

# 動的有限要素解析のための改良粒子フィルタに基づく逐次データ同化

47146705 相良 光志  
指導教員 奥田 洋司 教授

This study discusses data assimilation in a finite element model to predict transient displacements using measured acceleration responses. A particle filter is utilized as the data assimilation method. This paper proposes an improved particle filter technique because it is difficult to estimate displacements when a finite element model takes an unsteady load. In the improved particle filter, noises is added to samples and variance-covariance matrices of the additional noises are computed from fitness values. For characteristic evaluation, the improved particle filter is applied to estimation of transient displacements using cantilever beam model and beam bridge model.

Key words: Finite Element Method, Data Assimilation, Particle Filter

## 1 緒言

有限要素法では一般的に材料特性や形状, 荷重条件等を入力することで, 構造の挙動を再現するが, これらの設定は現実では不明確である場合が多いため, シミュレーション結果と実際の現象とで乖離が発生するおそれがあった。しかし, コンピュータハードウェアや並列アルゴリズムの進歩により, 不確実性を考慮した解析が行われるようになった<sup>1)</sup>。そのような解析のアプローチの一つとして観測値を利用することが考えられる。近年, 人工衛星やセンサ等の観測システムの発達によって, 大量の観測データが取得されるようになり, それらのデータを活用した解析が盛んに行われるようになった<sup>2)</sup>。気象学・海洋学の分野では「データ同化」と呼ばれる方法論として確立されている。データ同化とは, 不確実性を含むシステム全体の状態を部分的な観測値から推計する方法である。その中でも特に一定時間ごとに実施するものを「逐次データ同化」と呼ぶ。例えば, 構造解析の分野では, 有限要素モデルに対して逐次データ同化を適用し橋梁ヘルスマニタリング<sup>3)</sup>に応用されている。逐次データ同化における状態推計には汎用性の高さから粒子フィルタが用いられることが多い。当該手法はサンプリングを用いた推定法で, 毎時刻, 各サンプルが観測値にフィットしている度合いを評価値として計算し, その評価値をもとにサンプル集合を作り直す。その操作が繰り返されると評価値が高いものにサンプルが集中し, サンプルの多様性が失われ, データにフィットせず, 状態推定の精度が劣化するという問題がある。本研究では有限要素モデルに対する逐次データ同化の精度向上を目的とし, 改良粒子フィルタ (Improved Particle Filter: IPF) を提案する。IPF では, 前時刻の推定結果を考慮してノイズを加える。それによって, 非定常性の強い外力に対して適応が可能になることを期待する。IPF の特性について, 逐次データ同化による有限要素モデルを用いた変位応答推計に適用した結果をもとに評価する。

## 2 粒子フィルタ

粒子フィルタ (Particle Filter: PF) はノイズを含む観測値 $\mathbf{y}_t$ から対象の状態 $\mathbf{x}_t$ を推定する手法 (時系列フィルタ) の一種である<sup>4)</sup>。観測値と状態は以下の式から得られるも

のとする。

$$\mathbf{x}_t = \text{func}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_t = h(\mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t) \quad (2)$$

ここで,  $\mathbf{v}_t$  はシステムにかかるノイズである。一方,  $\mathbf{y}_t$  は観測ベクトル,  $\mathbf{w}_t$  が計測器の特性等により観測する際に発生するノイズとなる。PF には二種類のサンプル集合  $\mathbf{S}_{t|t-1} = \{\mathbf{s}_{t|t-1}^1, \mathbf{s}_{t|t-1}^2, \dots, \mathbf{s}_{t|t-1}^N\}$ ,  $\mathbf{S}_{t|t} = \{\mathbf{s}_{t|t}^1, \mathbf{s}_{t|t}^2, \dots, \mathbf{s}_{t|t}^N\}$  (サンプル数:  $N$ ) を用いる。 $\mathbf{S}_{t|t-1}$  は確率分布  $P(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{t-1})$ ,  $\mathbf{S}_{t|t}$  は確率分布  $P(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_t)$  に従うサンプル集合として定義する。以下の手順 i~vii が PF の具体的なアルゴリズムとなる。

- i. 時刻  $t = 1$  として初期確率分布  $P(\mathbf{x}_0)$  に従いサンプル集合  $\mathbf{S}_{0|0} = \{\mathbf{s}_{0|0}^1, \mathbf{s}_{0|0}^2, \dots, \mathbf{s}_{0|0}^N\}$  を生成
- ii. ノイズ  $\mathbf{v}_t$  をあらかじめ設定された分布に従いサンプルごとに生成し, 以下の式に従い予測サンプル集合  $\mathbf{S}_{t|t-1}$  を生成

$$\mathbf{s}_{t|t-1}^i = \text{func}(\mathbf{s}_{t-1|t-1}^i, \mathbf{v}_t) \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

- iii. 以下の式に従い, 各予測サンプル  $\mathbf{s}_{t|t-1}^i$  について評価値  $\pi_t^i$  を算出

$$\pi_t^i = \frac{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t = \mathbf{s}_{t|t-1}^i)}{\sum_{i=1}^N p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t = \mathbf{s}_{t|t-1}^i)} \quad (4)$$

- iv. 予測サンプル集合  $\mathbf{S}_{t|t-1}$  からそれぞれ  $\mathbf{s}_{t|t-1}^i$  を評価値  $\pi_t^i$  に比例する割合で  $N$  個抽出し, サンプル集合  $\mathbf{S}_{t|t}$  とする (リサンプリング)
- v. 推定値  $\hat{\mathbf{x}}_t$  を以下の式より算出

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_{t|t}^i \quad (5)$$

- vi.  $t := t + 1$  として手順 ii に戻る

## 3 融合粒子フィルタ

前述で紹介した粒子フィルタにはリサンプリングが繰り返されるうちにサンプルの多様性が失われ, 状態推定の精度が劣化するという問題がある。このような背景から, 融合粒子フィルタが提案された<sup>5)</sup>。融合粒子フィルタは,

$l \times N$ 回 ( $l > 2$ ) サンプルを確率的に取得し、 $l$ 個の重み付き和としてリサンプリングすることでサンプルの多様性を担保した手法である。具体的には、粒子フィルタにおいて、手順 iv を行う代わりに以下の処理を実施する。

- i. サンプル  $s_{t|t-1}^i$  が評価値  $\pi_t^i$  の確率で選ばれるようにサンプルを  $l \times N$  個再生成し、サンプル集合  $\hat{\mathbf{S}}_{t|t} = \{\hat{s}_{t|t}^{(1,1)}, \dots, \hat{s}_{t|t}^{(l,N)}\}$  を構成
- ii. サンプル集合  $\hat{\mathbf{S}}_{t|t}$  をもとに以下の式に従い、サンプル集合  $\mathbf{S}_{t|t} = \{s_{t|t}^1, s_{t|t}^2, \dots, s_{t|t}^N\}$  を生成

$$s_{t|t}^i = \sum_{j=1}^l \kappa_j \hat{s}_{t|t}^{(j,i)} \quad (6)$$

ここで、 $\kappa_j$  は重み付き和の重みとなる。重みは以下の条件を満たすように設定する。

$$\sum_{j=1}^l \kappa_j = 1 \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^l \kappa_j^2 = 1 \quad (8)$$

これまでの研究より、 $\kappa_1$  を 1 に近い値、残りを 0 に近い値を設定することで多様性が担保しやすく、モデルの次元数に対して粒子が少ない場合は  $\kappa_1$  を 1 に近づけないよう設定することでよい推定結果が得られることが確認されている。

#### 4 有限要素モデルを用いた逐次データ同化

不確実性を含むシステムをモデル化しシミュレーションを行なった際、計算結果と実際の現象が乖離することがある。データ同化はそのような乖離を防ぐ方法論の一つである。特にその中で 1 時刻ステップごとにパラメータや状態を修正するものが「逐次データ同化」と呼ばれている。逐次データ同化を行う上でシステムモデルと観測モデルを用意する。システムモデルとは実際の現象を空間的、時間的に離散化し再現したモデルで時刻  $t$  時の全格子の状態を格納したベクトルを  $\mathbf{x}_t$  とし、式(1)で表現される。一方、観測モデルは格子点上の物理量の一部が観測されるものとし、式(2)で表現される。以上の 2 種類のモデルに対して、時系列フィルタリングを適用することで観測値から全体の状態を推定する。有限要素モデルを用いたデータ同化では、式(9)の運動方程式を利用する。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}\mathbf{u}_t = \mathbf{f}_t \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{M}$  は質量行列、 $\mathbf{C}$  は減衰行列、 $\mathbf{K}$  は剛性行列、 $\mathbf{u}_t$  は  $N_u$  次元の変位ベクトル ( $N_u$  は節点数)、 $\mathbf{f}_t$  は  $N$  次元の荷重ベクトルである。状態変数ベクトル  $\mathbf{x}_t = (\ddot{\mathbf{u}}_t, \dot{\mathbf{u}}_t, \mathbf{u}_t)$ 、観測ベクトル  $\mathbf{y}_t$  を  $\ddot{\mathbf{u}}_t$  の一部の成分に観測ノイズを加えたもの

として加速度応答から変位応答を推計する。

#### 5 改良粒子フィルタ

粒子フィルタや融合粒子フィルタには、ステップ応答や大きな振動等、状態に急な変化が発生した際、評価値  $\pi_t^i \approx 1/N$  となり、推定が困難となることがあった。そこで本研究では評価値の分母の値を元に分散を決定し、次時刻にその分散に従うノイズを加えることで観測値に近い値を取りやすくする、改良粒子フィルタを提案する。具体的に粒子フィルタのサンプルの更新後(手順 ii. と手順 iii. との間)にノイズ  $\boldsymbol{\gamma}_t$  を加える (式)。

$$s_{t|t-1}^i \leftarrow s_{t|t-1}^i + \boldsymbol{\gamma}_t \quad (10)$$

ここで、 $\boldsymbol{\gamma}_t$  の分散共分散行列  $\mathbf{Q}_{ij,t}^{\boldsymbol{\gamma}}$  の成分  $q_{ij,t}^{\boldsymbol{\gamma}}$  は式(4.2)で決定される。

$$q_{ij,t}^{\boldsymbol{\gamma}} = \alpha \left( 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P(\mathbf{y}_{t-1} | \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{s}_{t-1|t-2}^k) \right) \delta_{ij} \quad (11)$$

計算量を省くため、 $\boldsymbol{\gamma}_t$  の成分自身の分散のみを考慮するものとして式(4.2)には、クロネッカーのデルタ  $\delta_{ij}$  を入れた。  $P(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t = \mathbf{s}_{t|t-1}^k)$  の合計は評価値の計算中の分母となっており、サンプル集合がフィットしている度合いを表す数値となる。

#### 6 数値検証

有限要素モデルを用いて有限要素解析と逐次データ同化を実施して改良粒子フィルタの特性評価、他の手法との比較を行う。この数値実験では、用意した有限要素モデルに対して、材料特性や荷重条件、境界条件を設定して有限要素法による過渡応答解析を実施する。当該解析より得られた加速度応答時刻歴にノイズを加えたものをダミー観測値として、逐次データ同化による変位応答推計を実施する。その後、事前に実施した解析から得られたある節点の変位応答時刻歴を真値として、誤差の算出や時刻歴のグラフ化を行い、推計結果を確認する。モデルの設定とその結果を以下に示す。サンプル数は先行研究を参考にどちらも 200 に設定した。推計には粒子フィルタ (PF)、融合粒子フィルタ (MPF)、改良粒子フィルタ (IPF) の 3 種の時系列フィルタリングを用いる。ただし、融合粒子フィルタのパラメータは先行研究より、 $\kappa_1 = 0.75$ 、 $\kappa_2 = (1 + \sqrt{13})/8 \approx 0.576$ 、 $\kappa_3 = (1 - \sqrt{13})/8 \approx -0.326$  とする。観測ノイズの分散の値  $q$  として、改良粒子フィルタは  $\alpha = q$ 、 $q \times 10^{-1}$ 、 $q \times 10^{-2}$  の 3 種の設定を用意した。

##### 6.1 片持ち梁モデル

数値検証に利用した片持ち梁モデルを Fig. 1 に示す。当該モデルは節点 : 525 点、240 個の 4 面体 2 次要素で構成されており、ヤング率は  $39227[\text{N}/\text{mm}^2]$ 、ポアソン比は 0.3 とした。荷重は梁の先端にある中心の節点に対し、500 時刻ステップ時に 19.6[N] 加え、それ以外の時刻ステップは無荷重とした。観測値にかかるノイズは分散  $q =$

$1.0 \times 10^{-6}$ の正規分布に従うものとした。以上のモデルに対して変位応答推計を実施し、梁先端の節点の変位応答時刻歴から求めた、各手法の平均絶対誤差 (MAE) を Table 1 に示す。また同様の節点から得られた推計結果を Fig. 2 に示す。融合粒子フィルタでは 10,000 ステップ付近まで推定値が大きく外れている一方、 $\alpha = q$ 時の改良粒子フィルタは真値に近い値を取れていることが分かる。ただし、 $\alpha = 1.0 \times 10^{-7}, 1.0 \times 10^{-8}$ の場合、Fig. 2 (a)のMPFのような推定値の乖離を確認したため、IPFでは $\alpha$ の

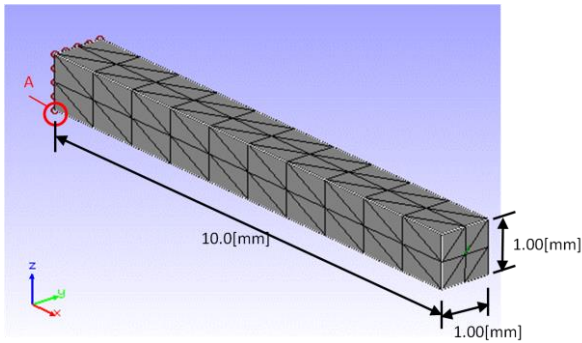
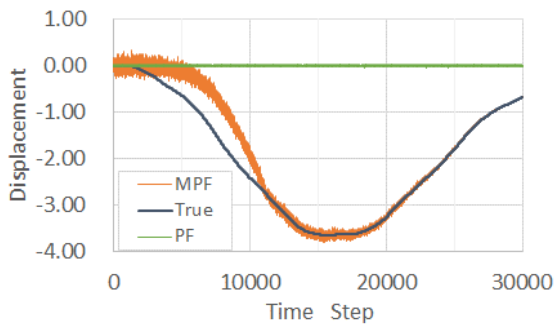
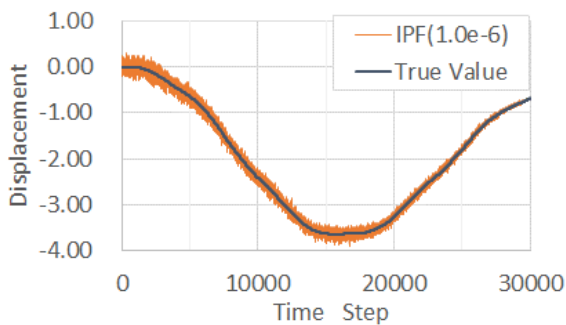


Fig. 1 Cantilever beam model(CBM)

Method	MAE
PF	2.01
MPF	18.20e-2
IPF ( $\alpha = 1.0 \times 10^{-8}$ )	8.20e-2
IPF ( $\alpha = 1.0 \times 10^{-7}$ )	6.79e-2
IPF ( $\alpha = 1.0 \times 10^{-6}$ )	5.03e-2



(a) PF, MPF



(b) IPF( $\alpha = 1.0 \times 10^{-6}$ )

Fig. 2 Estimated disp. at CBM

設定について議論の余地がある。

### 6.2 桁橋モデル

先行研究<sup>3)</sup>との比較のため桁橋モデル (Fig. 3) を用意した。当該モデルは節点: 25 点, 24 個の 2 次元梁要素で構成されており、ヤング率は  $2.5 \times 10^7$  [N/m<sup>2</sup>], ポアソン比は 0.3 とした。6 両で構成される Fig. 4 に示す列車が 117.2[km/h]の速度で通過することを想定して各節点に動的な荷重が加えられるものとする。観測値にかかるノイズは分散  $q = 0.1$ の正規分布に従うものとした。Fig. 3



Fig. 3 Beam bridge model (BBM)

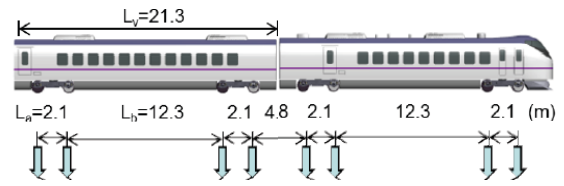
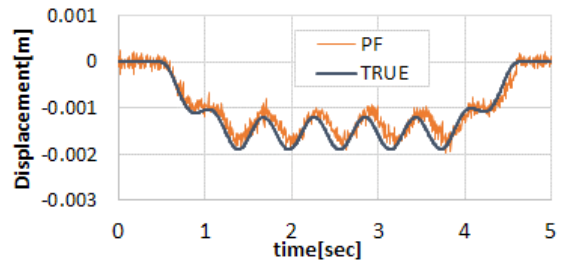
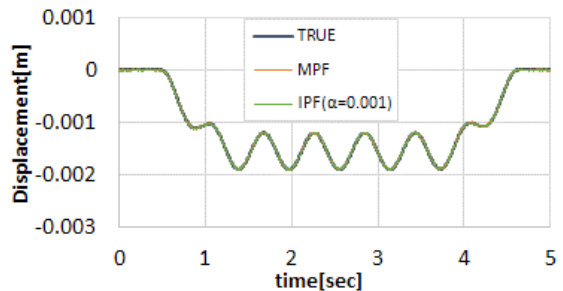


Fig. 4 Parts of load for BBM

Method	MAE
PF	129.00e-6
MPF	8.11e-6
IPF ( $\alpha = 0.001$ )	7.86e-6
IPF ( $\alpha = 0.01$ )	24.80e-6
IPF ( $\alpha = 0.1$ )	58.40e-6



(a) PF

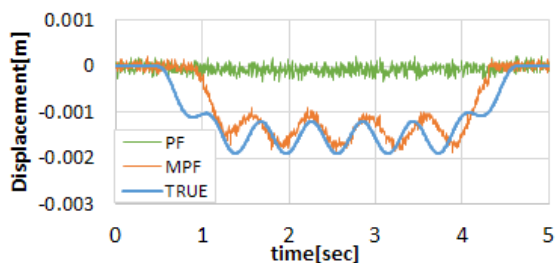


(b) MPF, IPF( $\alpha = 0.001$ )

Fig. 5 Estimated disp. at BBM

Table 3 MAE of estimation at BBM(few observation)

Method	MAE
PF	104.00e-5
MPF	24.70e-5
IPF ( $\alpha = 0.001$ )	14.60e-5
IPF ( $\alpha = 0.01$ )	9.93e-5
IPF ( $\alpha = 0.1$ )	9.71e-5



(a) PF,MPF

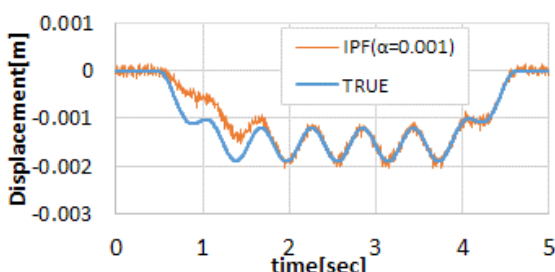
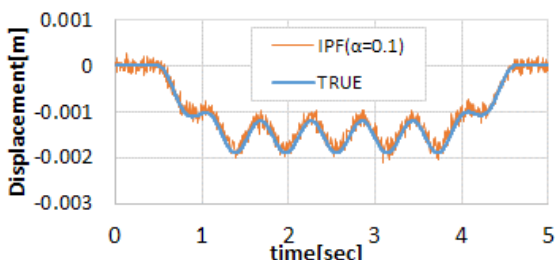
(b) IPF( $\alpha = 0.001$ )(c) IPF( $\alpha = 0.1$ )

Fig. 6 Estimated disp. at BBM(few observation)

において左から節点番号 1~25 として、節点 5, 7, 9, 13, 17, 19, 21 の計 7 点を観測点とした。以上の設定で変位応答推計を実施し、節点番号 13 の鉛直方向の変位応答時刻歴から求めた、各手法の平均絶対誤差 (MAE) を Table 2 に示す。真値が  $10^{-3}$  のオーダーであるのに対し、MPF, IPF に関して MAE が  $10^{-5}$ ,  $10^{-6}$  のオーダーとなっており、この誤差は実際では一般的に考慮されないため、MPF, IPF によって精度よく推計できているといえる。ただし IPF について  $\alpha$  を大きくするにつれて誤差が大きくなっている。これはサンプルの多様性を担保するために付加したノイズによる影響と考えられる。

また、節点 5, 9, 17, 21 の計 4 点を観測点とし、同様の変位応答推計を実施した。節点番号 13 の鉛直方向の

変位応答時刻歴における各手法の MAE を Table 3 に示す。IPF が MPF よりも精度よく推計できていることが分かる。変位応答推計の時刻歴 (Fig. 6) を確認すると、MPF では観測値の乖離が発生している。一方で Fig. 6(c) を見ると  $\alpha = 0.1$  の時、精度よく推計できていることが分かる。以上のことから観測点の少ない状況下では改良粒子フィルタが有効であるといえる。

## 7 結言

本研究では有限要素モデルに対する逐次データ同化の精度向上のため、改良粒子フィルタを提案した。特に非定常性の強い外力による、実際の事象と推計結果との乖離の解消を目指した。改良粒子フィルタではリサンプリング前にノイズを加えることでサンプルの多様性を担保した。意図的に付加するノイズの分散を前時刻の評価値から決定することによって、急な外力が発生した際にサンプルを分散されサンプルがデータにフィットされることを期待した。改良粒子フィルタの特性評価と従来手法 (粒子フィルタ, 融合粒子フィルタ) との比較のため、片持ち梁モデル, 桁橋モデルを用いて加速度応答による逐次データ同化に基づく変位応答推計を実施した。片持ち梁モデルの結果より、改良粒子フィルタによって推計結果の乖離を抑制していることが分かった。桁橋モデルの結果より、観測点が少ない場合でも精度よく推計できることが分かった。以上のことから、桁橋モデルに対して各手法を適用した結果より、観測点が少ない場合でも精度よく推計できることが分かった。ただし、 $\alpha$  の与え方次第によっては推計がうまくいかない場合があり、また、十分に観測点が取れている場合や、節点によっては誤差が大きくなる部分があり、安定性について課題が残った。そのため、今後は様々な設定で改良粒子フィルタを適用し、有効性を検証するとともに、有効な処理を検討し、改良粒子フィルタの安定性を高めることを目指す。

## 文献

- 1) 佐藤陽平, 奥田洋司, Seed Methods による確率有限要素法の効率化, 日本応用数理学会論文誌, Vol.19, No.1, 2009, pp. 39-55, 2009.
- 2) 中村和幸, 上野玄太, 樋口知之, データ同化: その概念と計算アルゴリズム, 統計数理, 第 53 巻, 第 2 号, pp.211-229, 2005.
- 3) 松岡弘大, 貝戸清之, 徳永宗正, 渡辺勉, 曾我部正道, 逐次データ同化を利用した列車走行時の橋梁加速度応答に基づく変位応答推計, 土木学会論文集 A1 (構造・地震工学), Vol. 69, No. 3, pp.527-542, 2013.
- 4) 加藤丈和, パーティクルフィルタとその実装法 (チュートリアル), 情報処理学会研究報告, pp.161-168, 2007.
- 5) NAKANO Shinya, UENO Genta, HIGUCHI Tomoyuki, Merging particle filter for sequential data assimilation, Nonlinear Processes in Geophysics, 14.4, 395-408, 2007.