

東京大学 大学院新領域創成科学研究科  
基盤科学研究系  
先端エネルギー工学専攻

平成 27 年度

修士論文

大気圧ミリ波放電プラズマに見られる  
櫛状構造におけるピッチサイズの解析

2016 年 2 月 2 日提出  
指導教員 小紫 公也 教授

47146058 中村 友祐

## 目次

1. 背景 .....	4
1.1 マイクロ波ロケット .....	4
1.2 ミリ波放電 .....	5
1.2.1 ミリ波 .....	5
1.2.2 ミリ波放電の分類 .....	6
1.2.3 レーザー放電との違い .....	6
1.2.4 ミリ波放電実験 .....	7
2. 研究概要 .....	10
2.1 目的 .....	10
2.2 数値計算概要 .....	10
2.3 解析手法 .....	10
3. プラズマ分布を解くための基礎方程式 .....	11
3.1 プラズマの支配方程式 .....	11
3.2 両極性拡散係数 .....	13
3.3 デバイ長より短いスケールでの拡散係数 .....	14
3.4 電子生成項の導出 .....	17
4. 数値計算に向けた離散化 .....	20
4.1 マクスウェル方程式の離散化 .....	20
4.1.1 FDTD (Finite Difference Time Domain) 法 .....	20
4.1.2 FDTD 法の空間高次精度化 .....	22
4.1.3 Mur の吸収境界 .....	23
4.1.4 プラズマ電流の組み込み .....	24
4.2 プラズマ拡散方程式の離散化 .....	25
5. 数値計算方法 .....	26
5.1 時間刻み幅及び空間刻み幅 .....	26
5.2 計算領域 .....	27
5.3 臨界電界強度 $E_c$ の決定 .....	28
6. ピッチサイズの初期プラズマ配置依存性 .....	29
6.1 解析方法 .....	29
6.2 計算結果 .....	30
7. ピッチサイズの周波数依存性 .....	32
7.1 解析方法 .....	32
7.2 計算結果 .....	32

8. ピッチサイズの電離周波数依存性.....	36
8.1 解析方法.....	36
8.2 計算結果.....	36
9. 考察 .....	38
9.1 ピッチサイズの電子数密度、伸展速度依存性 .....	38
9.2 櫛状構造の形成過程.....	38
9.3 本研究の課題.....	41
10. 結論.....	42
参考文献 .....	43

## 謝辞

この論文を書くにあたり、多くの方にお世話になりましたので、この場をかりてお礼を述べさせていただきます。

指導教員である小紫公也教授には大変お世話になりました。小紫先生には、知識の足りない私が突拍子もない考察を持って行っても、毎回辛抱強く議論をしていただきました。先生の適切なご指導のおかげで、この研究を修士論文として形にすることができ、大変感謝しております。また、小泉准教授にも大変お世話になりました。小泉先生との議論では毎回、今まで気が付かなかった多くのことに気付かされました。ありがとうございました。

本研究を行うにあたっては多くの先輩方にもお世話になりました。この場では特にお世話になった山口敏和さんと福成雅史さんにお礼を申し上げたいと思います。山口さんには研究室に入った当初から、研究についてから研究室での生活についてまでいろいろと教えていただき、また時には相談に親身に乗って下さることもありました。私がこの研究室で不自由なく研究できているのは山口さんのおかげです。ありがとうございました。福成さんには、度々研究についての相談に乗っていただきました。福成さんは豊富な知識からアドバイスや参考論文を下さり、研究を進めるにあたり大変助かりました。ありがとうございました。

## 1. 背景

### 1.1 マイクロ波ロケット

現在、宇宙太陽光発電衛星などの大型施設を軌道上に建設する上で、最も大きな障壁となっているのは、地上から軌道上に資材を輸送するコストが非常に高いことにある。現在運用されているロケットでは、低軌道でも一トンあたり数億円程度かかる、これでは数万トンの重量が想定されている宇宙太陽光発電衛星のための資材を打ち上げるのに 1000 兆円程度もかかってしまう。実際に現実的な予算はこれの 1/100 程度であることを考えると、打ち上げのコストを 1/100 程度まで減らさなければいけないことになる。このような超低価格化を実現する新しい打ち上げシステムの一つとして考えられているのがマイクロ波ロケットである。

マイクロ波ロケットとは、地上から推進器にミリ波と呼ばれる波長帯の電磁波を照射し、そのエネルギーで推進器内部の空気を加熱し推力に換えようというものである(図 1.1)。この方式には大きく分けて三つの利点がある。一つ目は、空気を吸い込み加熱するため推進剤を搭載しなくても良く、非常に高いペイロード比を実現することが出来ることである。二つ目は推進器自体の構造が非常に簡素なことであることで、これにより推進器本体は非常に安価に作成することが出来る。三つ目はミリ波を発信するビーム基地は地上にあり、何度でも使用することが可能なことである。ビーム基地そのものは建設に多額の費用が必要であるが、一度作ってしまえば何度でも使用でき、地上にあるため整備もしやすく、また打ち上げでトラブルが起きたとしても深刻な損傷を負う確率は低い。以上三つの利点から、一回あたりの打ち上げコストを非常に安価なものとする事が可能なのである。

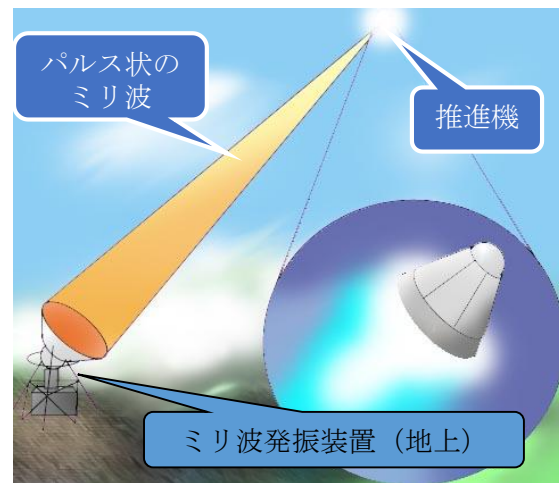


図 1.1 マイクロ波ロケット概念図

ここでマイクロ波ロケットのエンジンサイクルについて説明する。このエンジンサイクルは大まかに4つのステップに分けることが出来る(図 1.2)。使用するミリ波はパルス状のものをを用いており、このうち2ステップではミリ波が推進器の開口端から入射、残りの2ステップではミリ波が入射していない。最初のステップは放電開始のステップである。推進器内に入射したミリ波はその最深部に設置された放物面鏡によって集光され、空気の絶縁破壊を起こし、プラズマを発生させる。次のステップではプラズマの伸展及び推進器内部の空気の過熱を行う。プラズマがミリ波のエネルギーを吸収し入射方向へと伸展していく性質を利用し、推進器内部の空気を順次過熱していく。このときプラズマの伸展は衝撃波を伴う。3つめのステップでは排気を行う。開口端まで伸展したプラズマを、ミリ波を止めることに

より消し、推進器内部に溜まった高温高压の空気を外へと排出する。マイクロ波ロケットの推力のほとんどがこのステップで生み出される。最後のステップは吸気である。高压のガスが推進器外部へと排出しきると、今度は圧力振動により推進器内部に負圧の領域が生まれる。この負圧を利用し推進器側面に取り付けられたリード弁から新しい空気を取り込み最初の状態へと戻す。この4ステップを繰り返すことにより断続的に推力を得ることが出来る。

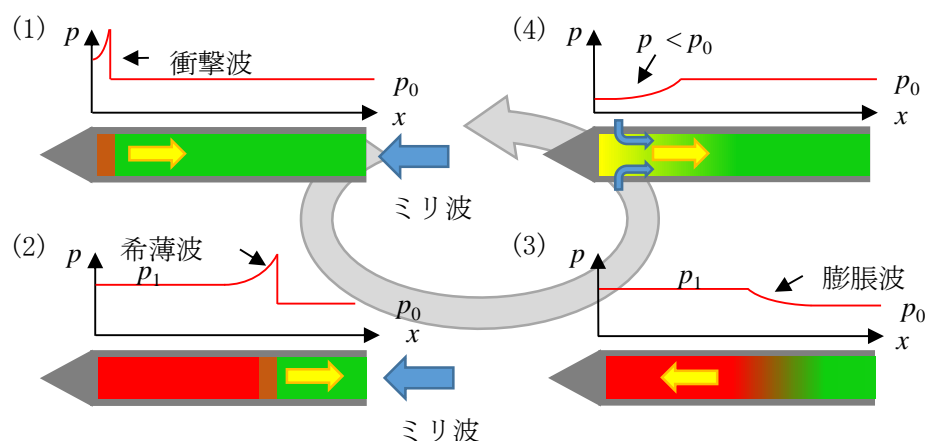


図 1.2 マイクロ波ロケットのエンジンサイクル

1 サイクルで得られる推力は簡単に以下の式で表される。

$$I = (p_{\text{pla}} - p_{\text{atm}}) A t_{\text{pla}} \quad (1-1)$$

ここで  $p_{\text{pla}}$  はステップ 3 における推進器再奥面での圧力、 $p_{\text{atm}}$  は大気圧、 $A$  は推進器断面積、 $t_{\text{pla}}$  は  $p_{\text{pla}}$  の維持時間である。 $p_{\text{pla}}$  はミリ波放電による加熱量で決まり、それ以外のパラメータは主に推進器自体の設計及び  $p_{\text{pla}}$  によって決まる。このことから、マイクロ波ロケットの推力を見積もるためにはミリ波放電による加熱量を見積もることが非常に重要であることがわかる。この加熱量は、入射ミリ波のエネルギーとミリ波放電プラズマの伸展速度に大きく依存すると考えられるため、この見積もりには伸展速度に関する考察が不可欠といえるだろう。

## 1.2 ミリ波放電

### 1.2.1 ミリ波

ミリ波とは波長が数 mm 程度の電磁波のことで、これは周波数で表すと 30 から 300GHz の領域である。この周波数帯は、可視光と電磁波の中間に位置し、長い間高出力での発振は難しいとされていた。しかし 1960 年代にロシアでジャイロトロンと呼ばれる発振器が発明されると多くの問題が解決し、現在ではメガワットクラスの大出力での発振が可能となっている。これに伴い近年高出力のミリ波を用いた実験が盛んに行われるようになっており、様々な現象が報告されている。このような現象の一つが本研究の題材であるミリ波放電である。

### 1.2.2 ミリ波放電の分類

ミリ波放電とは、高いパワー密度を持つミリ波がガス中に入射することにより、ガスが電離しプラズマが発生する現象のことである。このミリ波放電現象は入射ミリ波の強度、及び入射させるガスの圧力によって性質が異なる。図 1.3 に K. Khodataev による空気中における放電の分類([1])を示す。縦軸に入射電界強度、横軸に雰囲気圧を対数でとり、それぞれの領域における典型的な放電の様子を写真で示した。領域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲはそれぞれ、種となるプラズマなしで絶縁破壊が起きる領域、種プラズマがなければ放電は起きないがある場合は種プラズマからミリ波の入射方向へとプラズマが伸展していくという領域、種プラズマから離れて伸展することが出来ない領域である。また、縦に伸びている破線の左側では拡散放電、右側ではフィラメント状の放電となり、それぞれ放電の形状が異なる。マイクロ波ロケットで用い、本研究で扱う放電は大気圧下での放電の伸展なので、図 3 において領域Ⅱの最も圧力が高い側にあたる。

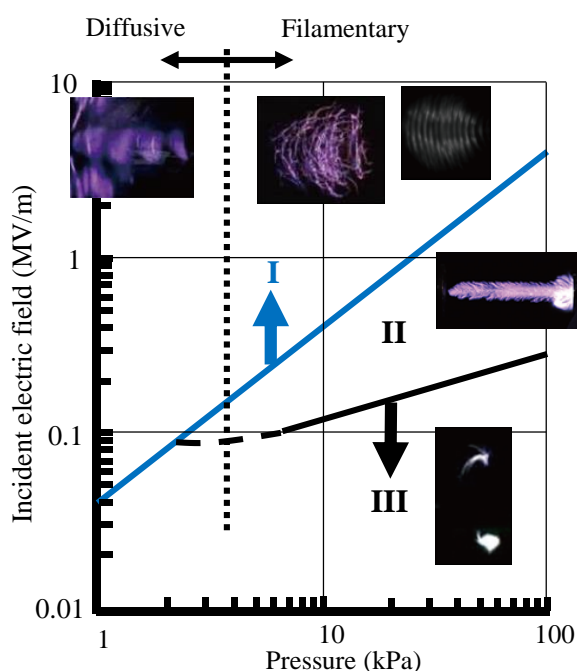


図 1.3 空気中におけるミリ波放電の分類[1][2]

### 1.2.3 レーザー放電との違い

ミリ波放電と同じように、高いパワー密度の電磁波を用い絶縁破壊を起こすものにレーザー放電がある。ミリ波放電とレーザー放電の違いは基本的に入射する電磁波が異なることのみであり、ミリ波放電が数 mm 程度の波長の電磁波を用いるのに対してレーザー放電では 10 から 100  $\mu\text{m}$  程度の波長の電磁波を用いる。この二つはほとんど違いがないにもかかわらず、パワー密度に応じたプラズマの伸展速度が大きく異なる。横軸にパワー密度、

縦軸に伸展速度をとった図を図 1.4 に示す。これによると、同じ伸展速度を得るにはレーザー放電の場合ミリ波放電の 10 倍から 100 倍程度のパワー密度が必要となることになる。これは、ミリ波放電とレーザー放電では、放電が起きる構造に何かしらの違いがあることを示唆している。

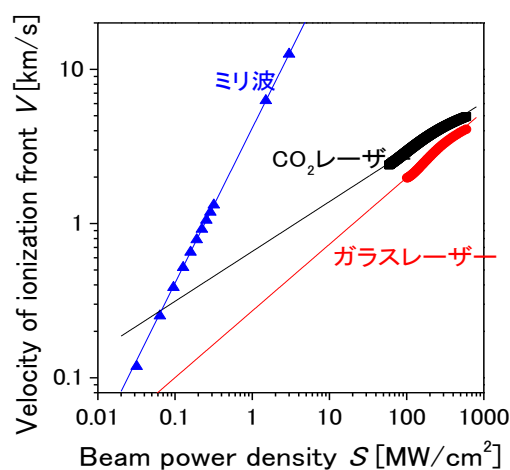


図 1.4 ミリ波放電とレーザー放電の違い[3]

#### 1.2.4 ミリ波放電実験

ここでは過去に本研究グループが日本原子力研究開発機構(JAEA)と共同で行ったミリ波放電の伸展現象に関する実験について説明する。表 1.1 に本研究グループが実験に用いた JAEA 所有の大出力ミリ波発生装置ジャイロトロン(図 1.5)の概要を示す。

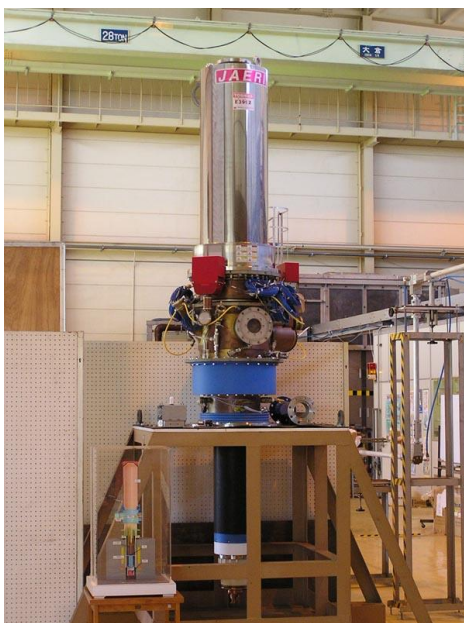


図 1.5 実験に用いたジャイロトロン(JAEA)



ミリ波周波数	170 GHz
最大出力	1.5 MW
パルス時間	0.1ms から 1000s
ビームプロファイル	ガウシアン
ビーム半径	20.4 mm
エネルギー効率	50-60%

表 1.1 実験時のジャイロトロン性能

実験の概略図を図 1.6 に示す。導波管から出たミリ波を放物面鏡にて集光して大気の絶縁破壊を起こし、そこからミリ波の入射方向へと伸展していくプラズマをカメラで撮影した。入射させたミリ波は出力を 1 MW、パルス長を 1 ms とし、その間にプラズマはおよそ数百ミリメートル伸展した。

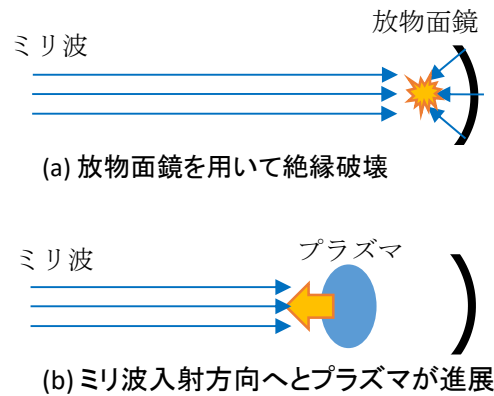


図 1.6 ミリ波放電実験概略図

撮られた露光写真（露光時間>パルス長）を図 1.7 に示す。この写真からプラズマのフィラメントが斜め進行方向へと幾重にも延びている構造を見て取ることが出来る。高速度カメラでプラズマの伸展の様子を撮影した写真を図 1.8 に示す。この写真から露光写真でフィラメント状に見えたプラズマは、粒状のプラズマの軌跡であることが分かる。

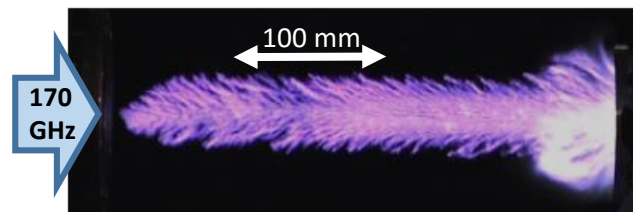


図 1.7 伸展するプラズマの露光写真

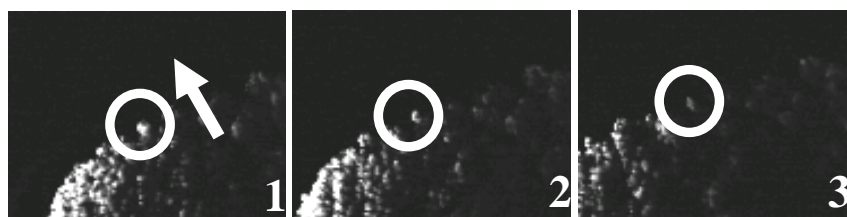


図 1.8 高速度カメラによる伸展の様子

しかし、図 1.8 に示す写真では粒の様子が不明瞭で粒の間隔についての議論が難しい。これは、ガウシアンビームを用いているため、場所によりビーム強度が径方向位置によって異なり、結果としてプラズマの分布が三次元的になっていることが原因であると考えられる。そこで、この粒状プラズマについてさらに細かく調べるため、フラットトップのビーム、すなわち径方向位置によってもビーム強度が変化しないようなビームを、ミラー系を用いて作成し放電実験を行った。この実験における伸展プラズマを高速度カメラによる写真を図 1.9 に示す。この写真から、プラズマの粒が  $1.6 \text{ mm}$  程度のピッチで等間隔に並んでいる構造をとっていることが分かる。この粒が等間隔に並んで進んでいる様子が櫛のようであることから、この構造を櫛状構造と呼ぶこととする。この櫛状構造はミリ波以外の波長領域では観測されておらず、ミリ波特有の構造であることが考えられる。また、この構造による電界集中が放電の伸展速度に影響を及ぼしていることが考えられ、構造を再現し、原理を解明することは伸展速度を見積もる上でも大変興味深い。

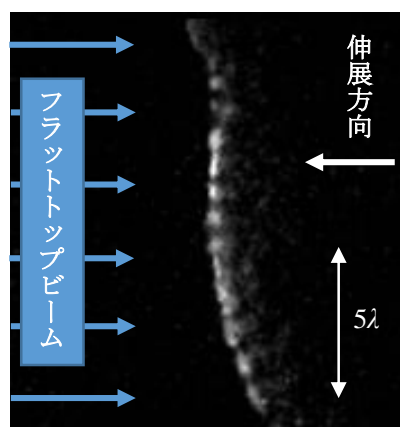


図 1.9 フラットトップビームによるプラズマ伸展で見られる櫛状構造。

露光時間  $100 \text{ ns}$ 。

## 2. 研究概要

### 2.1 目的

本研究の目的は実験で観測された伸展プラズマにおける櫛状構造を数値計算により再現すること、及び得られた計算結果の解析から粒のピッチサイズがどのような物理に依存するかを割り出し、その発生メカニズムを考察することである。

### 2.2 数値計算概要

本研究においては、入射ミリ波の磁場方向に垂直な平面での二次元計算を行い、櫛状構造の再現を試みた。

電磁波の分布を求めるのには Maxwell 方程式を FDTD 法と呼ばれる数値計算手法を用いて解いた。この手法は、時間 2 次精度、空間 2 次精度のものが一般的であるが、本研究では必要となる計算領域が広く、メッシュを荒くとり数値計算コストを落とす必要があったため、空間精度を 4 次まで拡張して計算を行った。この方法についての詳細は 4 章にて述べる。

プラズマを解くのに以下で表される流体モデルを用いた。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - D_{\text{eff}} \nabla^2 n_e = n_e (v_i - v_a) \quad (2-1)$$

ここで  $n_e$  は電子数密度、 $D_{\text{eff}}$  は有効拡散係数、 $v_i$ 、 $v_a$  はそれぞれイオン化と電子付着の周波数である。式の導出は 3 章にて述べる。この式を 4 章で述べるように差分化して解き、各時間におけるプラズマの分布を求めた。

### 2.3 解析手法

本研究では、櫛状プラズマのピッチサイズに注目し、このピッチサイズが依存する可能性のある要素として初期プラズマ分布、入射ミリ波の周波数、正味の電離周波数を考えた。これらの要素を変化させた場合のプラズマ進展を数値計算により再現し、最終的に定常な形に収束した時点でのピッチのサイズを比較し、各要素に対する依存性を求めた。ここから得た結果の考察から櫛状プラズマの発生メカニズムについて議論した。

### 3. プラズマ分布を解くための基礎方程式

#### 3.1 プラズマの支配方程式

ここではボルツマン方程式から、プラズマを解くための諸方程式を求める。プラズマは一般的に電子、複数の種類のイオン、励起種、基底粒子などから成り立っているが、その中の一種についてのみ考える。まず、ある種類の粒子に対するボルツマン方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_e \quad (3-1)$$

ここで $f$ は、 $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ をかけるとある空間領域 $d\mathbf{r}$ 、速度領域 $d\mathbf{v}$ にある粒子数となる量である。右辺は衝突や放射などによる変化の影響を表す項である。この $f$ を用いると、粒子数密度 $n$ 、平均速度 $\mathbf{u}$ 、平均エネルギー $\varepsilon$ は以下のように表される。

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (3-2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (3-3)$$

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{m}{2n} \int |\mathbf{v}|^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (3-4)$$

ここである速度に依存する物理量 $\Phi$ のある空間における平均値

$$\langle \Phi(\mathbf{v}) \rangle = \frac{1}{n} \int \Phi(\mathbf{v}) f d\mathbf{v} \quad (3-5)$$

に対するボルツマン方程式を考えると

$$\frac{\partial n\langle \Phi \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (n\langle \Phi \mathbf{v} \rangle) - \frac{n}{m} \langle \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \Phi \rangle = \left( \frac{\partial n\langle \Phi \rangle}{\partial t} \right)_e \quad (3-6)$$

この式を用いて各物理量に対するボルツマン方程式を考える。

$\Phi = 1$ として式 3-6 に代入すると粒子数保存の式が得られる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = S \quad (3-7)$$

ここで $S$ は分裂、イオン化などで生じる正味の粒子生成量である。

$\Phi = m\mathbf{v}$ として代入すると運動量保存の式が得られる。

$$\frac{\partial n\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{m} \nabla \cdot \mathbf{P} + n \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{R} \quad (3-8)$$

ここで圧力テンソル $\mathbf{P}$ 、運動量生成項 $\mathbf{R}$ はそれぞれ以下の式で表される。

$$\mathbf{P} = m \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) f d\mathbf{v} \quad (3-9)$$

$$\mathbf{R} = -n\mathbf{u}\nu_m \quad (3-10)$$

$\nu_m$ は衝突周波数(正確には運動量輸送周波数)であり、 $\mathbf{R}$ は衝突により他の種類の粒子から輸送される運動量を表している。上記の式で用いられている、ベクトル同士を並べて書く表記

(例えば $\mathbf{uu}$ ) は

$$\mathbf{uu} = \begin{pmatrix} u_x u_x & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y u_x & u_y u_y & u_y u_z \\ u_z u_x & u_z u_y & u_z u_z \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

を表す。式 3-8 の左辺第二項、右辺第一項は式 3-6 の左辺第二項に対応し、それぞれ、平均速度による項、平均からのずれによる項を意味する。

$\Phi = m|\mathbf{v}|^2/2$ を代入するとエネルギー保存測が得られる。

$$\frac{\partial(n\varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}\varepsilon + \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{Q}) = n\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + S_\varepsilon \quad (3-12)$$

ここで、 $S_\varepsilon$ は他の種類の粒子との衝突などによってもたらされるエネルギー上昇量。 $\mathbf{Q}$ は熱流束ベクトルで以下のように表される。

$$\mathbf{Q} = \int |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f d\mathbf{v} \quad (3-13)$$

しかし、式 3-6 だけでは解くことが不可能である。それは式 3-6 が速度の分布に関する式を含んでおらず、したがって $\mathbf{v}$ を含んだ $\mathbf{P}$ や $\mathbf{Q}$ を求めることが出来ないからである。そこで、速度の分布についての仮定をおいてやる必要がある。ここでは圧力テンソル $\mathbf{P}$ が対角かつ等方であるという仮定をおく。すると単位行列 $\mathbf{I}$ に対して

$$\mathbf{P} = knT\mathbf{I} \quad (3-14)$$

$$knT = \frac{m}{3} \int |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 f d\mathbf{v} \quad (3-15)$$

と書くことが出来る。なお $k$ はボルツマン定数である。式 3-8 に式 3-7 と式 3-14 を代入すると

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{k}{mn} \nabla(nT) = \frac{\mathbf{F}}{m} - \nu_m \mathbf{u} \quad (3-16)$$

ここで、衝突が十分頻繁に起こっており、平均速度 $\mathbf{u}$ の変化が時間的にも空間的にも他の項に比べて小さいことを仮定すると

$$\frac{k}{mn} \nabla(nT) = \frac{\mathbf{F}}{m} - \nu_m \mathbf{u} \quad (3-17)$$

力としてかかっているのが電界による影響のみとし、 $q$ を単位体積あたりの電荷とすると

$$\mathbf{\Gamma} \equiv n\mathbf{u} = \frac{q}{m\nu_m} n\mathbf{E} - \frac{k}{m\nu_m} \nabla(nT) \quad (3-18)$$

となる。

$$\mu \equiv \frac{|q|}{m\nu_m} \quad (3-19)$$

$$D \equiv \frac{kT}{m\nu_m} \quad (3-20)$$

とおくと、 $\mu$ と $D$ の間に以下の関係式が成り立つ。

$$\frac{D}{\mu} = \frac{k}{|q|} T \quad (3-21)$$

式 3-18 を  $D$  と  $\mu$  を用いて表記すると

$$\Gamma \equiv n\mathbf{u} = \pm\mu n\mathbf{E} - \nabla(Dn) \quad (3-22)$$

この式 3-22 を粒子数保存の式 3-7 に代入すると以下の式が得られる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (\pm\mu n\mathbf{E} - \nabla(Dn)) = S \quad (3-23)$$

式 3-22、式 3-23 にエネルギー保存の式 3-12 を加えて解けば、粒子数、平均速度、エネルギーが求まるわけだが、これらの式には未知のパラメータが含まれており、これだけで解くことは出来ない。この未知パラメータは  $S$ 、 $S_e$ 、 $\mathbf{v}_m$  といった生成項に関するパラメータである。これらを正確に求めるにはプラズマ中における反応であったり衝突であったりを考慮しなければならない、非常に複雑な過程を必要とする。そのため多くの場合これらのパラメータを求めるのに、より簡単でもっともらしい仮定を用いる。

### 3.2 両極性拡散係数

プラズマの持つ性質の一つに準中性というものがある。これは、電荷に偏りが出た場合それを戻すような方向に電界ができ、荷電粒子、主に電子が電界に沿って移動し、偏りを打ち消してしまうため結果的に電気的中性を保つというもので、このような現象はデバイ遮蔽と呼ばれ、主にデバイ長よりも長いスケールにおいて起こる。この現象は電子側の立場から見ると、拡散を阻害する影響であるともとらえることができ、電子の拡散係数が見かけ上小さくなっているとも言える。この節ではこの見かけ上の拡散係数、すなわち両極性拡散係数を求める。

まず、存在する電界が荷電粒子の偏りによるもの(これを  $\mathbf{E}_{sp}$  と表記する)のみであること、及び空間的な拡散係数変化が十分小さいことを仮定すると、式 3-23 は以下ようになる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (\pm\mu n\mathbf{E}_{sp} - D\nabla n) = S \quad (3-24)$$

ここで、簡単のためプラズマが電子、一価の陽イオン、中性粒子の三種のみで構成されていると仮定する。電子、陽イオンの粒子密度  $n_e$ 、 $n_i$  についての式は以下ようになる。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (-\mu_e n_e \mathbf{E}_{sp} - D_e \nabla n_e) = S \quad (3-25)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu_i n_i \mathbf{E}_{sp} - D_i \nabla n_i) = S \quad (3-26)$$

ここで電子、陽イオンに対する各係数をそれぞれ下付きの  $e$ 、 $i$  で表した。外部 DC 電界が存在しない場合、電気的な中性から、 $n_e = n_i \equiv n$  が良い近似として成り立つ。また、電子、陽イオンが電気的中性を保ちつつ流れるため

$$\Gamma_e \equiv n_e \mathbf{u}_e = n_i \mathbf{u}_i \equiv \Gamma_i \equiv \Gamma \quad (3-27)$$

となる。よって

$$-\mu_e n_e \mathbf{E}_{sp} - D_e \nabla n_e = \mu_i n_i \mathbf{E}_{sp} - D_i \nabla n_i$$

$$\mathbf{E}_{sp} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \quad (3-28)$$

また

$$\mathbf{\Gamma} = -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \quad (3-29)$$

となる。以上から式 3-25 と式 3-26 は以下の式となる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \right) = S \quad (3-30)$$

ここで

$$D_a = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \quad (3-31)$$

とおくと式 3-30 は

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot (D_a \nabla n) = S \quad (3-32)$$

と書ける。この  $D_a$  が両極性拡散係数である。一般的に電子の質量は陽イオンの質量に比べて十分大きく、したがって

$$\mu_e \equiv \frac{e}{m_e v_m} \gg \frac{e}{m_i v_m} \equiv \mu_i \quad (3-33)$$

である。また、電子温度が陽イオンの温度に比べて十分高い場合

$$\mu_i D_e = \frac{k e T_e}{m_i m_e v_m^2} \gg \frac{k e T_i}{m_i m_e v_m^2} = \mu_e D_i \quad (3-34)$$

となる。このことを仮定して近似すると式 3-31 は

$$D_a \approx \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e \quad (3-35)$$

となる。

### 3.3 デバイ長より短いスケールでの拡散係数

式 3-32 はデバイ長が見たいスケールに対して十分小さいときに成り立つ式である。デバイ長  $\lambda_D$  は以下の式で表される。

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T_e}{n e^2}} \quad (3-36)$$

$\varepsilon_0$  は真空の誘電率、 $k$  はボルツマン定数である。この式から、プラズマの密度が十分大きい場合はデバイ長が短くなるため、式 3-32 の両極性拡散近似がよく成り立ち、逆に密度が小

さくになると近似が成り立たなくなることが分かる。たとえば見たい現象のスケールが 1 mm 程度であるとし、電子温度  $T_e \cong 2 \text{ eV}$  とすると、プラズマ密度が  $10^{20} \text{ m}^{-3}$  の場合はデバイ長  $\lambda_D \cong 10^{-3} \text{ mm}$  なので両極性拡散の近似が成り立つが、プラズマ密度が  $10^{14} / \text{m}^3$  の場合はデバイ長  $\lambda_D \cong 1 \text{ mm}$  となるので、この近似は適当と言えなくなる。高密度のプラズマスポットを扱う場合においても、スポット外縁部においてはプラズマ密度が徐々に低くなるため、この部位におけるプラズマの動きを解くのに両極性拡散近似を用いることは出来ない。そこで、このように、両極性拡散が使えず、電子の自由拡散にもならない領域においても使える有効拡散係数を求めることが必要となるのである。この節では本研究において用いた J. Boeuf らによる有効拡散係数([4], [5])について説明する。これを求めるには分極による電界  $\mathbf{E}_{sp}$  をより厳密に見る必要がある。 $\mathbf{E}_{sp}$  はポテンシャル  $\Phi$  に対し  $\mathbf{E}_{sp} = -\nabla\Phi$  と書け、このポテンシャル  $\Phi$  は以下のポアソン方程式により決定される。

$$\nabla^2\Phi = -\frac{e}{\epsilon_0}(n_i - n_e) \quad (3-37)$$

ここで、式 3-26 から式 3-25 を引くと

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_i - n_e) + \nabla \cdot \{(\mu_i n_i + \mu_e n_e)\mathbf{E}_{sp} - (D_i \nabla n_i - D_e \nabla n_e)\} = 0 \quad (3-38)$$

となる。この式に式 3-37 を代入し、さらに  $\mathbf{E}_{sp} = -\nabla\Phi$  を使うと

$$-\frac{\epsilon_0}{e} \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{sp} + \nabla \cdot \{(\mu_i n_i + \mu_e n_e)\mathbf{E}_{sp} - (D_i \nabla n_i - D_e \nabla n_e)\} = 0$$

さらに  $n_i - n_e \ll n_e \equiv n$  を仮定し、微少項を除去すると上記の式は以下ようになる。

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\epsilon_0}{e} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{sp} + (\mu_i + \mu_e)n\mathbf{E}_{sp} - (D_i - D_e)\nabla n \right] = 0$$

プラズマ領域から十分離れた場所においては  $\mathbf{E}_{sp}$ 、 $n$  が 0 であることから

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0}{e} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{sp} + (\mu_i + \mu_e)n\mathbf{E}_{sp} - (D_i - D_e)\nabla n &= 0 \\ \frac{\epsilon_0}{en(\mu_i + \mu_e)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{sp} + \mathbf{E}_{sp} &= \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \end{aligned} \quad (3-39)$$

ここで

$$\tau_m = \frac{\epsilon_0}{en(\mu_i + \mu_e)} \quad (3-40)$$

とおく。式 3-39 と両極性拡散における  $\mathbf{E}_{sp}$  の式 3-28 を比較すると、左辺に  $\tau_m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{sp}$  が加わっていることが分かる。 $\mathbf{E}_{sp}$  の微分を残したままでは、拡散係数と同様の形に落とし込むことが出来ないで、この微分を、近似を用いて消すことを考える。ここで二つの仮定をおく。一つ目は分布がある形を保ちつつプラズマの伝播とともに進行していること、二つ目はこの分布がある指数関数の形をしていることである。この仮定をおくと以下の式が成り立



つ。

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{sp}}}{\partial t} = U_{\text{ion}} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{sp}}}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{\text{ion}}} \quad (3-41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{sp}}}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{\text{ion}}} = \frac{\mathbf{E}_{\text{sp}}}{2L} \quad (3-42)$$

ここで、 $U_{\text{ion}}$ はプラズマの伝播速度 (ionization front velocity)、 $\hat{\mathbf{r}}_{\text{ion}}$ は伝播方向単位ベクトル、 $L$ はプラズマフロントにおける特性長である。 $U_{\text{ion}}$ は[6]より

$$U_{\text{ion}} = 2\sqrt{v_i D_e} \quad (3-43)$$

とあらわされる。また、 $L$ は

$$L = \sqrt{\frac{D_e}{v_i}} \quad (3-44)$$

である。以上より、式 3-39 の左辺第一項は以下のように近似できる。

$$\tau_m \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{sp}}}{\partial t} \cong v_i \tau_m \mathbf{E}_{\text{sp}} \quad (3-45)$$

ここで簡単のため $\alpha \equiv v_i \tau_m$ とおくと式 3-39 は

$$\alpha \mathbf{E}_{\text{sp}} + \mathbf{E}_{\text{sp}} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \quad (3-46)$$

式を整理すると

$$\mathbf{E}_{\text{sp}} = \frac{1}{\alpha + 1} \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \quad (3-47)$$

よって

$$\begin{aligned} \Gamma_e &\equiv -\mu_e n_e \mathbf{E}_{\text{sp}} - D_e \nabla n_e \\ &\cong -\left( \frac{\mu_e}{\alpha + 1} \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} + D_e \right) \nabla n_e \end{aligned} \quad (3-48)$$

この式より、有効拡散係数は以下のようにとればよいことが分かる。

$$D_{\text{eff}} \equiv \frac{\mu_e}{\alpha + 1} \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} + D_e \quad (3-49)$$

この式を式変形すると

$$\begin{aligned} D_{\text{eff}} &= \frac{\mu_e D_i - \mu_e D_e + (\alpha + 1)(\mu_i + \mu_e) D_e}{(\alpha + 1)(\mu_i + \mu_e)} \\ &= \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e + \alpha(\mu_i + \mu_e) D_e}{(\alpha + 1)(\mu_i + \mu_e)} \\ &= \frac{D_a + \alpha D_e}{\alpha + 1} \end{aligned} \quad (3-50)$$

となる。この式から $\alpha \gg 1$ のときは $D_{\text{eff}} \approx D_e$ となり、逆に $\alpha \ll 1$ のときは $D_{\text{eff}} \approx D_a$ となるこ

とが分かる。ここでもう少し $\alpha$ について考察してみよう。 $\alpha$ を少し詳しく書くと以下のようなになる。

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv v_i \tau_m \\ &= v_i \frac{\varepsilon_0}{en(\mu_i + \mu_e)}\end{aligned}$$

ここで $\mu_i \ll \mu_e$ をもちいて近似すると

$$\begin{aligned}\alpha &\cong v_i \frac{\varepsilon_0}{en\mu_e} \\ &= \frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2 n} v_i v_m\end{aligned}\tag{3-51}$$

となる。ここで $\lambda_D^2/L^2$ を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_D^2}{L^2} &= \frac{\varepsilon_0 k T_e}{n e^2} \cdot \frac{v_i}{D_e} \\ &= \frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2 n} v_i v_m\end{aligned}\tag{3-52}$$

よって $\alpha$ は

$$\alpha \cong \frac{\lambda_D^2}{L^2}\tag{3-53}$$

となり、デバイ長 $\lambda_D$ をプラズマフロントの特性長 $L$ で割ったものの二乗に等しいことが分かる。すなわち、この節の冒頭で、「見たいスケール」というあいまいな表現をつかっていたが、これはプラズマフロントの特性長 $L$ に他ならないのである。以上の議論から、式 3-25 は、有効拡散係数を用いて

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (D_{\text{eff}} \nabla n_e) = S\tag{3-54}$$

と書ける。なお、本研究において $v_m$  は  $4.752 \times 10^{12} /s$ で一定とした。

### 3.4 電子生成項の導出

式 3-54 だけではまだプラズマを解くことは出来ない。それは電子生成項 $S$ が未知であるからだ。この項を厳密に求めるには 3.1 節の最後で述べたように、プラズマ内で起こる様々な反応をといてやる必要がある。しかし、このような反応を逐次といてやるには多大な計算コストがかかるため、仮定や近似を用いて簡略化する必要がある。この節では[5]、[7]で用いられており、本研究においても用いた方法について説明する。

ある空間に電磁波が入射したときの電子生成項がどのようなになるかを考える。電子数密度に影響する反応として代表的なものは、電離反応、電子吸着反応、再結合反応である。中性粒子の密度が反応によってほとんど変わらないことを仮定し、これらの反応の周波数をそれぞれ $v_i$ 、 $v_a$ 、 $v_{re}$ と書くと $S$ は以下のように書ける。

$$S = (\nu_i - \nu_a)n_e + \nu_{re}n_e^2 \quad (3-55)$$

ここで電離度が十分低いとすると、電子とイオンが出会う確率が低くなるため、再結合反応は電離反応に比べて十分小さいとすることが出来る。

$$S = (\nu_i - \nu_a)n_e \quad (3-56)$$

本来 $\nu_i$ 、 $\nu_a$ は時間によって変化する電子温度に依存する。そのためエネルギー保存の式から電子温度を逐次求めてやる必要がある。しかし、この電子温度はある時間後に反応に使われるエネルギーと電子に供給されるエネルギーがつりあうような点に収束すると考えられるので、現象のタイムスケールが温度収束までの時間に比べて十分長い場合はこのつりあい点のみを考えれば良く、したがって電子温度の時間変化を考えなくても良い。すなわち、このとき各反応周波数と電子が吸収するエネルギーが一对一に対応しているとみなすことが出来るのである。そこで、電磁波から単位時間当たりに電子が吸収するエネルギーについて考える。速度 $\mathbf{v}$ で動いている物体が得るエネルギーは $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ であるので求める吸収エネルギーは電子の速度を $\mathbf{v}_e$ として $\langle -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_e \rangle$ とあらわせる。電子の運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}\mathbf{E} - \nu_m \mathbf{v}_e \quad (3-57)$$

となる。電磁波中の磁場の影響は一般的に電界による影響に比べて十分小さいため無視した。ここで入射電界を $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$ とおいて代入すると

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}\mathbf{E}_0 \sin \omega t - \nu_m \mathbf{v}_e \quad (3-58)$$

この微分方程式の解は

$$\mathbf{v}_e = \frac{e\mathbf{E}_0}{m_e \sqrt{\omega^2 + \nu_m^2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3-59)$$

$$\varphi = \arctan \frac{\nu_m}{\omega} \quad (3-60)$$

よって単位時間当たり吸収エネルギーの時間平均は

$$\begin{aligned} \langle -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_e \rangle &= -e \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_e dt \cdot \frac{\omega}{2\pi} \\ &= \frac{e^2 E_0^2 \nu_m}{m_e \sqrt{\omega^2 + \nu_m^2}} \end{aligned} \quad (3-61)$$

である。あとはこの吸収エネルギーと一对一に対応する各周波数を探してくればよい。ここで注目するのは直流電界の場合の周波数である。直流電界では先行研究が数多くあり、比較的信用できる周波数データがそろっている。対応をつけるため直流電界の場合の吸収エネルギーを運動方程式 3-57 から求めると以下ようになる。

$$\langle -e\mathbf{E}_{dc} \cdot \mathbf{v}_e \rangle = \frac{e^2 E_{dc}^2}{m_e \nu_m} \quad (3-62)$$

この式と式 3-61 との比較から直流電界が、

$$E_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{rms}}}{\sqrt{1 + \omega^2/\nu_m^2}} \quad (3-63)$$

であらわされる $E_{\text{eff}}$ となる点における周波数データを用いればよいことが分かる。なお、上式における $E_{\text{rms}}$ は電界の二乗平均であり以下の式で表される。

$$E_{\text{rms}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \quad (3-64)$$

電界と周波数の関係式として、多くの先行研究([5], [7])で使われている以下の近似式を用いた。

$$\nu_{\text{eff}} = \nu_a \left[ \left( \frac{E_{\text{eff}}}{E_c} \right)^\beta - 1 \right] \quad (3-65)$$

ここでは $\nu_{\text{eff}}$ 正味の電離周波数であり、 $E_c$ は臨界電界強度である。 $\beta$ は通常 5.3 が用いられる。本研究において $\nu_a$ は  $3.8 \times 10^7 /s$ で一定とした。

## 4. 数値計算に向けた離散化

### 4.1 マクスウェル方程式の離散化

#### 4.1.1 FDTD (Finite Difference Time Domain) 法

この節ではマクスウェル方程式から電磁場の時間発展を解く数値計算法のひとつである FDTD 法([8])について説明する。まず、マクスウェル方程式を以下に示す。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_e \quad (4-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4-2)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \quad (4-3)$$

$$\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}) = 0 \quad (4-4)$$

式 4-3、式 4-4 については時間微分項を含んでいないため、初期条件において満たしていれば自動的にそれ以降の時間においても満たされる。よって時間発展を解くには式 4-1 と式 4-2 を差分化すればよい。これらの式を分けて書くと

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial z} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_x \\ \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial x} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_y \\ \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_z \end{cases} \quad (4-5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (4-6)$$

となる。ここで、図のように座標をとる。このように各パラメータにおいて位置を変えるのが FDTD 法の特徴である。さらに、電界と磁界で計算する時間を半時間刻みだけずらして差分化を行うと以下のような式となる。

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{E}_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \mathbf{E}_x|_{i+1/2,j,k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\mathbf{H}_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - \mathbf{H}_z|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{\mathbf{H}_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_y|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \mathbf{J}_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \right) \\ \frac{\mathbf{E}_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1} - \mathbf{E}_y|_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\mathbf{H}_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_x|_{i,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{\mathbf{H}_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - \mathbf{H}_z|_{i-1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta x} - \mathbf{J}_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} \right) \\ \frac{\mathbf{E}_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1} - \mathbf{E}_z|_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\mathbf{H}_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_y|_{i-1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{\mathbf{H}_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_x|_{i,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - \mathbf{J}_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} \right) \end{cases} \quad (4-7)$$

$$\begin{cases} \frac{H_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} - H_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{E_z|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1/2} - E_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{E_y|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1/2} - E_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta z} \right) \\ \frac{H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} - H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{E_x|_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/2} - E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{E_z|_{i+1,j,k+1/2}^{n+1/2} - E_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) \\ \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1} - H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{E_y|_{i+1,j+1/2,k}^{n+1/2} - E_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{E_x|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2} - E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \end{cases} \quad (4-8)$$

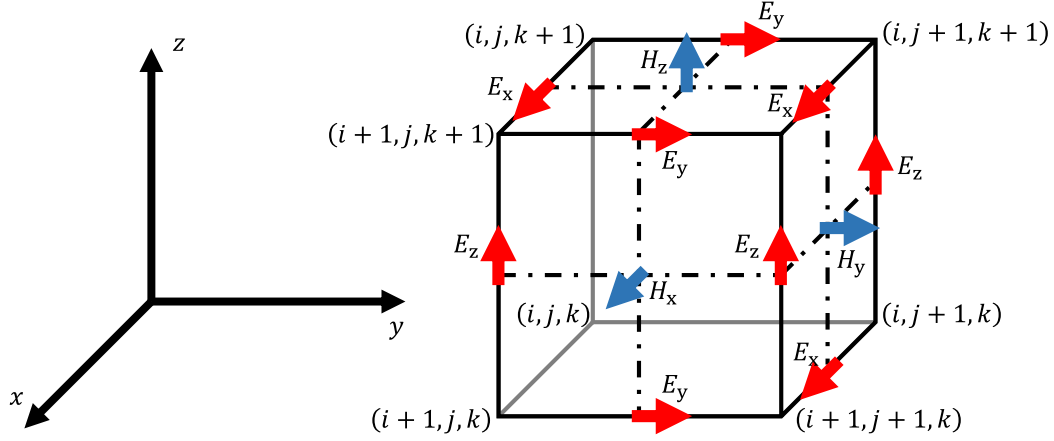


図 4.1 FDTD における電場、磁場の各要素の位置

空間刻み幅は[9]によれば、電磁波を再現するのに波長 $\lambda$ に対して $\lambda/10$ より小さくとれば十分に再現が可能である。しかし、プラズマが存在する場合、空間電流が存在するためこの変化の空間スケールに対して十分小さくおく必要があるだろう。時間刻みについては計算の安定性から以下の条件が必要となる。

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_0 \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (4-9)$$

ここで $c_0$ は真空中における光速である。この条件は、空間において等方的に刻みを設定する場合、 $\Delta x = \Delta y = \Delta z \equiv \Delta l$  とおくと

$$\Delta t \leq \frac{\Delta l}{c_0 \sqrt{3}} \quad (4-10)$$

となる。

本研究においては FDTD 法を二次元空間において用いた。FDTD 法を二次元で考えるには、方向の変化量が 0 であるとすれば良い。よって、式 4-7、式 4-8 は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_x|_{i+1/2,j}^{n+1} - E_x|_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{1}{\varepsilon_0} J_x|_{i+1/2,j}^{n+1/2} \\ \frac{E_y|_{i,j+1/2}^{n+1} - E_y|_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{1}{\varepsilon_0} J_y|_{i,j+1/2}^{n+1/2} \\ \frac{E_z|_{i,j}^{n+1} - E_z|_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} J_z|_{i,j}^{n+1/2} \end{array} \right. \quad (4-11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H_x|_{i,j+1/2}^{n+1} - H_x|_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{E_z|_{i,j+1}^{n+1/2} - E_z|_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} \\ \frac{H_y|_{i+1/2,j}^{n+1} - H_y|_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_0} \frac{E_z|_{i+1,j}^{n+1/2} - E_z|_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} \\ \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - H_z|_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{E_y|_{i+1,j+1/2}^{n+1/2} - E_y|_{i,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{E_x|_{i+1/2,j+1}^{n+1/2} - E_x|_{i+1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \end{array} \right. \quad (4-12)$$

#### 4.1.2 FDTD 法の空間高次精度化

本研究において注目している現象は波長の数倍程度の大きさのものであるため、計算領域は比較的広めにとらなければならない。一方、伸展中のプラズマ密度変化の距離スケールは入射ミリ波の波長よりも短いことが考えられ、空間精度をプラズマがないときに比べて高く設定する必要がある。そのため、このままでは空間精度を得るためにメッシュサイズを小さくする必要があり、一方計算領域は広いため、メッシュ数が多くなり、計算コストが膨大になってしまうことが考えられる。そこで、同じメッシュサイズでもより高精度に計算できるスキームを用いた。上記の FDTD スキームは時間二次、空間二次精度のスキーム(S22)となっているが、ここでは時間二次、空間四次精度のスキーム(S24) ([10])について説明する。

空間高次精度化を行うには、さらに一つ隣のデータまで用いて計算を行えばよい。例えば  $E_x|_{i+1/2,j}^{n+1}$  を求めるのに S22 では  $H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}$  と  $H_z|_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}$  を用いるが、高精度化を行うには、さらに隣の  $H_z|_{i+1/2,j+3/2}^{n+1/2}$  と  $H_z|_{i+1/2,j-3/2}^{n+1/2}$  を用いる必要がある。これを適当な重みをつけて足し合わせる。以下に二次元における S24 の式を示す。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_x|_{i+1/2,j}^{n+1} - E_x|_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = \frac{9}{8\varepsilon_0} \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{1}{8\varepsilon_0} \frac{H_z|_{i+1/2,j+3/2}^{n+1/2} - H_z|_{i+1/2,j-3/2}^{n+1/2}}{3\Delta y} - \frac{1}{\varepsilon_0} J_x|_{i+1/2,j}^{n+1/2} \\ \frac{E_y|_{i,j+1/2}^{n+1} - E_y|_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{9}{8\varepsilon_0} \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{1}{8\varepsilon_0} \frac{H_z|_{i+3/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i-3/2,j+1/2}^{n+1/2}}{3\Delta x} - \frac{1}{\varepsilon_0} J_y|_{i,j+1/2}^{n+1/2} \\ \frac{E_z|_{i,j}^{n+1} - E_z|_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{9}{8\varepsilon_0} \left( \frac{H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \\ \quad - \frac{1}{8\varepsilon_0} \left( \frac{H_y|_{i+3/2,j}^{n+1/2} - H_y|_{i-3/2,j}^{n+1/2}}{3\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j+3/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j-3/2}^{n+1/2}}{3\Delta y} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} J_z|_{i,j}^{n+1/2} \end{array} \right. \quad (4-13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H_x|_{i,j+1/2}^{n+1} - H_x|_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{9}{8\mu_0} \frac{E_z|_{i,j+1}^{n+1/2} - E_z|_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} + \frac{1}{8\mu_0} \frac{E_z|_{i,j+2}^{n+1/2} - E_z|_{i,j-1}^{n+1/2}}{3\Delta y} \\ \frac{H_y|_{i+1/2,j}^{n+1} - H_y|_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = \frac{9}{8\mu_0} \frac{E_z|_{i+1,j}^{n+1/2} - E_z|_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{1}{8\mu_0} \frac{E_z|_{i+2,j}^{n+1/2} - E_z|_{i-1,j}^{n+1/2}}{3\Delta x} \\ \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - H_z|_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{9}{8\mu_0} \left( \frac{E_y|_{i+1,j+1/2}^{n+1/2} - E_y|_{i,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{E_x|_{i+1/2,j+1}^{n+1/2} - E_x|_{i+1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \\ \quad + \frac{1}{8\mu_0} \left( \frac{E_y|_{i+2,j+1/2}^{n+1/2} - E_y|_{i-1,j+1/2}^{n+1/2}}{3\Delta x} - \frac{E_x|_{i+1/2,j+2}^{n+1/2} - E_x|_{i+1/2,j-1}^{n+1/2}}{3\Delta y} \right) \end{array} \right. \quad (4-14)$$

### 4.1.3 Mur の吸収境界

放電実験は十分広い実験室で行われており、プラズマにより反射された電磁波は自由空間へと放たれる。しかし、数値計算においてこのように広い空間を計算領域とするのは数値計算コストの面から現実的ではない。そこで、計算領域を見たい領域のみに絞り、境界において電磁波を吸収するように設定することで十分広い領域がある場合と同じ電界分布を領域内に再現する。ここではこの吸収境界に用いられる数値計算法のうちもっともシンプルな方法である G. Mur による境界条件([11])について説明する。

図 4.1 のように、 $x = 0$ 面に吸収境界がありその境界に向かって $z$ 方向に電界の振幅をもつ電磁波が $x$ 軸に平行に伝播していることを考える。

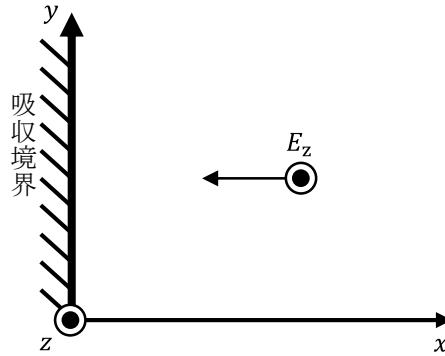


図 4.2 吸収境界へと向かう電磁波

このような波は以下のように $x + c_0 t$ の関数で表わされる。

$$E_z = E_z(x + c_0 t) \quad (4-15)$$

この式は以下の微分方程式を満足する。

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad (4-16)$$

$x = 0$ において反射がない場合、境界でも式 4-16 が成り立つはずである。 $x = 0$ 周りにおいて式 4-16 を離散化すると

$$\left. \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|_{1/2,j}^{n+1/2} - \frac{1}{c_0} \left. \frac{\partial E_z}{\partial t} \right|_{1/2,j}^{n+1/2} = 0$$



$$\frac{1}{2} \left( \frac{E_z|_{1,j}^{n+1} - E_z|_{0,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{E_z|_{1,j}^n - E_z|_{0,j}^n}{\Delta x} \right) - \frac{1}{2c_0} \left( \frac{E_z|_{1,j}^{n+1} - E_z|_{1,j}^n}{\Delta t} + \frac{E_z|_{0,j}^{n+1} - E_z|_{0,j}^n}{\Delta t} \right) = 0$$

$$E_z|_{0,j}^{n+1} = E_z|_{1,j}^n + \frac{c_0 \Delta t - \Delta x}{c_0 \Delta t + \Delta x} (E_z|_{1,j}^{n+1} - E_z|_{0,j}^n) \quad (4-17)$$

となる。他の方向の電界、境界についても同様の方法を用いればよい。

#### 4.1.4 プラズマ電流の組み込み

本研究における計算では Maxwell 方程式に現れる電流項はプラズマ中電子の運動に起因する。この電流を解くには電子の運動方程式を用いるが、この運動方程式には電界が含まれているため、精度よく解くには Maxwell 方程式と電子の運動方程式を連立して離散化をする必要がある。以下に電流項を含んだ Maxwell 方程式と電子の運動方程式を時間方向に離散化した式を示す。[5]

$$\epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} = -\nabla \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mathbf{J}^{n+1} + \mathbf{J}^n}{2} \quad (4-18)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nu_m \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} = -\frac{e}{m_e} \frac{\mathbf{E}^{n+1} + \mathbf{E}^n}{2} \quad (4-19)$$

式 4-19 を変形すると

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \mathbf{u}^n - \frac{e\Delta t}{m_e} \frac{1}{1+\alpha} \left( \frac{\mathbf{E}^{n+1} + \mathbf{E}^n}{2} \right) \quad (4-20)$$

ここで

$$\alpha = \frac{\nu_m \Delta t}{2} \quad (4-21)$$

である。電流は以下の式で表せる。

$$\mathbf{J}^n = -en_e \mathbf{u}^n \quad (4-22)$$

式 4-20 と式 4-22 より

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{n+1} + \mathbf{J}^n &= -en_e (\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) \\ &= -en_e \left( 1 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \mathbf{u}^n + \frac{e^2 n_e \Delta t}{m_e} \frac{1}{1+\alpha} \left( \frac{\mathbf{E}^{n+1} + \mathbf{E}^n}{2} \right) \end{aligned} \quad (4-23)$$

この式を式 4-18 に代入して整理すると以下ようになる。

$$\mathbf{E}^{n+1} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \mathbf{E}^n + \frac{en_e \Delta t}{\epsilon_0} \frac{1+\alpha}{1+\beta} \mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{(1+\beta)\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4-24)$$

ここで

$$\beta = \frac{e^2 n_e}{m_e \epsilon_0} \frac{\Delta t^2}{4(1+\alpha)} \quad (4-25)$$

である。式 4-24 の空間変分の部分は FDTD 法に従って離散化する。この式 4-24 と式 4-20 を同時に解くことで精度よく電界を解くことができる。

## 4.2 プラズマ拡散方程式の離散化

3.3 節で求めたプラズマの拡散方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (D_{\text{eff}} \nabla n_e) = (v_i - v_a) n_e \quad (4-26)$$

本研究においては  $D_{\text{eff}}$  の空間変分が十分小さいことを仮定し、以下の方程式を解いた。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - D_{\text{eff}} \nabla^2 n_e = (v_i - v_a) n_e \quad (4-27)$$

ここではこの方程式を離散化していく。まず時間変分の離散化を行う。計算の安定性のため、生成項のうち電子数を減らす方向にかかる項、ここでは  $v_a$  を含む電子付着項を半陰解法的に  $v_a n_e^{n+1}$  とする。

$$\begin{aligned} \frac{n_e^{n+1} - n_e^n}{\Delta t} - D_{\text{eff}} \nabla^2 n_e^n &= v_i n_e^n - v_a n_e^{n+1} \\ n_e^{n+1} &= \frac{1}{1 + v_a \Delta t} \{ (1 + v_i \Delta t) n_e^n + D_{\text{eff}} \Delta t \nabla^2 n_e^n \} \end{aligned} \quad (4-28)$$

空間変分を含む部分  $\nabla^2 n_e^n$  については以下のように離散化すればよい。

$$\nabla^2 n_e|_{i,j}^n = \frac{n_e|_{i+1,j}^n - 2n_e|_{i,j}^n + n_e|_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{n_e|_{i,j+1}^n - 2n_e|_{i,j}^n + n_e|_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad (4-29)$$

式 4-28 に式 4-29 を代入したものを用いた。

## 5. 数値計算方法

### 5.1 時間刻み幅及び空間刻み幅

電磁波は、光速で移動するのに対しプラズマの伝播速度は高々数km/sである。そのため、電磁界が変化するタイムスケールに比べてプラズマ密度変化のタイムスケールは長く、したがって、プラズマを計算する時間刻みは電磁界を解くために用いるものほど小さくしてやる必要はない。そこで、プラズマと電磁界で異なる刻み幅を用いた。以下に本研究において用いた入射ミリ波の周波数を $f$ と置いた時のプラズマ、電磁界の刻み幅 $\Delta t_p$ 、 $\Delta t_E$ を示す。

$$\Delta t_p = \frac{1}{f} \quad (5-1)$$

$$\Delta t_E = \frac{1}{200f} \quad (5-2)$$

これらの刻み幅は、刻み幅を変えた試行をいくつか行い、その安定性、及び収束性から決定した。

空間刻みについては、今回実験等で確認されているプラズマの粒のサイズが、入射波長の半分程度であることから、電磁界を解く空間刻みよりプラズマ刻みを小さくしてやる必要があると考えられる。本研究においては入射ミリ波の波長を $\lambda$ とにおいて以下のようにプラズマ、電磁界の空間刻み幅 $\Delta l_p$ 、 $\Delta l_E$ を設定した。

$$\Delta l_p = \frac{\lambda}{100} \quad (5-3)$$

$$\Delta l_E = \frac{\lambda}{50} \quad (5-4)$$

しかし、これでは $E_{rms}$ とプラズマのセルが重なっていない点が存在するため(図 5.1)、この点においての $E_{rms}$ を決めてやる必要がある。プラズマセルの座標を $(i_p, j_p)$ とにおいて以下のよう $E_{rms}$ を設定した。

$$\begin{aligned} E_{rms}(i_p, j_p) = & (i + 1 - i_p)(j + 1 - j_p)E_{rms}(i, j) \\ & + (i_p - i)(j + 1 - j_p)E_{rms}(i + 1, j) \\ & + (i + 1 - i_p)(j_p - j)E_{rms}(i, j + 1) \\ & + (i_p - i)(j_p - j)E_{rms}(i + 1, j + 1) \end{aligned} \quad (5-5)$$

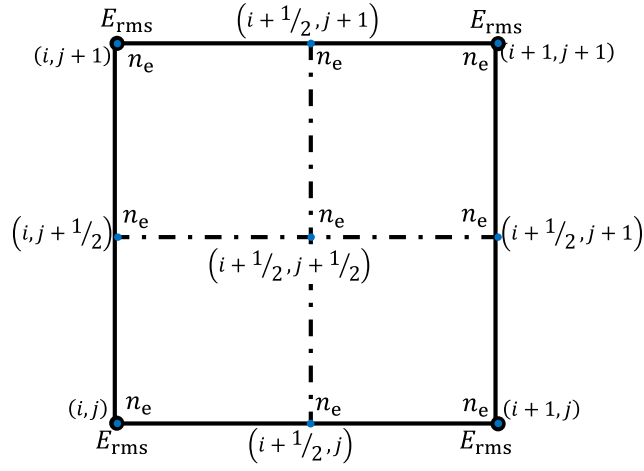


図 5.1 プラズマと  $E_{rms}$  のセル配置

## 5.2 計算領域

計算領域は、入射ミリ波の波長を  $\lambda$  として  $7.5\lambda \times 7\lambda$  とした(図 5.2)。境界条件は、長辺のうち片方を吸収境界、もう片方は空間対称を仮定して反射境界とした。短辺は片方を吸収境界、もう片方に吸収境界とミリ波発生源を配置した。また、初期プラズマを、短辺の吸収境界側に配置し、そこからのプラズマ伸展を計算した。本研究においてはミリ波発生源において一様にミリ波を与えた。

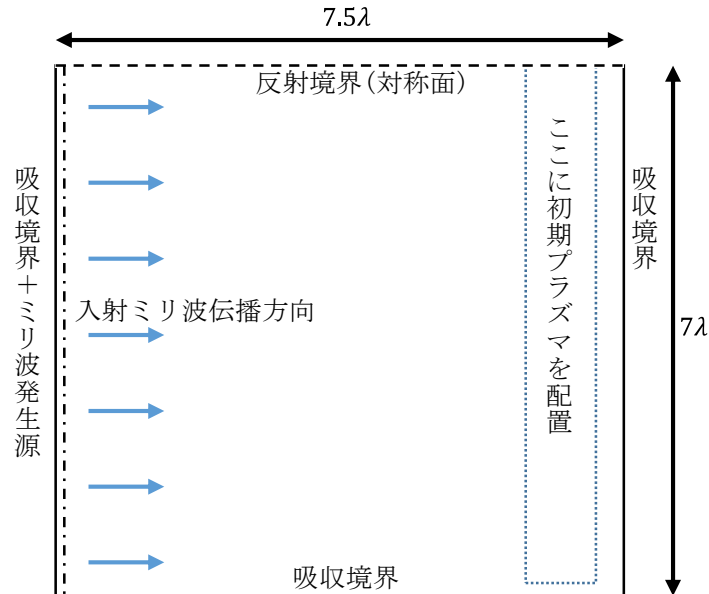


図 5.2 計算領域と境界条件

### 5.3 臨界電界強度 $E_c$ の決定

本研究における計算式では 3.4 節で説明したように、 $E_{\text{eff}}$ が臨界電界強度 $E_c$ を上回る場合生成項が正になり、下回る場合負になる。先行研究[5]、[6]においてはこの $E_c$ を 2.4 MV/m としている。しかし、本研究で再現をしようとしている楕状プラズマは、 $E_{\text{eff}}$ がこれよりも下回る場合において観測されている。そのため、このままの $E_c$ を用いたのでは生成項が正になることがなく、したがってプラズマが発生しないことになってしまう。このことから、再現しようとしている実験条件においてはこの臨界電界強度 $E_c$ が何かしらの要因で下がっていることが考えられる。本研究においては、入射ミリ波のエネルギー密度を 10 GW/m<sup>2</sup>( $E_{\text{eff}} \cong 1.4$  MV/m)に固定して、 $E_c$ を 1.1 MV/m、1.2 MV/m、1.3 MV/m と変化させて数値計算を行い、楕状プラズマの伸展速度が実験値から予想される伸展速度である 5 km/s に最も近くなるものを $E_c$ として採用した。図 5.3 に $E_c$ と伸展速度の関係をグラフで示す。この結果 1.2 MV/m の時、最も伸展速度 5 km/s に近かったため、 $E_c=1.2$  MV/m とした。

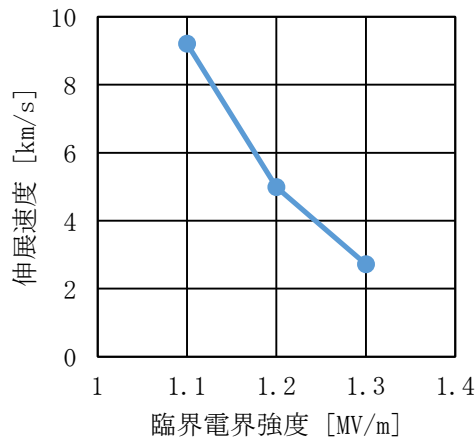


図 5.3 伸展速度と臨界電界強度の関係

## 6. ピッチサイズの初期プラズマ配置依存性

### 6.1 解析方法

ここではピッチサイズが初期プラズマの配置に依存するかどうかを調べた。初期プラズマ配置に大きく依存する場合、楕円構造はプラズマの初期着火時の分布に依存することになる。初期プラズマの配置(電子数密度分布)を図 6.1、6.2、6.3 のように変えてプラズマの進展を計算した。ミリ波の周波数は 170 GHz、パワー密度は 10 GW/m として計算した。

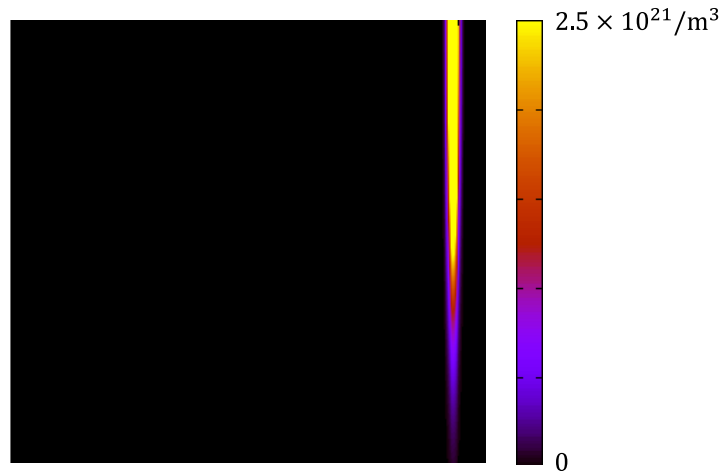


図 6.1 プラズマの初期分布パターン 1

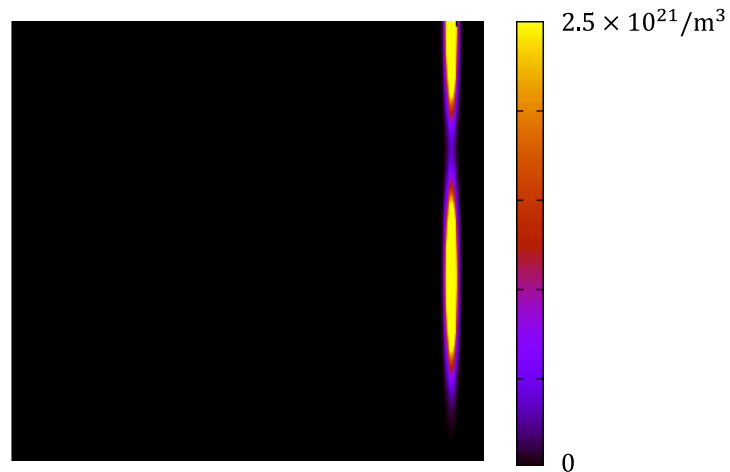


図 6.2 プラズマの初期分布パターン 2

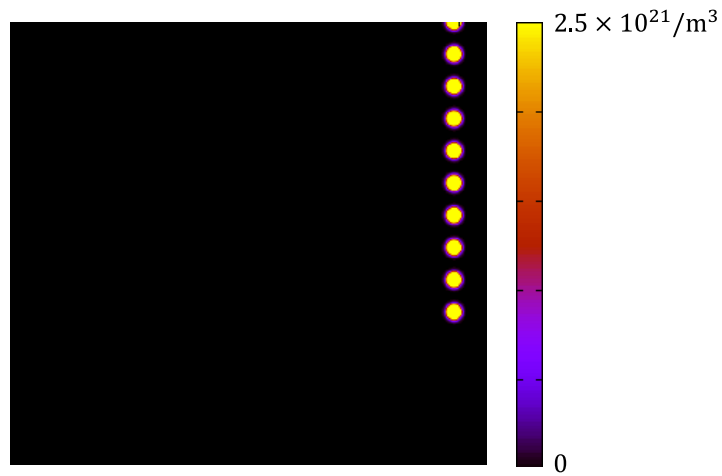


図 6.3 プラズマの初期分布パターン 3

## 6.2 計算結果

図 6.1、6.2、6.3 の初期プラズマから始めて  $1.9 \mu\text{s}$  後のプラズマの分布をそれぞれ図 6.4、6.5、6.6 に示す。この結果から、どの初期プラズマから始めた場合においても同様のピッチサイズ傾向がみられることがわかる。細かく見ると、初期プラズマにおける一様性が低い部位においてはピッチサイズが乱れているが、進展とともに安定した等間隔ピッチへと近づいていく傾向がみられるため、十分長い距離を伸展したのちには等間隔のピッチへと落ち着くと考えられる。図 6.4 のプラズマ分布と実験で観測されたプラズマの分布を比較したものを図 6.7 に示す。実験で観測されたピッチの平均サイズはおよそ  $1.6 \text{ mm}$  であり、図 6.4 におけるピッチサイズの平均は  $1.61 \text{ mm}$  であった。このことから、この計算結果は、実験のトレンドを再現できていると考えられる。

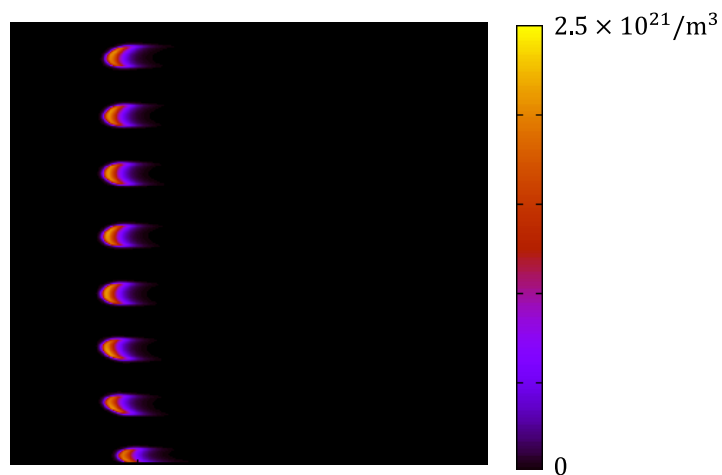


図 6.2 初期分布をパターン 1 とした場合における  $1.9 \mu\text{s}$  後のプラズマの分布

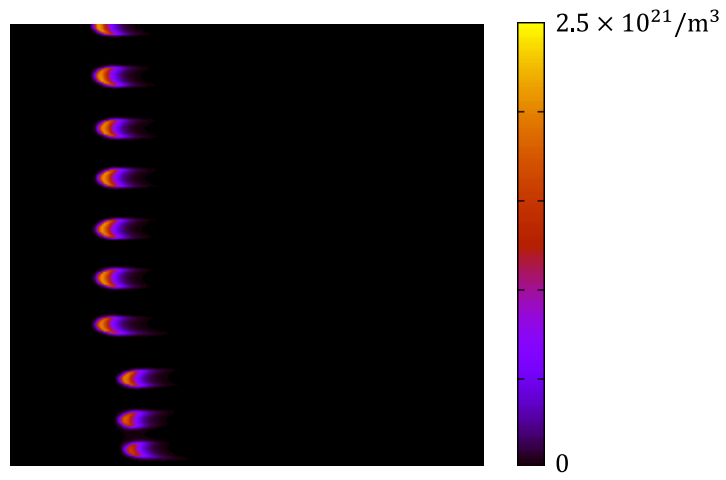


図 6.5 初期分布をパターン 2 とした場合における  $1.9 \mu\text{s}$  後のプラズマの分布

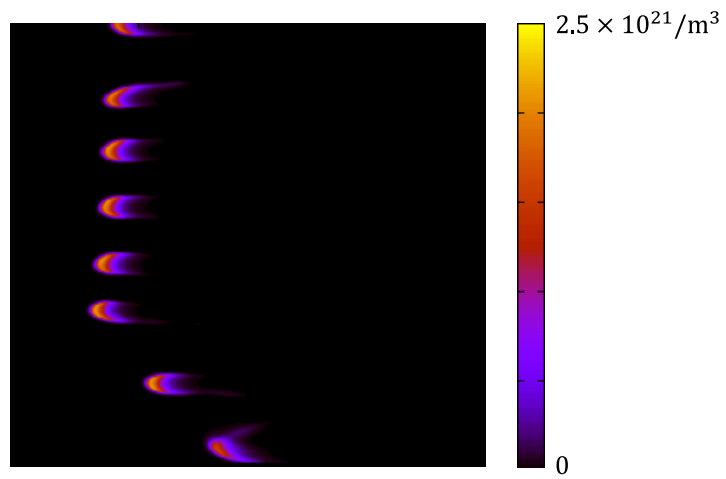


図 6.6 初期分布をパターン 3 とした場合における  $1.9 \mu\text{s}$  後のプラズマの分布

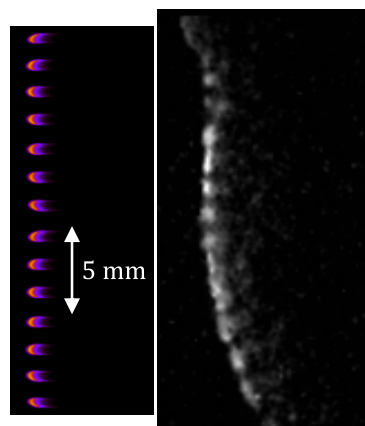


図 6.7 同スケールにおける計算結果(左)と実験結果(右)の比較



## 7. ピッチサイズの周波数依存性

### 7.1 解析方法

ピッチサイズの周波数依存性を調べるため、いくつかの周波数で数値計算を行い、ピッチサイズを比較した。計算する周波数としては、将来的な実験による確認を見据えて、ジャイロトロンによる発振実績のある 170 GHz、110 GHz、28 GHz をとった。さらにこれでは波長に偏りがあり傾向が見づらいため、50 GHz での計算も行った。周波数 170、110、50、28 GHz のミリ波の波長はそれぞれ 1.76、2.73、6.00、10.7 mm である。初期プラズマ分布は最も 6 章における計算で最もピッチサイズの収束が早かった図 6.1 の分布を用いた。

### 7.2 計算結果

数値計算により得られたピッチサイズと波長の関係を図 7.1 に示す。縦軸にピッチサイズ(mm)、横軸に入射ミリ波の波長(mm)をとった。この結果よりピッチサイズは波長に比例していることが分かり、ピッチサイズは波長 $\lambda$ としておよそ $0.9\lambda$ となることが分かる。伸展速度(km/s)を縦軸、波長(mm)を横軸に取ったものを図 7.2 に示す。これより、波長が長い、すなわち周波数が低いもののほうが速い伸展速度となる傾向があることが分かる。110、50、28 GHz における、十分ピッチが収束したのちのプラズマ分布をそれぞれ図 7.3、7.4、7.5 に示す。これらの図の領域は 5.3 節で述べたように $7.5\lambda \times 7\lambda$ であるので、波長によって粒の大きさも異なっていることが分かる。また、電子数密度も周波数によって異なっていることが分かる。図 7.7 に周波数と最大電子数密度の関係を示す。縦軸に最大電子数密度( $m^{-3}$ )、横軸に周波数(GHz)をとった。

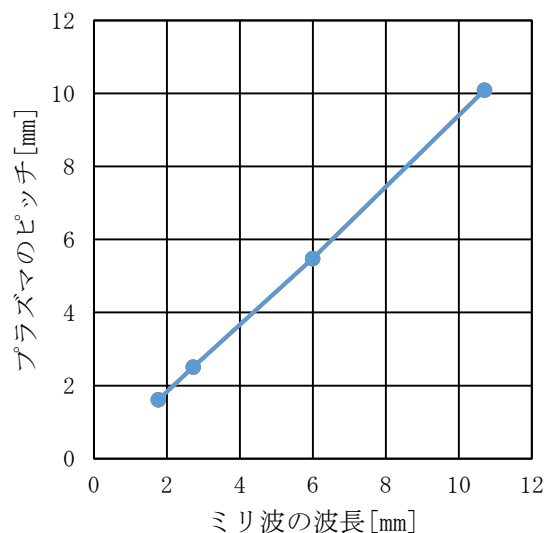


図 7.1 入射ミリ波の波長とピッチサイズの関係

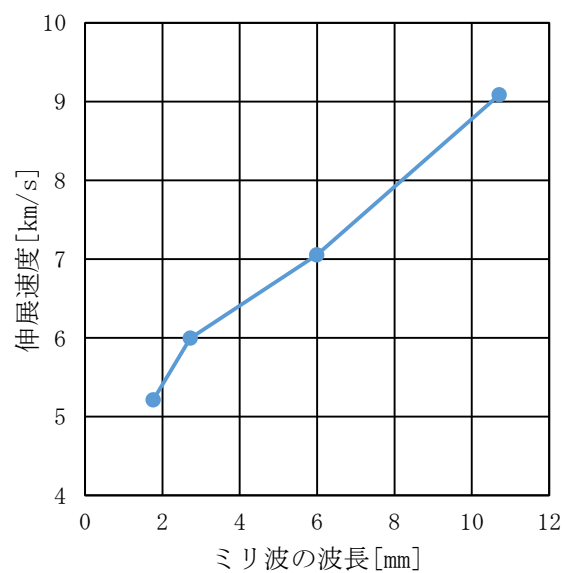


図 7.2 入射ミリ波の波長とプラズマ伸展速度の関係

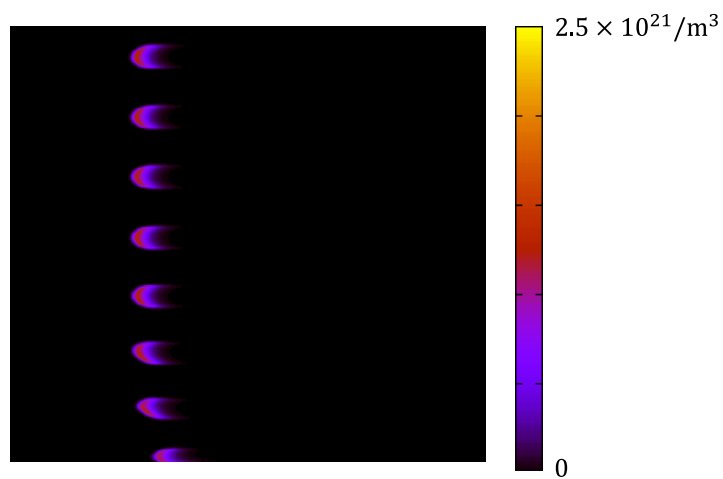


図 7.3 入射ミリ波 110 GHz の時のプラズマ分布

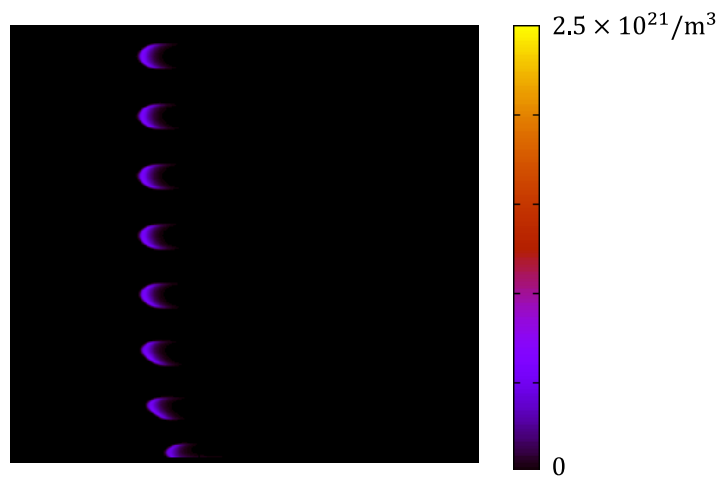


図 7.4 入射ミリ波 50 GHz の時のプラズマ分布

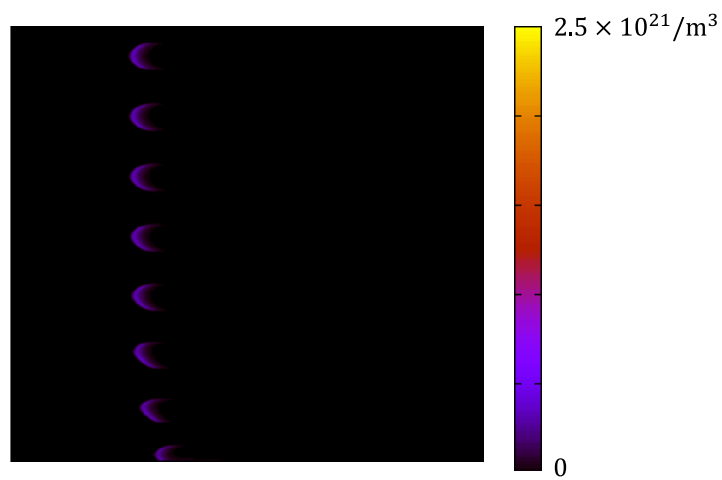


図 7.5 入射ミリ波 28 GHz の時のプラズマ分布

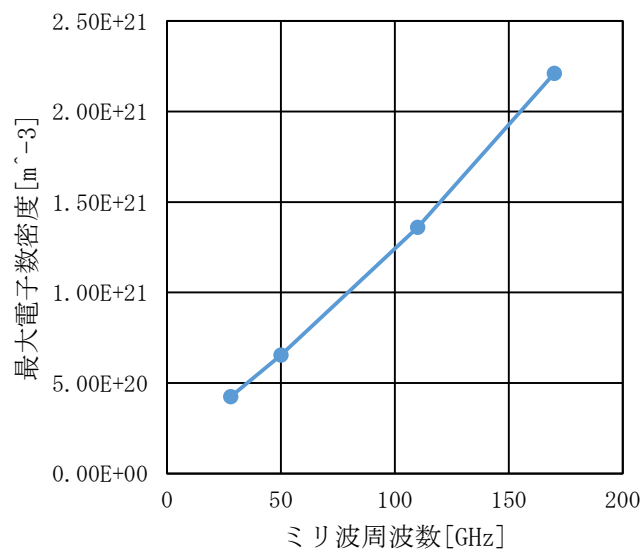


図 7.6 入射ミリ波の周波数と最大電子数密度の関係

## 8. ピッチサイズの電離周波数依存性

### 8.1 解析方法

本研究において電離周波数を求めるために用いた臨界電界強度 $E_c$ は 5.3 節で述べたように伝播速度が合うようフィッティングしており、物理的な裏付けがあるわけではない。そのため、もし臨界電界強度 $E_c$ にピッチサイズが強く依存する場合、本研究の計算におけるピッチサイズの見積もりは信憑性に欠けるものになってしまう。この章では入射ミリ波のパワー密度を  $10 \text{ GW/m}^2$  ( $E_{\text{eff}} \cong 1.4 \text{ MV/m}$ ) に固定して臨界電界強度 $E_c$ を 1.1、1.2、1.3 MV/m と変化させて計算を行い、ピッチサイズがどのように変わるかを見た。なお、これらの $E_c$ の比を見るとあまり大きな差がないように思えるが、入射ミリ波の $E_{\text{eff}}$ を用いて正味の電離周波数 $\nu_{\text{eff}}$ を式 3.65 から求めると、それぞれ  $9.8 \times 10^7$ 、 $4.8 \times 10^7$ 、 $1.8 \times 10^7 / \text{s}$  となり数倍程度の違いがあることが分かる。

### 8.2 計算結果

数値計算から求めたピッチサイズと $E_c$ の関係を図 8.1 に示した。縦軸にピッチサイズ、横軸に $E_c$ をとった。この結果から、 $E_c$ を変化させてもピッチサイズがほとんど変化していないことが分かる。また、 $E_c$ を変えると伸展速度だけでなく、最大電子数密度も変化することが分かった。図 8.2 に縦軸に最大電子数密度、横軸に $E_c$ をとって示した。

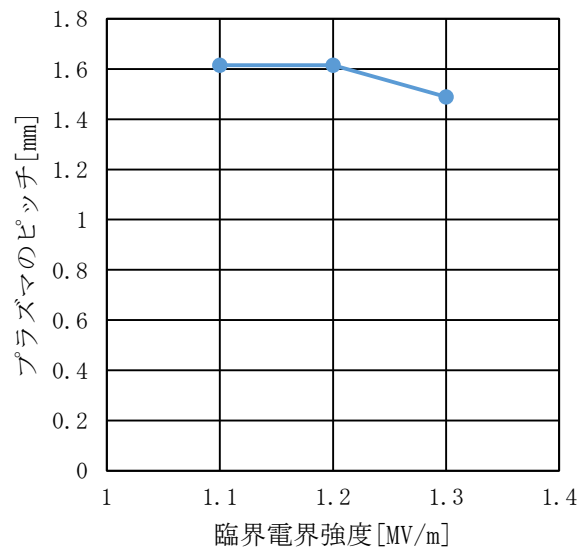


図 8.1 臨界電界強度とピッチサイズの関係

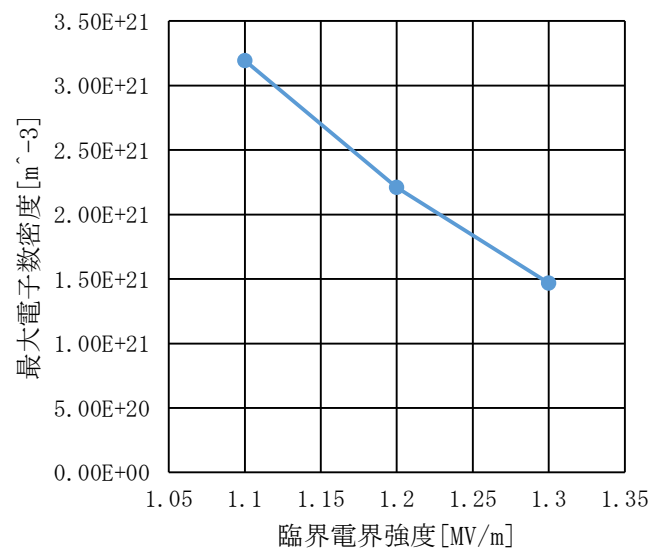


図 8.2 臨界電界強度と最大電子数密度の関係

## 9. 考察

### 9.1 ピッチサイズの電子数密度、伸展速度依存性

ここではピッチサイズが最大電子数密度や、楕状プラズマの伸展速度に依存するのかわかるかについて考える。5.3 節、8.2 節で述べたように最大電子数密度、プラズマ伸展速度は臨界電界強度 $E_c$ によって大きく変わる(表 9.1)。しかし、8.2 節の結果から、 $E_c$ を変えてもピッチサイズは変わっていない。このことから、ピッチサイズは電子数密度や伸展速度には依存していないと考えられる。

$E_c$ [MV/m]	最大電子数密度 $[m^{-3}]$	プラズマ伸展速度[km/s]
1.1	$3.2 \times 10^{21}$	9.2
1.2	$2.2 \times 10^{21}$	5.2
1.3	$1.5 \times 10^{21}$	2.7

表 9.1 臨界電界強度を変化させた場合の最大電子数密度とプラズマ伸展速度

### 9.2 楕状構造の形成過程

楕状構造はどのような原理で形成されるのであろうか。これまでの結果からピッチサイズは電子数密度や伸展速度にはよらず、入射ミリ波の周波数のみによって決まることが示唆される。このことから、反射などによる電磁波の強め合いが楕状構造の形成に関係していると考えられる。図 9.1 に電界の二乗平均平方根 $E_{rms}$ の分布を示す。プラズマがある部分において電界が遮蔽されて電界強度が弱くなっており、プラズマより入射方向においては反射波と入射波が干渉して定在波の縞がみえている。また、プラズマの粒の先端部において電界が集中しているのが見て取れる。

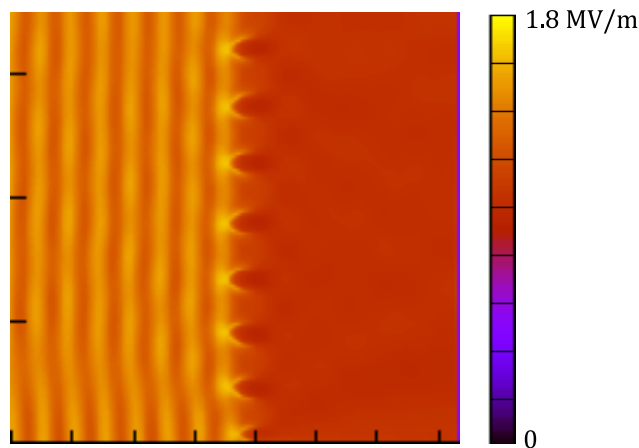


図 9.1 電界の二乗平均平方根分布

さらに詳しくみるため、入射波を取り除き、プラズマ中の振動電流から誘起される電磁波の二乗平均平方根を図 9.2 に示す。この図のプラズマより左側の電界は反射波で右側の電界は入射電磁波を打ち消すものである。図よりプラズマの粒の間に反射波が打ち消しあっている部分が見て取れる。この打ち消しあいが、楕円構造の形成に大きく影響している可能性が考えられる。

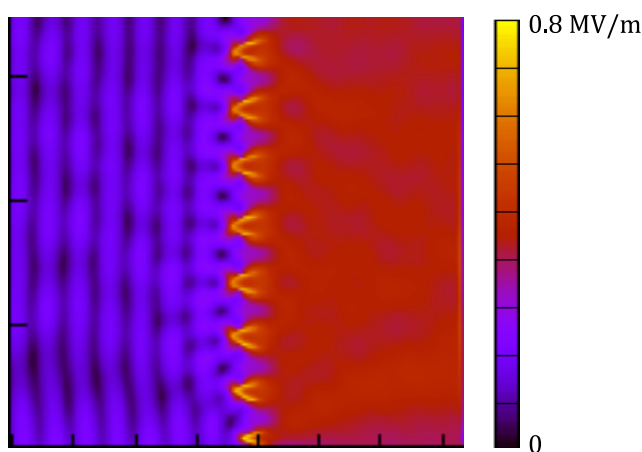


図 9.2 プラズマに誘起される電界の二乗平均平方根分布

このような電界強度分布がどのように発生しているのかを見るために、プラズマの粒一つから誘起される電磁波のみを取り出し、電界の二乗平均平方根分布を図 9.3 に示した。この図を見ると図 9.2 に見られるような打ち消しあいは見られず、このことから、この打ち消しあいが、一つの粒内部からの電磁波の干渉ではなく、複数の粒の間に起こる干渉であることが分かる。さらに図 9.4 に粒二つから誘起される電磁波を抽出し、電界の二乗平均分布を示した。この図には、打ち消しあう点が二つの粒の間に見られ、この点が隣り合う二つの粒から誘起される電磁波の干渉により生じていることが分かる。

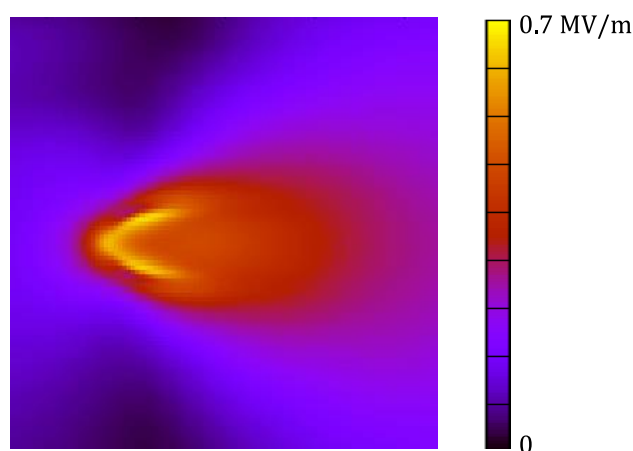


図 9.3 プラズマの粒一粒に誘起される電界の二乗平均平方根分布



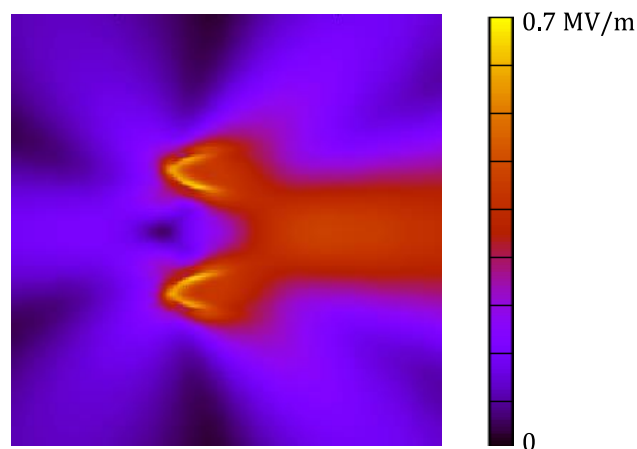


図 9.4 プラズマの粒二粒に誘起される電界の二乗平均平方根分布

以上のことより粒の間の打ち消しあいの点は、隣り合う二つのプラズマの表面で反射されたミリ波が干渉しあうことによって生まれ(図 9.5)、この打ち消しあいの点の存在により、粒同士がこれ以上近づくことができず、結果として楕円構造が生まれていると考えられる。

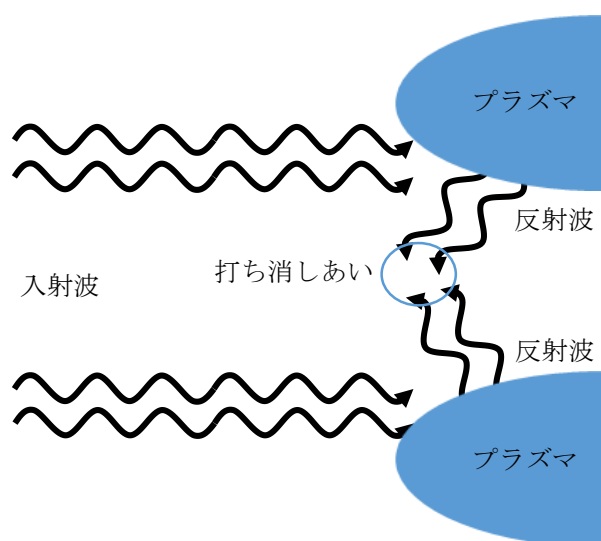


図 9.5 反射波同士の打ち消しあい

### 9.3 本研究の課題

ここでは、本研究における数値計算で再現できていないものについて考える。8 章でも述べたように本研究で用いている電子生成項の見積もりは物理的な根拠に乏しく、正確な値となっている保証がない。よって電子生成項が変化させたとき、すなわち臨界電界強度を変化させたときに大きく変化する電子数密度、伸展速度については正しい値は得られていないと考えられる。図 9.1 に示す電界強度分布をみると、入射エネルギーのうち 50%ほどがプラズマを透過し後ろに抜けている。このような事態が実験で本当に起こっていたとすると、図 1.6 から分かるように、透過したミリ波が放物面鏡で集光されて新たなプラズマが発生するはずであるがこのような事態は観測されていない。よって、これは実験の結果と矛盾しているということができ、電子数密度が実際の値に比べて小さく出ているためと考えられる。このようなことから、伸展速度、及び電子数密度を正確に得るには、電子生成項についてより物理的なモデルが必要であると言える。

## 10. 結論

本研究において、実験により観測された大気圧ミリ波放電プラズマに見られる櫛状構造の形状を再現することに成功した。数値計算による解析から櫛状構造について以下のことが明らかとなった。

1. ピッチサイズは初期電子配置によらず一定である。
2. ピッチサイズは入射ミリ波の周波数に依存する。

また、結果の考察から以下のことが言えると考えられる。

3. ピッチサイズは、最大電子数密度、櫛状プラズマ伸展速度によらず、入射ミリ波の周波数のみに依存し、波長を $\lambda$ とおいておよそ $0.9\lambda$ となる。
4. 櫛状構造においてプラズマの粒が等間隔に並ぶ要因の一つは、粒からの反射波が干渉し、粒と粒の間に電界振幅弱い領域を生み、これにより間隔が一定に保たれことである。

本研究において、櫛状構造プラズマの形状については再現できたが、最大電子数密度、伸展速度については再現できておらず、これらを再現するには電子生成項についてさらに物理に基づいたモデルを立てる必要がある。

## 参考文献

- [1] Y. Hidaka, E.M. Choi, I. Mastovsky, M.A. Shapiro, J.R. Sirigiri, and R. J. Temkin, “Observation of Large Arrays of Plasma Filaments in Air Breakdown by 1.5-MW 110-GHZ Gyrotron Pulses” *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008), 035003.
- [2] Y. Hidaka, E.M. Choi, I. Mastovsky, M.A. Shapiro, J.R. Sirigiri, and R. J. Temkin, “Observation of Large Arrays of Plasma Filaments in Air Breakdown by 1.5-MW 110-GHZ Gyrotron Pulses” *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008), 035003.
- [3] A.M. Cook, J.S. Hummelt, M.A. Shapiro, and R.J. Temkin, “Observation of Plasma Array Dynamics in 110GHz Millimeter-Wave Air Breakdown” *Physics of Plasmas*, 18(2011), 100704
- [4] J. P. Boeuf, B. Chaudhury, and G. Q. Zhu, “Theory and Modeling of Self-Organization and Propagation of Filamentary Plasma Arrays in Microwave Breakdown at Atmospheric Pressure” *Phys. Rev. Lett.*, 104 (2010), 015002.
- [5] G. Zhu, “Modeling of Plasma Dynamics and Pattern Formation During High Pressure Microwave Breakdown in air” Doctoral thesis (2012)
- [6] U. Ebert, W. vanSaarloos and C. Caroli, “Streamer Propagation as a Pattern Formation Problem: Planar Fronts”, *Phys. Rev. Lett.*, 77-20(1996), pp. 4178-4181
- [7] Q. Zhou and Z. Dong, “Modeling Study on Pressure Dependence of Plasma Structure and Formulation in 110 GHz Microwave Air Breakdown” *Appl. Phys. Lett.*, 98 (2011), 161504.
- [8] K.S. Yee, “Numerical Solution of Initial Boundary Value Problem Involving Maxwell’s Equation in Isotropic Media” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 14(1966), pp. 302-306
- [9] K.S. Kunz, R.J. Luebbers, “The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics” (CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, 1993)
- [10] T. Devezé, L. Beaulieu, and W. Tabbara, “A Fourth Order Scheme for the FDTD algorithm Applied to Maxwell’s Equation” (*IEEE APS Int. Symp. Proc.*, Chicago, IL, July 1992, pp. 346-349)
- [11] G. Mur, “Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of Time-Domain Electromagnetic-Field Equations” *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, 23-4(1981), pp. 377-382

## 本研究に関する業績

### 学術誌等に発表した論文

- 1) Yusuke NAKAMURA, Toshikazu YAMAGUCHI, Kimiya KOMURASAKI, Tony SHOENHERR and Hiroyuki KOIZUMI, “Numerical Simulation of Filamentary Structure in Millimeter-Wave Discharge”, Plasma Application & Hybrid Functionally Materials, Vol. 24, pp. 9-10, March, 2015
- 2) Yusuke NAKAMURA, Toshikazu YAMAGUCHI, Kimiya KOMURASAKI, Tony SHOENHERR and Hiroyuki KOIZUMI, “Numerical Simulation of Filamentary Structure in Millimeter-Wave Discharge”, Plasma Application & Hybrid Functionally Materials, Vol. 24, pp. 9-10, March, 2015

### 国内学会・シンポジウム等による発表

- 1) ○中村 友祐、山口 敏和、福成 雅史、小紫 公也、「大気圧ミリ波放電プラズマのフィラメント構造解析」、平成 26 年度宇宙輸送シンポジウム、073、相模原、2015 年 1 月
- 2) ○中村 友祐、山口 敏和、福成 雅史、小紫 公也、小泉 宏之、「ミリ波放電プラズマ構造の波長依存性数値解析」、第 59 回宇宙科学技術連合講演会、P09、鹿児島、2015 年 10 月
- 3) ○中村 友祐、福成 雅史、山口 敏和、小紫 公也、小泉 宏之、「大気圧ミリ波放電の伸展モデルとその数値解析」、第 32 回プラズマ・核融合学会年会、26pC08、名古屋、2015 年 11 月