $\delta\alpha_2 = -\varepsilon_4\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi_2$ $\delta\gamma_1 = -\varepsilon_4\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_1$ $\delta\gamma_2 = -\varepsilon_4\boldsymbol{B}\cdot\nabla\sigma_2$

表 4.2　MHD のタイプのクレブシュ表現のゲージ変換

4.3　ゲージ変換が対称性となる条件

前章で登場したゲージ変換はどれも系の対称性であった。しかしこれはゲージ変換一般には成り立たない。例えば (4.26) において $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ で ε_4 のみが存在する場合についてラ

グランジアン密度 $\mathcal{L}$ の変化を計算する:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \delta\theta \\
&= \rho\delta\dot{\phi}_0 + \mu_i\delta\dot{\alpha}_i + \delta\beta\dot{\phi}_0 \\
&= \partial_t\left(\rho\delta\phi_0 + \mu_i\delta\alpha_i\right) - \delta\phi_0\dot{\rho} - \delta\alpha_i\dot{\mu}_i + \delta\beta_i\dot{\phi}_i \\
&= \rho\varepsilon_4\left(\left(\frac{\dot{\mu}_i}{\rho} - \frac{\mu_i\dot{\rho}}{\rho^2}\right)\left(\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}\right) - \dot{\phi}_i\left(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}\right)\right) \\
&= 2\varepsilon_4'\boldsymbol{B}\cdot\left(\dot{\sigma}_i\nabla\phi_i - \dot{\phi}_i\nabla\sigma_i\right) \\
&= 2\varepsilon_4'\boldsymbol{B}\cdot\left(\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla A_0\right) \\
&= -\varepsilon_4'\left(\partial_t\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right) - \nabla\cdot\left(A_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{A}\right)\right),
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

ただし

$$\varepsilon_4' = \frac{\rho\varepsilon_4}{2}, \tag{4.29}$$

$$\delta\mu_i = \rho\delta\sigma_i, \tag{4.30}$$

$$\delta\beta_i = \rho\delta\gamma_i, \tag{4.31}$$

である。ε_4 が任意の微小スカラーであったことから ε_4' も任意の微小スカラーである。よって (4.28) は一般に完全形式にならない。(ε_2' が定数ならば微分を通過できるので (3.4) のように完全形式になる。) 作用積分は正準一次形式 θ の部分とハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ の部分とに分けられるが、正準一次形式は物理変数で書かれていないためゲージ変換が必ずしも対称性になるわけではないのだ。このセクションでは前のセクションで求めたゲージ変換の下での $\delta\mathcal{L}$ を計算し、ゲージ変換が対称性となる条件について述べる。ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ はゲージ変換の下で変化しないので、

$$\delta\mathcal{L} = \delta\theta, \tag{4.32}$$

である。$\delta\mathcal{L}$ のうち ε_i を含む項を $\delta\mathcal{L}_i$ とおく。各 $\delta\mathcal{L}_i$ を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_1 = \frac{\rho}{R^2}([\varepsilon_1,\sigma_1,\sigma_2][\alpha_2,\sigma_1,\phi_2,\sigma_2] - [\varepsilon_1,\phi_2,\sigma_2][\gamma_1,\sigma_1,\phi_2,\sigma_2] \\ -[\varepsilon_1,\sigma_1,\phi_2][\gamma_2,\sigma_1,\phi_2,\sigma_2]),\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\delta\mathcal{L}_2 = -\varepsilon_2'\left(\partial_t\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\right) - \nabla\cdot\left(v_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{v}\right)\right), \tag{4.34}$$

$$\delta\mathcal{L}_3 = \frac{\rho}{R}[\varepsilon_3,\sigma_1,\phi_2,\sigma_2], \tag{4.35}$$

$$\delta\mathcal{L}_4 = -\varepsilon_4'\left(\partial_t\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right) - \nabla\cdot\left(A_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{A}\right)\right), \tag{4.36}$$

である。ただし

$$\varepsilon_2' = \frac{\rho\varepsilon_2}{\rho}, \tag{4.37}$$

$$[a,b,c,d] = \det\begin{pmatrix} a_t & b_t & c_t & d_t \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{pmatrix}, \tag{4.38}$$

である。途中の式変形で

$$\begin{aligned}[a,b,c,d] &= \det\begin{pmatrix} a_t & b_t & c_t & d_t \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{pmatrix} \\ &= \dot{a}[b,c,d] - \dot{b}[a,c,d] + \dot{c}[a,b,d] - \dot{d}[a,b,c],\end{aligned} \tag{4.39}$$

を用いた。ゲージ変換 (4.26) が対称性であるためには

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = &\sum_i \delta\mathcal{L}_i \\
&= \frac{\rho}{R^2}[\varepsilon_1,\sigma_1,\sigma_2][\alpha_2,\sigma_1,\phi_2,\sigma_2] \\
&- \frac{\rho}{R^2}[\varepsilon_1,\phi_2,\sigma_2][\gamma_1,\sigma_1,\phi_2,\sigma_2] \\
&- \frac{\rho}{R^2}[\varepsilon_1,\sigma_1,\phi_2][\gamma_2,\sigma_1,\phi_2,\sigma_2] \\
&- \varepsilon_2'\left(\partial_t\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\right) - \nabla\cdot\left(v_0\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{v}\right)\right) \\
&+ \frac{\rho}{R}[\varepsilon_3,\sigma_1,\phi_2,\sigma_2] \\
&- \varepsilon_4'\left(\partial_t\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right) - \nabla\cdot\left(A_0\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{A}\right)\right),
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

が完全形式になればよい。

(4.40) が完全形式になる $\varepsilon_1,\varepsilon_2',\varepsilon_3,\varepsilon_4'$ 全てを求めるのは難しい。ここでは具体例をいくつか挙げていくことにする。最も簡単な例として、$\varepsilon_1,\varepsilon_2',\varepsilon_3,\varepsilon_4'$ が定数の場合は (4.40) は完全形式となる。(4.26) は ε_3 が定数で他が 0 のとき総質量、ε_2' が定数で他が 0 のときクロスヘリシティ、ε_4' が定数で他が 0 のときマグネティックヘリシティに対応するゲージ対称性になる。ε_1 が定数で他が 0 のときはそもそも (4.26) 自体が 0 となる。これはベクトルポテンシャルのクレブシュ表現を $\boldsymbol{A}=\nabla\phi_0'+\sigma_i\nabla\phi_i$ とせずに $\boldsymbol{A}=\sigma_i\nabla\phi_i$ としていることに起因する。$\boldsymbol{A}=\nabla\phi_0'+\sigma_i\nabla\phi_i$ とおき $\delta\boldsymbol{A}=0$ を課せば $\delta\phi_0'=\varepsilon_1-\sigma_i\delta\phi_i$ となる。そして $\varepsilon_1=Const.$ のゲージ変換は $\delta\phi_0'=Const.$ となる。しかし今回扱っている系では ϕ_0' の自由度が縮退しているためこのゲージ自由度も縮退しているのだ。

第 5 章

結論

本研究では MHD 方程式を例にとり非正準な系のカシミール元はクレブシュ表現を通じてゲージ対称性が生み出すネーターチャージへと翻訳されることを確かめた。また、今まで知られていなかったクレブシュ表現の非自明なゲージ変換の一般形を示すことができた。(他の系における計算は Appendix A を参照してほしい。)

非正準 MHD 系でカシミール元として知られている保存量たちがクレブシュ表現によってネーターチャージに変換されること、そしてその対称性がゲージ対称性であることを示した。各ゲージ変換の具体形は表 3.1 のようにまとめられる。

非正準な系のカシミール元が系を正準化する過程でゲージ対称性と対応したネーターチャージになるという現象は MHD 方程式に特有の現象ではなく、カシミール元 C を持つ非正準な系が正準化されるとき、すなわち非正準な系 $(u_n \in X_n, \{,\}_n, H_n)$ と正準な系 $(u_c \in X_c, \{,\}_c, H_c)$、表現 $u_n = \psi(u_c)$ が存在し、任意の $F, G \in C^\infty(X_n)$ に対し

$$\{F, G\}_n \circ \psi = \{F \circ \psi, G \circ \psi\}_c,$$

の関係にあるとき必然的に起こる現象であることを示した。

さらに総質量とマグネティックヘリシティの局所保存則 $\int_\Omega \rho f(\sigma_i, \phi_i)\mathrm{d}^3x, \int_\Omega f(\sigma_i, \phi_i)\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ がやはりゲージ対称性に対応したネーターチャージであることを突き止めた。各ゲージ変換の具体的な形はそれぞれ表 3.2 のようまとめられる。

Appendix B で述べるように MHD 方程式の非自明な平衡解はクレブシュ MHD 系においてはクレブシュ変数の時間発展がゲージ変換の方向と一致することでクレブシュ変数が変化するものの物理変数が変化しない準平衡点に翻訳されることが示せる。よってクレブシュ MHD 系おいて元の非正準 MHD 系の平衡点について調べるためにはクレブシュ表現のゲージ変換全体を知る必要がある。クレブシュ表現のゲージ変換を求める方程式 $\delta\boldsymbol{V} = 0, \delta\boldsymbol{B} = 0$ は任意スカラーを含む 1 次の代数方程式に帰着できることを発見した。これによりクレブシュ表現のゲージ変換全体を計算した。それらについてラグラジアン密度 $\mathcal{L}$ の変化を計算し、ゲージ変換が対称性になる条件を考察した。理想流体のタイプのクレブシュ表現 $\boldsymbol{V} = -\nabla\phi_0 - \sigma_1\nabla\phi_1 - \sigma_2\nabla\phi_2$ の場合のゲージ変換は表 4.1 のようになる。MHD のタイプのクレブシュ表現 $\boldsymbol{V} = -\nabla\phi_0 - \sigma_1\nabla\alpha_1 - \sigma_2\nabla\alpha_2 - \gamma_1\nabla\phi_1 - \gamma_2\nabla\phi_2, \boldsymbol{B} = \nabla\sigma_1\times\nabla\phi_1 + \nabla\sigma_2\times\nabla\phi_2$ の場合のゲージ変換は表 4.2 のようになる。

ゲージ変換の下でのラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の変化を計算すると (4.40) となる。これが完全形式の時ゲージ変換は対称性となる。例えば $\varepsilon_3, \varepsilon_2', \varepsilon_4'$ が定数の場合は (4.40) は完全形式となる。このとき (4.26) はそれぞれ総質量、クロスヘリシティ、マグネティックヘリシティに対応するゲージ対称性になる。

補足 A

MHD 以外の系についての計算

MHD 以外にもホール MHD(HMHD) 方程式や中性流体 (NF) 方程式 (三次元の場合と二次元の場合) についての計算を行った。このセクションではその計算を紹介していく。

A.1 クレブシュ表現された HMHD 系のゲージ対称性と保存量の関係

A.1.1 HMHD 方程式

HMHD 方程式は次の方程式のことを言う:

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}), \tag{A.1}$$

$$\partial_t \boldsymbol{V} = -(\nabla \times \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{V} - \nabla(h + V^2/2) + \rho^{-1}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}, \tag{A.2}$$

$$\partial_t \boldsymbol{B} = \nabla \times (\boldsymbol{V_e} \times \boldsymbol{B}). \tag{A.3}$$

ただし $\boldsymbol{V_e} = \boldsymbol{V} - \epsilon_h \rho^{-1} \boldsymbol{J}$ は電子速度である。ϵ_h はホールパラメータと呼ばれる定数で、系の代表的な長さで規格化されたイオンスキン長である。HMHD に対し $\epsilon_h \to 0$ の極限を取った

ものが MHD である。境界条件は MHD の境界条件 (2.7)、(2.8) に加え

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{A.4}$$

を課す。次のようにおくとハミルトン形式で記述できる:

$$u = (\rho, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{B})^T, \tag{A.5}$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla\cdot & 0 \\ -\nabla & -\rho^{-1}(\nabla \times \boldsymbol{V})\times & \rho^{-1}(\nabla \times \circ) \times \boldsymbol{B} \\ 0 & \nabla \times (\circ \times \rho^{-1}\boldsymbol{B}) & -\epsilon_h \nabla \times \left(\rho^{-1}\left(\nabla \times \circ\right) \times \boldsymbol{B}\right) \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

$$H = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho\mathcal{E} + \frac{1}{2}B^2\right) \mathrm{d}^3x. \tag{A.7}$$

この系をこれから非正準 HMHD 系と呼ぶ。非正準 HMHD 系は 3 つのカシミール元

$$C_1 = \int_\Omega \rho \mathrm{d}^3x, \tag{A.8}$$

$$C_2 = \int_\Omega \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}^3x, \tag{A.9}$$

$$C_3' = \int_\Omega \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} \mathrm{d}^3x, \tag{A.10}$$

を持つ。ただし C_3' の保存のために追加の境界条件

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{A.11}$$

を課す必要がある。$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{V} + \epsilon_h^{-1}\boldsymbol{A}$ は正準運動量、$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{P}$ である。

A.1.2 クレブシュ表現された HMHD 系

正準運動量 $\boldsymbol{P}$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を次のようにクレブシュ表現する:

$$\boldsymbol{P} = -\nabla\phi_0 - \sigma_i'\nabla\phi_i', \tag{A.12}$$

$$\boldsymbol{A} = \sigma_i\nabla\phi_i, \tag{A.13}$$

よって速度 $\boldsymbol{V}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{V} = -\nabla\phi_0 - \sigma_i'\nabla\phi_i' - \epsilon_h^{-1}\sigma_i\nabla\phi_i, \tag{A.14}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla\sigma_i \times \nabla\phi_i, \tag{A.15}$$

とクレブシュ表現される。次の系をクレブシュ HMHD 系と呼ぶ:

$$u_c = (\rho, \phi_0, \mu_i', \phi_i', \mu_i, \phi_i)^T, \tag{A.16}$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_c^1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_c^1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_h\mathcal{J}_c^1 \end{pmatrix}, \tag{A.17}$$

$$H = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho\mathcal{E} + \frac{1}{2}B^2\right) \mathrm{d}^3x, \tag{A.18}$$

ただし $\mu_i' = \frac{\sigma_i'}{\rho}$ である。クレブシュ変数の時間発展を書き下すと次のようになる:

$$\dot{\rho} = -\partial_{\phi_0}H = -\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\rho), \tag{A.19}$$

$$\dot{\phi}_0 = \partial_\rho H = -\boldsymbol{V}\cdot\nabla\phi_0 + h - V^2/2 - \rho^{-1}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}, \tag{A.20}$$

$$\dot{\mu}_i' = -\partial_{\phi_i'}H = -\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\mu_i'), \tag{A.21}$$

$$\dot{\phi}_i' = \partial_{\mu_i'}H = -\boldsymbol{V}\cdot\nabla\phi_i', \tag{A.22}$$

$$\dot{\mu}_i = -\partial_{\phi_i}H = -\nabla\cdot(\boldsymbol{V_e}\mu_i), \tag{A.23}$$

$$\dot{\phi}_i = \partial_{\mu_i}H = -\boldsymbol{V_e}\cdot\nabla\phi_i. \tag{A.24}$$

クレブシュ HMHD 系に対し

$$\alpha_i = \epsilon_h^{-1}(\phi_i - \phi_i'), \tag{A.25}$$

$$\beta_i = \mu_i' + \epsilon_h^{-1}\mu_i, \tag{A.26}$$

$$\tag{A.27}$$

とし、μ_i', ϕ_i' のかわりに α_i, β_i を状態変数にとり、$\epsilon_h \to 0$ の極限を取ることでクレブシュ MHD 系を得ることができる [17]。

A.1.3　元のカシミール元から得られるゲージ変換

クレブシュ MHD 系に対して行ったのと同様に、クレブシュ HMHD 系でも保存量 C に対し微小変数変換

$$u \to u + \delta u = u + \epsilon \mathcal{J}\partial_u C, \tag{A.28}$$

がゲージ変換になる。保存量と対応するゲージ変換は次にようになる:

$$C_1 = \int_\Omega \rho \mathrm{d}^3x \leftrightarrow \delta\phi_0 = \epsilon, \tag{A.29}$$

$$C_2 = \int_\Omega \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x \leftrightarrow \begin{cases} \delta\phi_0 = -\frac{2\epsilon}{\rho}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}, \\ \delta\phi_i = \frac{2\epsilon\epsilon_h}{\rho}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}, \\ \delta\mu_i = 2\epsilon\epsilon_h\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}, \end{cases} \tag{A.30}$$

$$C_4 = \int_\Omega \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\Omega}\mathrm{d}^3x \leftrightarrow \begin{cases} \delta\phi_0 = -\frac{2\epsilon}{\rho}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\Omega}, \\ \delta\phi_i' = -\frac{2\epsilon}{\rho}\nabla\phi_i'\cdot\boldsymbol{\Omega}, \\ \delta\mu_i' = -2\epsilon\nabla\frac{\mu_i'}{\rho}\cdot\boldsymbol{\Omega}, \end{cases} \tag{A.31}$$

ただし $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P} + \nabla\phi_0 = -\sigma_i'\nabla\phi_i'$ である。

クレブシュ HMHD 系のゲージ変換とクレブシュ MHD 系のゲージ変換の間の関係について考える。(A.29) と (3.3) は全く同じである。(A.30)、(A.31) と (3.4)、(3.5) とがクレブシュ

HMHD 系とクレブシュ MHD 系を結ぶ極限操作によってつながっていることを示す。まず(3.4) について計算する。両系で C_2 の定義は変わらないため (A.30) に対する極限がそのまま(3.4) になることが予想される。(A.25)、(A.26) より (A.30) の下で、

$$\delta\alpha_i = \epsilon_h^{-1}(\delta\phi_i - \delta\phi_i') = \frac{2\epsilon}{\rho}\nabla\phi_i \cdot \boldsymbol{B}, \tag{A.32}$$

$$\delta\beta_i = \delta\mu_i' + \epsilon_h^{-1}\delta\mu_i = 2\epsilon\nabla\frac{\mu_i}{\rho} \cdot \boldsymbol{B}, \tag{A.33}$$

である。よって $\epsilon_h \to 0$ の極限の下で

$$\delta\phi_0 \to -\frac{2\epsilon}{\rho}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}, \tag{A.34}$$

$$\delta\phi_i \to 0, \tag{A.35}$$

$$\delta\mu_i \to 0, \tag{A.36}$$

$$\delta\alpha \to \frac{2\epsilon}{\rho}\nabla\phi_i \cdot \boldsymbol{B}, \tag{A.37}$$

$$\delta\beta \to 2\epsilon\nabla\frac{\mu_i}{\rho} \cdot \boldsymbol{B}, \tag{A.38}$$

となる。これは (3.4) と一致する。次に (3.5) について計算する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} &= (\boldsymbol{V} + \epsilon_h^{-1}\boldsymbol{A}) \cdot (\boldsymbol{\omega} + \epsilon_h^{-1}\boldsymbol{B}) \\ &= \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\omega} + \epsilon_h^{-1}(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{A}) + \epsilon_h^{-2}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}, \end{aligned} \tag{A.39}$$

である。よって $\epsilon_h \to 0$ の極限の下で

$$\frac{\epsilon_h}{2}\int_\Omega \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}\mathrm{d}^3x - \frac{1}{2\epsilon_h}\int_\Omega \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x \to \int_\Omega \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x, \tag{A.40}$$

である。このことから (A.30)$\times\epsilon_h/2-$(A.31)$\times\epsilon_h^{-1}/2$ が (3.5) になると予想できる。

(A.30)$\times\epsilon_h/2-$(A.31)$\times\epsilon_h^{-1}/2$ を計算すると次のようになる:

$$
\begin{aligned}
\delta\phi_0 &= -\frac{\epsilon\epsilon_h}{\rho}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\Omega}-\frac{\epsilon}{\epsilon_h\rho}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \\
&= -\frac{\epsilon}{\rho}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\omega}+\epsilon_h\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}\right), && \text{(A.41)} \\
\delta\phi_i &= -\frac{\epsilon}{\rho}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}, && \text{(A.42)} \\
\delta\mu_i &= -\epsilon\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}, && \text{(A.43)} \\
\delta\phi_i' &= -\frac{\epsilon\epsilon_h}{\rho}\nabla\phi_i'\cdot\boldsymbol{\Omega}, && \text{(A.44)} \\
\delta\mu_i' &= -\epsilon\epsilon_h\nabla\frac{\mu_i'}{\rho}\cdot\boldsymbol{\Omega}, && \text{(A.45)} \\
\delta\alpha_i &= \epsilon_h^{-1}(\delta\phi_i-\delta\phi_i') \\
&= \epsilon\epsilon_h^{-1}\left(-\frac{1}{\rho}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}+\frac{\epsilon_h}{\rho}\nabla(\phi_i-\epsilon_h\alpha_i)\cdot(\boldsymbol{\omega}+\epsilon_h^{-1}\boldsymbol{B})\right) \\
&= \frac{\epsilon}{\rho}\left(\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{\omega}-\nabla\alpha_i\cdot\boldsymbol{B}-\epsilon_h\nabla\alpha_i\cdot\boldsymbol{\omega}\right), && \text{(A.46)} \\
\delta\beta_i &= \delta\mu_i'+\epsilon_h^{-1}\delta\mu_i \\
&= -\epsilon\epsilon_h\nabla\frac{\beta_i-\epsilon_h^{-1}\mu_i}{\rho}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}+\epsilon_h^{-1}\boldsymbol{B}\right)-\epsilon\epsilon_h^{-1}\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B} \\
&= \epsilon\left(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega}-\nabla\frac{\beta_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}-\epsilon_h\nabla\frac{\beta_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}\right). && \text{(A.47)}
\end{aligned}
$$

よって $\epsilon_h\to 0$ の極限の下で

$$
\begin{aligned}
\delta\phi_0 &\to -\frac{\epsilon}{\rho}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\omega}\right), && \text{(A.48)} \\
\delta\phi_i &\to -\frac{\epsilon}{\rho}\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{B}, && \text{(A.49)} \\
\delta\mu_i &\to -\epsilon\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}, && \text{(A.50)} \\
\delta\alpha_i &\to \frac{\epsilon}{\rho}\left(\nabla\phi_i\cdot\boldsymbol{\omega}-\nabla\alpha_i\cdot\boldsymbol{B}\right), && \text{(A.51)} \\
\delta\beta_i &\to \epsilon\left(\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega}-\nabla\frac{\beta_i}{\rho}\cdot\boldsymbol{B}\right), && \text{(A.52)}
\end{aligned}
$$

である。これは (3.5) と一致する。以上の計算から (3.3)-(3.5) は (A.29)-(A.31) から $\epsilon_h\to 0$ の極限により得られることがわかった。

A.2　クレブシュ表現された NF 系のゲージ対称性と保存量の関係

A.2.1　三次元 NF 方程式

(A.1)-(A.3) に $\boldsymbol{B}=0$ を課すことで三次元 NF 方程式が得られる。そのハミルトン形式も磁場 $\boldsymbol{B}$ の自由度を削ることで得られる:

$$u=(\rho,\boldsymbol{V})^T, \tag{A.53}$$

$$\mathcal{J}=\begin{pmatrix} 0 & -\nabla\cdot \\ -\nabla & -\rho^{-1}\boldsymbol{\omega}\times \end{pmatrix}, \tag{A.54}$$

$$H=\int_\Omega \rho\left(\frac{1}{2}V^2+\mathcal{E}\right)\mathrm{d}^3x. \tag{A.55}$$

この系では $C_2=C_3'=0$ は自明な保存量となる。そしてそのかわりに $C_2'=\int_\Omega \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}^3x$ がカシミール元となる。このようにとある束縛上 (今回のケースでは $\boldsymbol{B}=0$) で新たに生じるカシミール元のことを特異カシミール元と呼ぶ [25]。

A.2.2　クレブシュ表現された三次元 NF 系

クレブシュ HMHD 系において $\delta\mu_i=\delta\phi_i=0$ とし、これらの自由度を削減することでクレブシュ表現された三次元 NF 系が得られる。このとき速度 $\boldsymbol{V}$ は次のようにクレブシュ表現される:

$$\boldsymbol{V}=-\nabla\phi_0-\frac{\mu_i'}{\rho}\nabla\phi_i'. \tag{A.56}$$

元のカシミール元とゲージ変換の対応は次のようになる:

$$C_1 = \int_\Omega \rho \mathrm{d}^3 x \leftrightarrow \delta\phi_0 = \epsilon, \tag{A.57}$$

$$C_5 = \int_\Omega \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}^3 x \leftrightarrow \begin{cases} \delta\phi_0 = -\frac{2\epsilon}{\rho}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}, \\ \delta\phi_i' = -\frac{2\epsilon}{\rho}\nabla\phi_i'\cdot\boldsymbol{\omega}, \\ \delta\mu_i' = -2\epsilon\nabla\frac{\mu_i'}{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega}. \end{cases} \tag{A.58}$$

A.2.3 二次元 NF 方程式

三次元 NF 方程式に対し $V_z = 0, \partial_z = 0$ を課すことで二次元 NF 方程式を得ることができる。そのハミルトン形式は次のようになる:

$$u = (\rho, V_x, V_y)^T, \tag{A.59}$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x & -\partial_y \\ -\partial_x & 0 & \rho^{-1}\omega_z \\ -\partial_y & -\rho^{-1}\omega_z & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.60}$$

$$H = \int_\Omega \rho\left(\frac{1}{2}V^2 + \mathcal{E}\right)\mathrm{d}^2 x, \tag{A.61}$$

ただし $\omega_z = \partial_x V_y - \partial_y V_x$ である。この系では C_2' が自明な保存量となり、代わりに特異カシミール元としてポテンシャル渦度 $C_2'' = \int_\Omega \rho f(\omega_z/\rho)\mathrm{d}^2 x$ が生起する。ただし f は任意の滑らかな関数とする。

この系のクレブシュ表現はペアの数を一つ減らし、

$$\boldsymbol{V} = -\nabla\phi_0 - \frac{\mu}{\rho}\nabla\phi, \tag{A.62}$$

となる。C_2'' に対応するゲージ変換は次のようになる:

$$\begin{cases} \delta\phi_0 = \epsilon\left(f + \omega_z^{-1}\frac{\mu}{\rho}[f,\phi]\right), \\ \delta\mu = -\frac{\epsilon}{\rho}\omega_z^{-1}\left[f, \frac{\mu}{\rho}\right], \\ \delta\phi = -\epsilon\omega_z^{-1}[f,\phi], \end{cases} \tag{A.63}$$

ただし $[a,b] = \partial_x a \partial_y b - \partial_y a \partial_x b$ である。

補足 B

クレブシュ MHD の平衡解

非正準な系では葉層構造の存在から平衡解は相空間上のハミルトニアンの停留点だけではなく各葉層上のハミルトニアンの停留点となる。このうち一部はエネルギーカシミール関数に対する変分問題の解になるためこの方法で様々な平衡解が見つけられている。しかしこの方法ではすべての平衡解を見つけることはできない。さてクレブシュ表現によって MHD が正準化されたとき平衡解はどうなるのだろうか。クレブシュ MHD 系は正準な系なので葉層構造を持たない。よって相空間上でハミルトニアンの停留点を求めれば全ての平衡解を得ることができる。

クレブシュ表現された系の平衡解については次のことが指摘されていた:
クレブシュ HMHD 系の平衡解においてベルトラミ・ベルヌーイ条件

$$\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\Omega} = 0, \tag{B.1}$$

$$\boldsymbol{V_e} \times \boldsymbol{B} = 0, \tag{B.2}$$

$$\nabla(h + \frac{1}{2}V^2) = 0, \tag{B.3}$$

が成立する。非正準 HMHD 系のベルトラミ・ベルヌーイ条件を満たさない平衡解は準平衡点、すなわちクレブシュ変数の時間発展がゲージ変換になっていてクレブシュ変数は時間変化する

ものの、物理変数は変化しないような場合、になる [17]。

今回、クレブシュ MHD 系、クレブシュ HMHD 系の平衡解では $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{B}=0$ が成立することを証明した。この章ではこの証明を紹介する。

まずクレブシュ MHD 系について計算する。平衡解を $u=u^*$ とおく。このとき

$$\partial_u H(u^*)=0, \tag{B.4}$$

である。よって任意の微小な摂動 δu に対して

$$\delta H=H(u^*+\delta u)-H(u^*)=o(\epsilon), \tag{B.5}$$

が成立する。ただし ϵ は δu の大きさを表すものとする。これを書き下すと、

$$\delta H=\int_\Omega\left(\delta\rho\left(\frac{1}{2}V^2+\mathcal{E}\right)+\rho\boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{V}+\boldsymbol{B}\cdot\delta\boldsymbol{B}\right)\mathrm{d}^3x, \tag{B.6}$$

ただし

$$\delta\boldsymbol{V}=-\nabla\delta\phi_0-\left(\frac{\delta\mu_i}{\rho}-\frac{\mu_i\delta\rho}{\rho^2}\right)\nabla\alpha_i-\frac{\mu_i}{\rho}\nabla\delta\alpha_i-\left(\frac{\delta\beta_i}{\rho}-\frac{\beta_i\delta\rho}{\rho^2}\right)\nabla\phi_i-\frac{\beta_i}{\rho}\nabla\delta\phi_i, \tag{B.7}$$

$$\delta\boldsymbol{B}=\nabla\left(\frac{\delta\mu_i}{\rho}-\frac{\mu_i\delta\rho}{\rho^2}\right)\times\nabla\phi_i+\nabla\frac{\mu_i}{\rho}\times\nabla\delta\phi_i, \tag{B.8}$$

である。$\delta\boldsymbol{V}$ と $\delta\boldsymbol{B}$ はそれぞれ任意の ϵ の一乗のオーダーの大きさの三次元のベクトルとダイバージェンスフリーな三次元のベクトルを表せるわけでないことに注意する必要がある。こ

こで

$$\delta\rho = 0, \tag{B.9}$$

$$\delta\phi_0 = \epsilon\phi_0, \tag{B.10}$$

$$\delta\mu_i = 0, \tag{B.11}$$

$$\delta\alpha_i = \epsilon\alpha_i, \tag{B.12}$$

$$\delta\beta_i = 0, \tag{B.13}$$

$$\delta\phi_i = \epsilon\phi_i, \tag{B.14}$$

の場合を考える。このとき (B.7)、(B.8) は

$$\delta\boldsymbol{V} = \epsilon\boldsymbol{V}, \tag{B.15}$$

$$\delta\boldsymbol{B} = \epsilon\boldsymbol{B}, \tag{B.16}$$

となる。よって (B.5) は

$$\delta H = \epsilon\int_{\Omega}\left(\rho V^2 + B^2\right)\mathrm{d}^3x = o(\epsilon) \tag{B.17}$$

よって $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B} = 0$ が必要である。

HMHD の場合でも

$$\delta\rho = 0, \tag{B.18}$$

$$\delta\phi_0 = \epsilon\phi_0, \tag{B.19}$$

$$\delta\mu_i = 0, \tag{B.20}$$

$$\delta\phi_i = \epsilon\phi_i, \delta\mu_i' = 0, \tag{B.21}$$

$$\delta\phi_i' = \epsilon\phi_i, \tag{B.22}$$

とおくと

$$\delta \boldsymbol{V} = \epsilon \boldsymbol{V}, \tag{B.23}$$

$$\delta \boldsymbol{B} = \epsilon \boldsymbol{B}, \tag{B.24}$$

が実現できるため同様の議論から $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B} = 0$ が示せる。

参考文献

[1] Arnold V I 1989 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer)

[2] Frieman E and Rotenberg M 1960 On hydromagnetic stability of stationary equilibria *Rev. Mod. Phys.* **32** 898902

[3] Newcomb W A 1962 Lagrangian and Hamiltonian methods in magnetohydrodynamics *Nucl. Fusion Suppl.* Vol. 2 451–463

[4] Zakharov V E and Kuznetsov E A 1971 Variational principle and canonical variables in magnetohydrodynamics *Sov. Phys. Dokl.* **15** 913–914

[5] Morrison P J 1998 Hamiltonian description of the ideal fluid *Rev. Mod. Phys.* **70** 467521

[6] Lin C C 1963 Hydrodynamics of Helium II in *Proc. Int. Sch. Phys. "Enrico Fermi" XXI* 93–146 (New York, Academic Press)

[7] Seliger R L and Whitham G B 1968 Variational principles in continuum mechanics *Proc. R. Soc. A* **305** 1–25

[8] Marsden J and Weinstein A 1983 Coadjoint orbits vortices, and Clebsch variables for incompressible fluids *Physica D* **7** 1 305–323

[9] Salmon R 1988 Hamiltonian fluid mechanics *Annu. Rev. Fluid Mech.* **20** 22556

[10] Jackiw R 2002 *Lectures on fluid dynamics —a particle theorist's view of super-*

symmetic, non-Abelian, noncommutative fluid mechanics and d-branes (New York, Springer)

[11] Yoshida Z and Mahajan S M 2012 Duarity of the Lagrangian and Eulerian representations of collective motion - a connection built around vorticity *Plasma Phys. Control. Fusion* **54** 014003

[12] Yoshida Z 2009 Clebsch parameterization: basic properties and remarks on its applications *J. Math. Phys.* **50** 113101

[13] Morrison P J and Greene J M 1980 Noncanonical Hamiltonian density formulation of hydrodynamics and ideal magnetohydrodynamics *Phys. Rev. Lett.* **45** 7904

[14] Holm D D 1987 Hall magnetohydrodynamics: conservation laws and Lyapunov stability *Phys. Fluids* **30** 131022

[15] Holm D D, Kupershmidt B A and Levermore C D 1983 Canonical maps between Poisson brackets in Eulerian and Lagrangian description of continuum mechanics *Phys. Lett. A* **98** 8 389–395

[16] Holm D D and Kupershmidt B A 1983 Poisson brackets and Clebsch representations for magnetohydrodynamics, multifluid plasmas, and elasticity *Physica D* **6** 3 347–363

[17] Yoshida Z and Hameiri H 2013 Canonical Hamiltonian mechanics of Hall magnetohydrodynamics and its limit to ideal magnetohydrodynamics *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** 33550

[18] Arnold V I and Khesin B A 1998 *Topological Methods in Hydrodynamics* (New York, Springer)

[19] Morrison P J 2006 Hamiltonian fluid dynamics in *Encyclopedia of Mathematical Physics*, vol. 2, (Amsterdam, Elsevier) p. 593

[20] Goedbloed J P, Poedts S 2004 *Principles of magetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas* (Cambridge)

[21] Alfven H 1942 Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves *Nature* **150** 3805 405–406

[22] Yoshida Z and Giga Y 1990 Remarks on spectra of operator rot, *Math. Z.* **204** 235–245

[23] Yahalom A 1995 Helicity conservation via the Noether theorem *J. Math. Phys.* **36** 1324–1327

[24] Padhye N and Morrison P J 1996 Fluid element relabeling symmetry *Phys. Lett. A* **219** 287–292

[25] Yoshida Z 2013 Singular Casimir elements: their mathematical justification and physical implications *Procedia IUTAM* **7** 141–150

謝辞

本研究に取り組むにあたって吉田西浦研究室の皆様には大変お世話になりました。

吉田善章教授には指導教官として丁寧に粘り強く指導をいただきました。先生の研究に対するコメントは常に自分にない新たな視点を与えてくれるとても新鮮なものでした。また、研究そのもの以外にも発表の仕方や文章の書き方といった基本的な事柄について指導いただきました。もともと自分は自分の考えを人に発信することが不得意だったため大変参考になりました。この 2 年間大学院生として研究をしてこれたのは先生のおかげといっても過言ではありません。先生の指導の下で培われた物事に対する考え方・取り組み方はこれからも自分の中で生きていくと思います。そういう意味でこの 2 年間の経験はこれからの自分の核になるかけがえのない時間でした。この場を借りて深く感謝の意を表します。

西浦正樹准教授は学生の面倒見がとても良い方でいろいろな相談に乗っていただきました。自分は理論に関する研究を行っていたため実験を主になさっている先生とはあまり研究に関する深い話をすることはできませんでしたが、休みの日や平日の夜などにご飯に連れて行ってもらったりしていろいろなお話をしてくださいました。心より感謝いたします。

川面洋平先生は先生方の中で最も若く学生の目線をとても理解していらっしゃる先生だったので、気軽に相談できるとても頼りになる存在でした。本研究の初期の段階でまだ解析の方向性が定まっていないとき、ちょうど先生がされていた研究で解析手法としてネーターの定理を使っていらしたので自分の研究に使えるのではないかと思い基礎の基礎から教えていただきま

した。心より感謝いたします。

秘書の北山今日子さんには事務手続き等で非常にお世話になりました。書類の書き方で困っていた時など優しく接していただきました。心より感謝いたします。

研究室の先輩である矢野善久さん、若林智章さん、Hamdi Abdelhamid さん、大野裕司さん、佐藤直木さん、山崎美由梨さん、には研究室の一員として過ごしていくうえで大変お世話になりました。特に大野さん、佐藤さんは、席が隣だったこともあり、研究で何か困ったときや論文の書き方やメールの書き方、研究で知らない知識があったときや計算がうまくいかないときなど何か問題に直面するごとに真っ先に相談させていただきました。逆に先輩方の研究についても議論を交わさせていただいたりもし、とても見識が深められました。心より感謝いたします。

同輩である虫明敏生くん、Ankur Kashyap くんには研究や進路、就活といった真面目な相談や議論から普段の何気ない会話まで様々なことを話しました。共に過ごす仲間がいたからこそ、この 2 年間頑張っていけたのだと思います。心より感謝いたします。

後輩の高橋典生くん、中塚正崇くん、牛田康之くんにはあまり先輩らしいことはしてあげられなかったように思います。特に高橋くんは研究する上で相談に乗ってもらったり議論を交わしたりなどむしろ自分の研究をサポートしてもらったことの方が多いようにも思います。心より感謝いたします。

最後に、これまでの人生において言葉にしきれないほど様々な面で支えてくれた家族に深く深く感謝いたします。

研究発表

A. 学会（口頭）

1. 種橋航, 川面洋平, 吉田善章: ”電磁流体力学の正準ハミルトン形式が持つ対称性と保存量”, 日本流体力学会年会 2014, 東北大学 (2014).
2. 種橋航, 川面洋平, 吉田善章: ”電磁流体力学のクレブシュ表現が持つゲージ対称性と保存量”, 日本物理学会第 70 回年次大会, 22aAK-9, 早稲田大学 (2015.3.22).
3. 種橋航, 吉田善章: ”クレブシュ表現された理想流体の正準ハミルトン形式に対しゲージ原理を課す試み”, 日本物理学会 2015 年秋季大会, 17aCW-6, 関西大学 (2015.9.17).

B. 論文

4. K. Tanehashi and Z. Yoshida: ”Gauge symmetries and Noether charges in Clebsch-parameterized magnetohydrodynamics”, J. Phys. A: Math. Theor. 48 (49), 495501 (2015)