

東京大学大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系
先端エネルギー工学専攻

2004 年度修士論文

MHD加速を利用したプラズマ風洞の
高エンタルピー化に関する数値解析

学籍番号 36204
氏名 衣本 啓介
指導教員 鈴木宏二郎助教授

(2005年2月14日提出)

目次

第 1 章 序論	1
1.1 背景	
1.1.1 研究背景	
1.1.2 MHD 加速の原理	
1.2 目的	
第 2 章 現象のモデル化と支配方程式	8
2.1 流体の支配方程式	
2.2 一流体モデル	
2.3 一温度モデル	
2.4 二温度モデル	
2.4.1 化学反応モデル	
2.4.2 熱伝導モデル	
2.4.3 電子-電子励起エネルギーモデル	
2.5 電磁項の評価	
2.5.1 電磁場	
2.5.2 一般化されたオーム則	
2.5.3 電気伝導度	
2.2 二次元非粘性モデル	
第3章 簡易一次元流モデルによる解析解	24
3.1 定常一次元流計算	
3.2 計算条件	
3.3 計算結果	
第 4 章 一次元流モデルによる数値解析	34
4.1 基礎方程式	
4.1.1. 一温度モデル	
4.1.2. 二温度モデル	
4.2 数値計算法	
4.3 計算条件	
4.3.1 条件と3章との違い	
4.3.2 モデル風洞の概要	
第 5 章 二次元流モデルによる数値解析	45
5.1 基礎方程式	
5.2 数値解析法	
5.3 計算条件	
第 6 章 結果	53
6.1 一次元流モデルによる数値解析結果	
6.1.1 一温度モデル	

- 6.1.2 二温度モデル
- 6.2 二次元一流体モデルによる数値解析結果

第7章 結論及び今後の課題	70
7.1 結論	
7.2 これからの課題	
APPENDIX A プラズマの諸特性値	72

参考文献

謝辞

第 1 章 序論

1.1 背景

1.1.1 研究背景

超音速、極超音速の飛行の特徴である、高エンタルピー、高動圧、高マッハ数領域を地上の実験施設で再現する問題点は、この半世紀の空力、エンジン設計者が挑戦してきた問題である。

エンタルピー

$$h = c_p T + \frac{1}{2} u^2 \quad (1.1)$$

の形からわかるように、高エンタルピー高速流を得る手段としては、

貯気槽からノズルで膨張加速する

外力として流速を上げることによりエンタルピーを増加する

ということが考えられる。

では貯気槽条件の高温、高圧化によって、ノズルでの膨張加速後の速度をあげるわけである。しかしながら、気体を燃焼、貯気槽での圧縮などによって高温、高圧にする手段では性能に限界がある。(図 1-1 に等エントロピー膨張を仮定したときの貯気槽圧力と速度、図 1-2 に温度と速度の図を示した)また、アークヒーターにおいても貯気槽圧力に制限があり、エネルギー投入すべてが Joule 加熱を通して行われるために、熱対策が必要となる可能性もある。つまり、全体の問題として、貯気槽が高温、高圧になるに従って、貯気槽での熱対策、ノズルスロート部分での熱対策が必要になり、そのため、その実験施設を実現することに制限がかかることになる。

そこで、 h を考え、外力として電磁気力を用いて、実験気体が必要なよどみ点エンタルピーまで加速するのに使うことが考えられた。この機構を MHD 加速器と呼び、気体の速度、総圧、温度を増加するためにローレンツ力($J \times B$ 物体力)を用いている。極超音速風洞への応用の議論は参考文献[1]-[4]などがある。

また、MHD 加速器の風洞以外の応用例としては NASA の研究[5][6]にあるように Scramjet の後方にブースターとして取り付けることなどが考えられている。図 1-3 にその概念図を示しておく。

1.1.2 MHD 加速器

MHD 加速器は妥当な電極電圧で電流束 J を得るために、実験気体に制限がある。

- 作動気体が十分電気伝導性を持っている必要がある
- そのため、実験気体は簡単にイオン化される物質で構成されている必要がある

MHD 加速器の前にプラズマ生成器などでプラズマを生成した場合であれば、後者は、MHD 加速器内でも電離状態を維持していなければならないということを表している。

MHD 加速器の機構としては、次のように説明される。

図 1-4-1 のようにまず、粒子の運動を考える。粒子が速度 u 電荷 Ze を持っているものとし、その粒子が、電場 E 、磁場 B の電磁場を持つ空間に入ってきたとする。この時、この粒子にかかる力は、電場方向に $F_E = ZeE$ 、磁場に垂直かつ速度に垂直な方向(速度から磁場への右ねじの方向)に $F_{u \times B} = Zeu \times B$ である。このような粒子を含んでいるプラズマ気体を考える場合、導体に電流 J が流れた場合と同じように $J \times B$ が気体全体にかかることになる。(図 1-4-2)

このような現象は成分表示の運動方程式(2章以降で説明)からわかることであるが、直観的には、次のようなものをイメージするとよいかもしいない。電子には電場方向に $-e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ の加速力がかかり、これが電流となる(実際にはイオンとの速度差などが関係する)のだが、この電流に電荷を持つ粒子が影響されて $J \times B$ の加速力を受けることになる。

ここで、研究の対象とする MHD 加速器の概要を表しておく。全体の実験装置図の概要は図 1-5 のようになる。本研究では、矩形 MHD ダクトを対象としており、 y 方向の外部電場 E_{y_add} 、 z 方向の外部磁場 B_z をかけることにする(図 1-6)。

この時、電子の運動方程式より、 x 方向の電流 j_x および、 y 方向の電流 j_y は、

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \mathbf{s} \begin{pmatrix} 1 & -\Omega \\ \frac{1}{1+\Omega^2} & \frac{1}{1+\Omega^2} \\ \Omega & 1 \\ \frac{1}{1+\Omega^2} & \frac{1}{1+\Omega^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

ここで、 $\mathbf{s} = \frac{e^2 n_e}{m \mathbf{n}}$ は電気伝導度、 $\Omega = \frac{e B_z}{m_e \mathbf{n}} = \frac{W_c}{\mathbf{n}}$ はホールパラメータと呼ばれる。

このままでは、加速力に必要な B_z を大きくすれば y 方向の電流 j_y が小さくなり、結果的に加速力が小さくなるかもしれない。このため、磁場を強くしても電流 j_y が小さくならないような工夫をほどこしたものとして、近似的に MHD ダクト内での x 方向の電流 j_x が流れ

ていないものとする。(電極を離すなどの工夫をして x 方向に絶縁した状態(分割電極ファラデー型と呼ばれる)、この場合、電極が分割されるのだが、ダクト内での電流 j_y の分布は電極の無い位置でも分布を持つものとする)(図 1-6 参照)
以下では、ホール電流が無視出来る場合(分割電極ファラデー型など)の MHD 加速器を考えるとすることとする。

1.2 目的

MHD 加速では、適切な条件を設定すると熱エネルギーではなく、速度増分としてエンタルピーを投入することができるという利点がある。このような MHD 加速器を実験室レベルでの実験施設として使用するためにはどのような問題が現れ、どのような性能が実現し得るのだろうか。

本研究では、この MHD 加速を用いた加速機構の数値解析を行い、MHD 加速器内の流れの現象を捕らえることを目的としている。

具体的には、

- ・ 方程式のモデル化の違いによる効果を調べ、モデル化の妥当性を検証する。
- ・ 一次元計算と二次元計算による計算を行い、結果に違いが出るのかどうか検討する。
- ・ 二次元計算においては、擾乱を入れることによってどのような効果が出るのかを見る。

以上を目的とした。

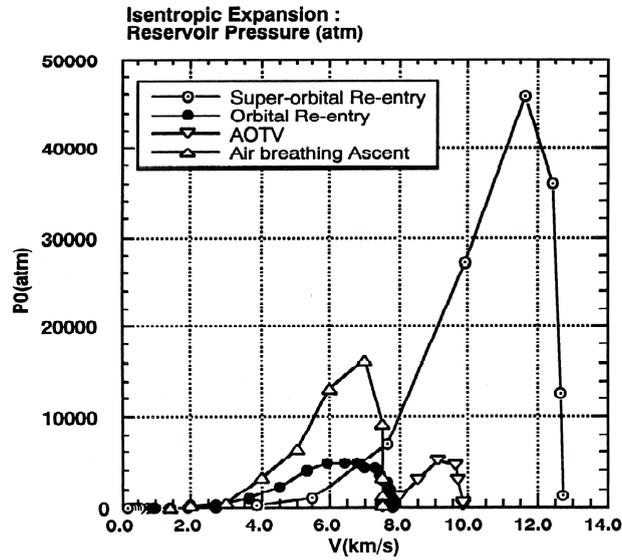


図 1-1 飛行速度と貯気槽圧力[16]

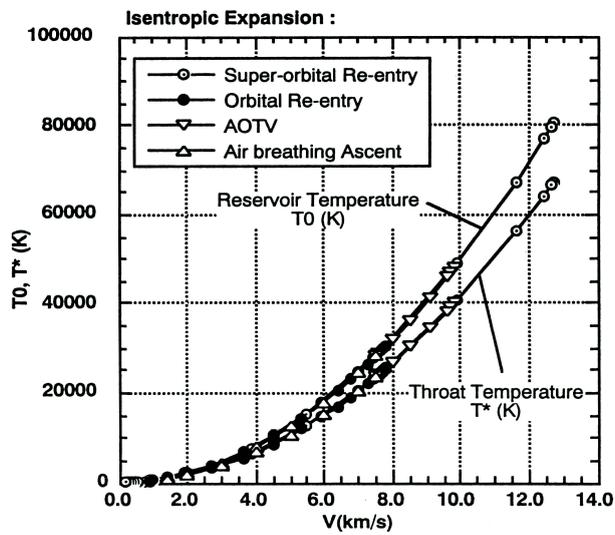


図 1-2 飛行速度と貯気槽温度、スロート温度

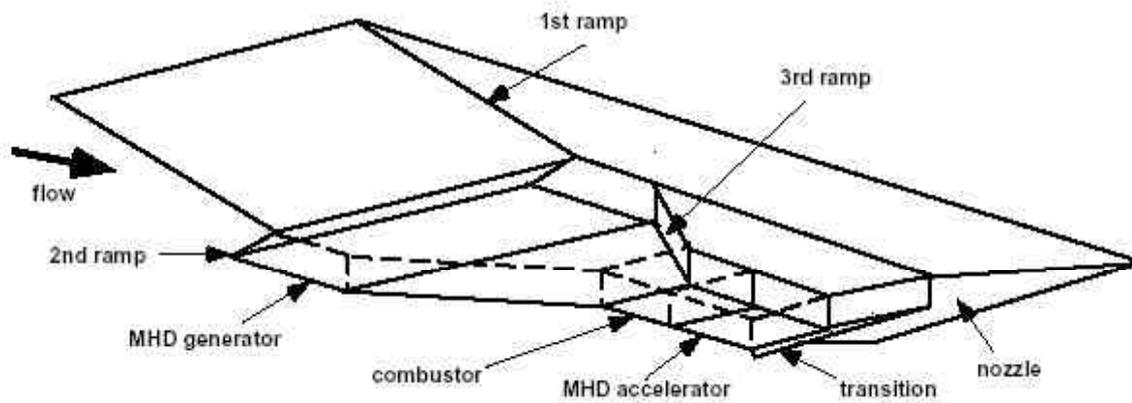


図 1-3 Scramjet への MHD 加速器の応用(文献[4])

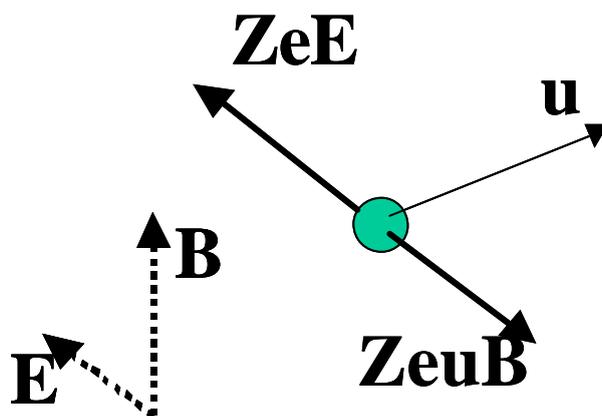


図 1-4-1 MHD 加速の原理(1)

電場 E 、磁場 B が存在している場に、
電子が速度 u で入ってきた時にかかる力を表している

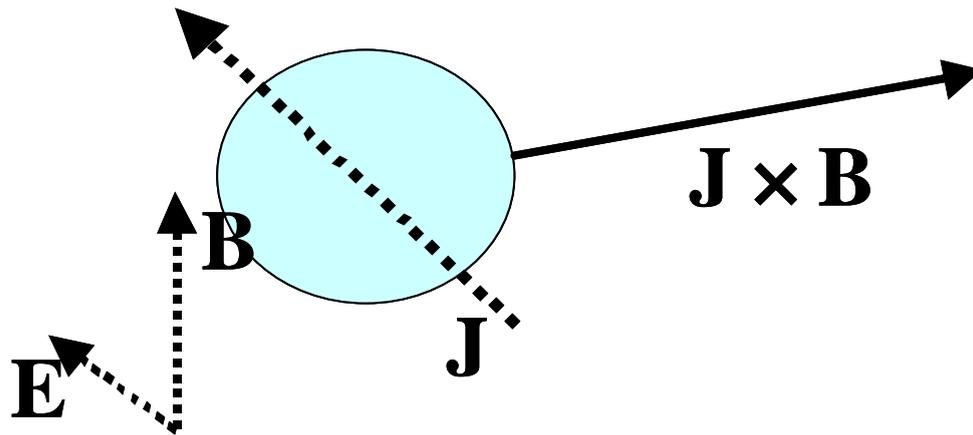


図 1-4-2 MHD 加速の原理(2)
 電場 E、磁場 B が存在している場に、
 プラズマ気体に通る電流と加速力を表す

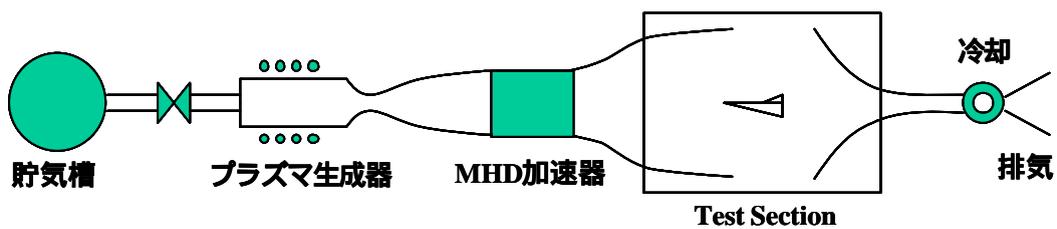


図 1-5 MHD 加速器を利用した高エンタルピー風洞概念図

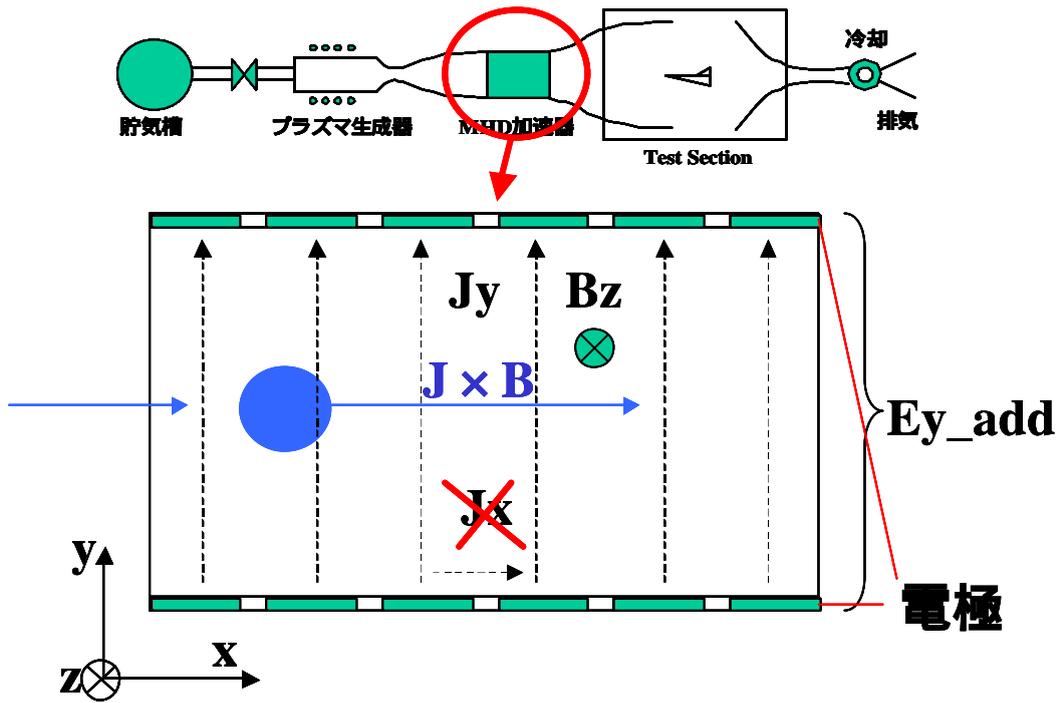


図 1-6 分割電極ファラデー型 MHD 加速器

第2章 現象のモデル化と支配方程式

本研究対象のMHD加速器は、本研究室が所有しているICP風洞(図2-1、[7]参照)のようなプラズマ生成器でプラズマ流を生成し、その下流に取り付けると考える(図2-2)。そのため、MHD加速器の外形などの条件、電子温度、電子のモル分率などの気流条件はICP風洞下流の条件が合うように考えた。また、電磁場に関しては、磁場では永久磁石を用いるため、市販で容易に手に入る1[Tesla]以下で用いることにする。電場についても実験室レベルで容易に実現できる範囲を目的としている。

プラズマ特性値

プラズマ中における電子の運動状態を表す特性量として代表的な値が、平均自由行程、サイクロトロン半径、デバイ長、電子 - 重粒子間衝突頻度、及びプラズマ振動数の5つである。平均自由行程、サイクロトロン半径、デバイ長、プラズマ振動数に関しては、付録Aで説明がある。表2.1にアルゴンを作動流体とした時のMHD加速器の、電子運動に関する物性値に対する値を載せる。これにより以下のことがわかる。

表 2.1 アルゴンを作動流体とした時のプラズマ特性値

(温度(電子温度) : 10000[K]、電子のモル分率 : 0.01、磁束密度 : 1.0[T])

平均自由行程	$6.6 \times 10^{-4} [m]$
ラーマー半径	$2.2 \times 10^{-5} [m]$
デバイ長	$1.8 \times 10^{-7} [m]$

- 平均自由行程からプラズマを一流体モデル記述ができるほど、プラズマ内での衝突頻度は高いことがわかる。
- 荷電粒子のサイクロトロン半径が平均自由行程の10倍以上大きく、磁場は比較的弱い。従って、プラズマの各種輸送係数は等方的であるとみなせ、またホール電流を無視できる。
- MHDダクト径(図2-3)に比べてデバイ長が十分小さい。従って、プラズマは準中性であるとみなせる。

そこで、MHDダクト内の流れ場を数値解析するために以下のようなモデル化を行う。

- プラズマを連続体として扱い、圧縮性を考慮した一流体モデルで近似する。すなわち、プラズマを構成する各粒子の挙動を考えるのではなく、空間の個々の場所での平均密度、平均速度、温度についての推移を追跡する。
- プラズマは計算領域のいたるところで電気的中性条件を満たす。
- 重力の影響を無視する
- プラズマからの輻射を無視する
- プラズマは等方的であり、ホール電流は無視できるとする。
- 二温度モデルにおいては、電子温度と重粒子(中性粒子とイオン粒子)温度は異なる
- $Re \approx 2.0 \times 10^5$ で十分に大きく非粘性とみなす

2.1 流体の支配方程式[8]

成分別の保存方程式

ここで、 $s = i$ (イオン), e (電子), a (中性粒子)であり、イオンは一価のイオンを考える。

連続方程式

$$\frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{r}_s \mathbf{V}_s) = \dot{\mathbf{w}}_s \quad (2.1)$$

右辺は化学反応に伴う粒子の密度増加である。

運動量方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{r}_a \mathbf{V}_a}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{r}_a \mathbf{V}_a + p_a) \mathbf{V}_a) = F_{ai} + F_{ae} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_i \mathbf{V}_i}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{r}_i \mathbf{V}_i + p_i) \mathbf{V}_i) = n_i e_i (\mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) + F_{ia} + F_{ie} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_e \mathbf{V}_e}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{r}_e \mathbf{V}_e + p_e) \mathbf{V}_e) = -n_e e (\mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + F_{ea} + F_{ei} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

F_{ij} は i が j と衝突することによって受ける仕事であり、イオンと電子の右辺第一項は電位によってなされる仕事である。

エネルギー方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{r}_a e_a}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{r}_a e_a + p_a) \mathbf{V}) = Q_{ae} + Q_{ai} + Q_{cha} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_i e_i}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{r}_i e_i + p_i) \mathbf{V}) = Q_{ia} + Q_{ie} + n_i e \mathbf{V}_i \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) + Q_{chi} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_e e_e}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{r}_e e_e + p_e) \mathbf{V}) = Q_{ea} + Q_{ei} - n_e e \mathbf{V}_e \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \mathbf{V} \cdot \nabla p_e + Q_{che} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

ここで、

$$\left\{ \begin{array}{l} e_a = \frac{1}{g-1} p_a + \frac{1}{2} V_a^2 \\ e_i = \frac{1}{g-1} p_i + \frac{1}{2} V_i^2 \\ e_e = \frac{1}{g-1} p_e \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Q_{ij} は i が j と衝突によって受けるエネルギー、電子の式の右辺の最後の項は化学反応によるエネルギーであり、化学反応が電離反応のみであれば、具体的には、

$$Q_{ch} = -\dot{n}_e e_{ion} \quad (2.5)$$

と書ける。

2.2 一流体モデル

(2.3)-(2.6)を成分で足しあわせることによって一流体モデルの流体基礎方程式が導出できる。ここで、

流体全体での密度と速度を $\mathbf{r} = \sum_s \mathbf{r}_s$, $\mathbf{V} = \frac{1}{\mathbf{r}} \sum_s \mathbf{r}_s \mathbf{V}_s$ と定義すれば、

(2.1)式から物質保存の式は、

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{r} \mathbf{V}) = 0 \quad (2.6)$$

また、衝突項の F_{ij} の関係は、

$$F_{ij} = -F_{ji} \quad (2.7)$$

である。

プラズマの電気的中性条件から、

$$n_e \approx n_i \quad (2.8)$$

とすれば、電流密度 \mathbf{j} が、

$$\mathbf{j} = -n_e e (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) \quad (2.9)$$

と表せる。

(2.5)-(2.7)の条件とさらに \mathbf{V} の 2 次の項を無視してやることにより、(2.2)の運動量保存の式は

$$\frac{\partial(\mathbf{rV})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{rV}\mathbf{V} + p) = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.10)$$

流体全体のエネルギーを $E = \sum_s \mathbf{r}_s e_s$ と定義すると、

同様にエネルギー式は

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p)\mathbf{V}] = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (2.11)$$

ここで、

$$E = \frac{\mathbf{rV}^2}{2} + \frac{1}{g-1} p \quad (2.12)$$

2.3 一温度モデル

電子温度と重粒子(中性粒子、イオン)温度、つまり、気流温度が等しいと考えるモデルである。全体の気流温度と電子温度が等しいため、重粒子と電子が同じ運動方程式で記述できることになる。従って、一温度モデルの方程式系は、(2.7)-(2.13)である。

2.4 二温度モデル

エネルギー伝達には2つの経路がある。

- 重粒子が電磁場の効果によって加速される
- 自由電子がジュール加熱を受けて過熱され、その加熱された自由電子が重粒子との非弾性衝突などによってエネルギーを重粒子に伝達する

自由電子の温度は重粒子温度と著しく違っている可能性があり、熱非平衡状態であるといえる。このため2温度モデルで解析を行う必要がある。

この時の基礎方程式は、重粒子系と電子の運動の記述式(エネルギー式)を分けることで導出できる。

(2.3)より重粒子のエネルギー式、電子のエネルギー式はそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_h) + \nabla \cdot [\{E_h + (p - p_e)\} \mathbf{V}] = -\mathbf{j} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + Q_{ie} + Q_{ae} + Q_{ch} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_e) + \nabla \cdot [\{e_e + p_e\} \mathbf{V}] = \mathbf{V} \cdot \nabla p_e + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) + Q_{ei} + Q_{ea} + Q_{ch} + Q_{Te} \quad (2.14)$$

ここで、

$$E_h = \frac{1}{2} \mathbf{r} V^2 + \frac{1}{g-1} (p - p_e) \quad (2.15)$$

$$e_e = \frac{1}{g-1} \mathbf{r}_e R_e T_e = \frac{1}{g-1} p_e \quad (2.16)$$

である。

ここで、重粒子は *Ar*、*He* などの単原子分子を仮定し、電子励起によるエネルギーは無視している。従って、内部エネルギーは並進エネルギーのみである。また、 Q_{ij} は衝突による

緩和エネルギーを表し、 $Q_{ij} = -Q_{ji}$ である。また、 Q_{ch} は電離反応エネルギーを表している。

(2.14)、(2.15)式に表れる生成項の評価(各種モデル)について以下に説明する。

重粒子と電子の衝突項の評価

電子-重粒子緩和

電子が重粒子と弾性衝突することによる緩和過程を意味している。電子の速度は T_e で代表され、重粒子の速度は T で代表される。この 2 つの温度が異なる場合、電子と重粒子が弾性衝突することにより、平衡状態に近づく、この弾性衝突によって、電子が失うエネルギーは、

$$Q_{ei} + Q_{ea} = -2\mathbf{r}_e \frac{3}{2} \bar{R} (T_e - T) \frac{(\mathbf{n}_{ei} + \mathbf{n}_{ea})}{M_a} \quad (2.17)$$

と書ける。

電子-中性粒子間

ここで、電子と中性粒子の衝突頻度 \mathbf{n}_{ea} は、

$$\mathbf{n}_{ea} = \frac{4}{3} \mathbf{s}_{ea} n_a \sqrt{\frac{8kT_e}{\rho m_e}} \quad [s^{-1}] \quad (2.18)$$

であり、衝突断面積 \mathbf{s}_{ea} は *Ar* に対しては次の近似式[9]で評価される。

$$\mathbf{s}_{ea} = a_0^2 (-0.535 + 1.46 \times 10^{-3} T_e) \quad (2.19)$$

ここで、

$$a_0 = 0.529 \times 10^{-10} \quad [m] \quad (2.20)$$

となる Bohr 半径である。

電子-イオン間

電子-イオン間の衝突断面積は、電子-中性粒子間の衝突に比べて非常に大きい。これはクーロン場が遠達場であるからである。衝突がクーロン衝突のように考えることにより、以下のように衝突頻度 n_{ei} を計算する。

$$n_{ei} = 3.64 \times 10^{-6} n_e \frac{\ln \Lambda}{T_e^{\frac{3}{2}}} \quad [s^{-1}] \quad (2.21)$$

ここで、

$$\Lambda = 1.24 \times 10^7 \sqrt{\frac{T_e^3}{n_e}} \quad (2.22)$$

2.4.1 化学反応モデル

化学反応が「凍結」していないモデルの場合は以下を考慮する。

ここでは、電子衝突電離のみを考える。なぜならば、ジュール加熱によって電子温度 T_e が高くなる可能性があるからである。

化学反応を扱う場合電子の物質質量保存と重粒子系の物質質量保存は分けた方が扱い易い。重粒子系の物質質量保存は全体の式を用いてほぼ近似できると考えれば、電子の物質質量保存の式だけを取り出して考えればよいことになる。(2.1)より以下の式で表される。

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{r}_e \mathbf{V}) = \dot{w}_e \quad (2.23)$$

右辺の化学反応による生成項は以下のように評価する。

連続式での生成項評価

一般の化学反応 r に関して、次のように表すことが出来る。

$$\sum_i \mathbf{a}_{ir} X_i \Leftrightarrow \sum_j \mathbf{b}_{jr} X_j \quad (2.24)$$

$$X_s = 0.001 \frac{\mathbf{r}_s}{M_s} \quad [mol \cdot cm^{-3}] \quad (2.25)$$

この化学反応における生成項 \dot{w}_s は、

$$\dot{w}_s = M_s \sum_r (\mathbf{b}_{s,r} - \mathbf{a}_{s,r}) (R_{f,r} - R_{b,r}) \quad (2.26)$$

で表せる。ここで、 $\mathbf{a}_{s,r}$ 、 $\mathbf{b}_{s,r}$ はそれぞれ化学反応 r の化学量論係数である。また、 $R_{f,r}$ 、 $R_{b,r}$ はそれぞれ以下のように評価する。

$$R_{f,r} = 1000 \left(k_{f,r} \prod_s X_s^{a_{s,r}} \right) \quad (2.27)$$

$$R_{b,r} = 1000 \left(k_{b,r} \prod_s X_s^{b_{s,r}} \right) \quad (2.28)$$

式(2.28)は正反応の反応速度を、式(2.29)は逆反応の反応速度を表している。ここで、 $k_{f,r}$ 、 $k_{b,r}$ はそれぞれ正反応、逆反応の反応速度定数である。次にこの反応速度定数を評価する。

アルゴンの電離反応モデル

アルゴンの電離反応は次を考える。



(2.30)の電離反応の前進反応速度定数は、

$$k_f = 3.75 \times 10^{-16} T_e^{1.5} \left(\frac{\Theta_{Ar}}{T_e} + 2 \right) \exp \left(-\frac{\Theta_{Ar}}{T_e} \right) \quad [cm^3 \cdot mol \cdot s^{-1}] \quad (2.30)$$

とかける。後進反応速度定数は、

$$k_b = \frac{k_f(T)}{K_{eq}(T)} \quad (2.31)$$

で求める。ここで、 K_{eq} は平衡定数であり、本計算では Saha の平衡式より求める。具体的には、

$$K_{eq}(T) = \frac{2Z_I^e}{Z_A^e} \left(\frac{2p m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{\Theta_{ion}}{T} \right) \times 10^{-6} \quad [cm^{-3}] \quad (2.32)$$

と書ける。ただし、 Z_I^e 、 Z_A^e はそれぞれ Ar^+ 、 Ar に関する電子励起の分配関数であり、以下のように評価される。

$$Z_A^e = \sum_i g_{iAr} \Theta_{eliAr} \quad (2.33)$$

$$Z_I^e = \sum_i g_{i,Ar^+} \Theta_{eliAr^+} \quad (2.34)$$

ただ、 $2Z_I^e/Z_A^e \approx 12$ と近似しても誤差は小さい。従って、(2.33)式に定数値を代入すると、

$$K_{eq}(T) = 2.9 \times 10^{16} T^2 \exp\left(-\frac{\Theta_{ion}}{T_e}\right) \quad [cm^{-3}] \quad (2.35)$$

を得る。(2.32)式に代入すると、

$$k_b = 1.29 \times 10^{-32} \left(\frac{\Theta_{Ar}}{T_e} + 2\right) \exp\left(\frac{\Theta_{ion} - \Theta_{Ar}}{T_e}\right) \quad (2.36)$$

と書ける。ただし、

$$\Theta_{ion} = 182900[K], \quad \Theta_{Ar} = 135300[K] \quad (2.37)$$

であり、それぞれ電離特性温度、励起特性温度と呼ばれる。以上の反応モデルは3000[K]以上でのみ適用して、それ以下の温度では反応が起こらないものとする。

電子エネルギー式の生成項の評価

電子衝突電離

電子の衝突による電離反応で、 Ar の電離反応の場合では、



である。この電離反応は、自由電子が原子に衝突することにより電離を引き起こす反応である。アルゴンの電離に必要なエネルギーは非常に大きい(15.76[eV])ため、この電離反応は T_e が非常に高い領域のみで起こる。この電離反応の反応速度は非常に速いので、電離反応が活発になると急激に電子の数密度が増加する。その時、電離ポテンシャルに相当するエネルギーが全体のエネルギーから失われることになり、

$$Q_{ch} = -e_{ion} \dot{w}_{ion} \quad (2.38)$$

ここで、 e_{ion} は電離ポテンシャル、 \dot{w}_{ion} は電子衝突での電離反応によるイオンの密度増加である。

2.4.2 熱伝導モデル

電子温度が大きく変化する場合は熱伝導による効果が出る可能性があり、それを考慮に入

れなければならない。

弱電離気体の熱伝導率の評価の仕方は、Hirschfelder らの研究により、

$$k = 1.9891 \times 10^{-4} \frac{\sqrt{T/M}}{\Omega_k d^2} \quad (2.39)$$

となり、この具体的な値(衝突断面積など)は参考文献[8]によって求めた。

2.4.3 電子-電子励起エネルギーモデル

電子として、重粒子の最外殻を周る電子も考慮に入れるモデルである。

これによって、電子のエネルギーの受け手が自由電子だけでなく、重粒子周りを回っている電子も考慮に入れることになる。

この時、電子のエネルギー式は、

$$\frac{\partial \mathbf{r}e}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{r}e + p_e)\mathbf{V}] = \mathbf{V}\nabla \cdot p_e + Q_{ei} + Q_{ea} + Q_{joul} \quad (2.40)$$

ここで、

$$e = \frac{\mathbf{r}_e}{\mathbf{r}} e_e + \frac{\mathbf{r}_i}{\mathbf{r}} e_{eli} + \frac{\mathbf{r}_a}{\mathbf{r}} e_{ela} \quad (2.41)$$

であり、また、

$$\frac{\partial \mathbf{r}e}{\partial t} = e \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \mathbf{r} \frac{\partial e}{\partial t} = e \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \mathbf{r} \frac{\partial e}{\partial T_e} \frac{\partial T_e}{\partial t} \quad (2.42)$$

と書ける。

さらに、

$$\frac{\partial e}{\partial T_e} = C_{V_e} = \frac{\mathbf{r}_e}{\mathbf{r}} \frac{1}{g-1} R_e + \frac{\mathbf{r}_a}{\mathbf{r}} \frac{\partial e_{ela}}{\partial T_e} + \frac{\mathbf{r}_i}{\mathbf{r}} \frac{\partial e_{eli}}{\partial T_e} \quad (2.43)$$

となる。(6.4)式の第2項と第3項は中性粒子、イオンの電子による比熱の変化と理解できる。ここで、Prabhu らの研究[15]によって、この比熱の変化を既知とすると、上のエネルギー式を解くことができる。中性粒子の比熱の変化は、図 2-4 を曲線近似してやることにより、以下のように置く。

$$\left\{ \begin{array}{l} C_p = \frac{1}{g-1} \quad (T_e \leq 8000[K]) \\ C_p = \exp\left(\frac{T_e - 8000}{20000}\right) + \frac{1}{g-1} \quad (T_e > 8000[K]) \end{array} \right. \quad (2.44)$$

イオンの比熱変化は電子温度が低い時であり、無視できるとした。

2.5 電磁項の評価

2.5.1 電磁場

Maxwell 方程式から誘導磁場の方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{1}{R_m} \nabla \times \mathbf{B} \right) \quad (2.45)$$

の形で得られ、この方程式を見ると磁気レイノルズ数が R_m 上式右辺第一項と第二項の大きさの比を表すことがわかる。磁気レイノルズ数が小さい場合、第二項が支配的となり、これはプラズマの流れにより誘起される磁場の大きさが印加された磁場の大きさに対して無視できることを表す。すなわち、磁場の時間変動について解く必要が無くなる。

本研究対象の代表値を

$V_\infty = 2000 [m/s]$ 、 $\mathbf{s} = 200 [mho \cdot m^{-1}]$ 、 $L = 0.10 [m]$ とすれば、磁気レイノルズ数 R_m は $R_m = \mathbf{s} \mu_0 V_\infty L \approx 0.05$ となり、磁場の時間変動を無視することは近似的に成り立つものと考ええる。

2.5.2 一般化されたオーム則

各成分で書かれた運動方程式(2.3)において、イオン式に $1/m_i$ をかけて、電子の式に $1/m_e$ をかけて、辺々差をとると、

$$\frac{m_i m_e}{r e^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{E} - \frac{1}{e r} (m_e \nabla p_i - m_i \nabla p_e) + \frac{1}{e n_e} \mathbf{F}_{ei} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{m_e - m_i}{e r} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.46)$$

ここで、準定常状態として、非定常項を無視、プラズマ圧力の項は小さいとして無視する、衝突項を衝突頻度 \mathbf{n} で表すなどをすると、

$$\mathbf{j} = \mathbf{s} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (2.47)$$

ここで、 $\mathbf{s} = \frac{e^2 n_e}{m_e \mathbf{n}}$ である。これが一般化されたオーム則である。

2.5.3 電気伝導度

プラズマの各係数を導出する中で、MHD 加速器に適用する時、最も重要なパラメータとなるのは、流れる電流値に大きな変化を与える電気伝導度であろう。これをうまく見積もらなければならない。次に電気伝導度の評価を書く。

気体が完全電離と仮定できるときは Spitzer-Herm の式が用いられる。電離度が十分大きく

ない時(電離度 $a \ll 10^{-4}$)には、Chapman-Cowling の理論を使うことが出来る。
完全電離気体の電気伝導度は次のようになる。

Spitzer の式[8][10]

$$s = \frac{1.56 \times 10^{-4} T_e^{\frac{3}{2}}}{\ln \left(\frac{1.23 \times 10^4 \times T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e^{\frac{1}{2}}} \right)} \quad [mho \cdot cm^{-1}] \quad (2.48)$$

ここで、 T_e は電子温度[K]であり、 n_e は電子数密度 [$1 \cdot cm^{-3}$] である。

(2.40)式は完全電離気体の場合であり、この関係式は弱電離気体にそのまま当てはめることはできない。輸送の機構が異なるためである。

Chapman と Cowling は弱電離気体を実質的には中性気体のように扱えるという仮定に基づいて実用的な理論を展開した。この結果、弱電離気体の電気伝導度は、次のようになることが示された。

$$s = \frac{e^2 n_e}{kT} D_{12} \quad (2.49)$$

ここで、 n_e は電子数密度、 e は電子の電荷、 D_{12} は Q を衝突断面積とした時に、次のように表される二元拡散係数である。

$$D_{12} = \frac{3.39}{8n_o Q} \left(\frac{kT}{2pm_e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.50)$$

これを組み合わせて、弱電離気体の電気伝導度

$$s = 3.34 \times 10^{-12} \frac{a}{QT^{\frac{1}{2}}} \quad (2.51)$$

電離度は固定し、衝突断面積は参考文献[8][11]に依った。

任意の電離の気体を扱う時は Kantrowitz らの理論に従って、減速力が抵抗のように電流を妨げることから直列に入った抵抗として扱うと考えた。この時、比抵抗は伝導度の逆数なので、

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_L} + \frac{1}{s_H} \quad (2.52)$$

ここで、 s は任意の電離度の時の電気伝導度であり、 s_L は Chapman-Cowling の理論による弱電離気体の電気伝導度、 s_H は Spitzer の式による完全電離気体の伝導度である。

Chapman-Cowling の式では二体衝突を仮定しており、高温における衝突を厳密に記述しているとはいえない。気体の電離度がある程度以上 ($\alpha \gg 10^{-4}$) になると、大部分が遠距離衝突となり、二体衝突として扱う仮定が疑わしくなるからである。電荷のない粒子の相互作用のポテンシャルは $1/r^n$ に比例するのに対して、クーロン・ポテンシャルは $1/r$ に比例して遠距離的である。従って荷電粒子は電離していない粒子の場合よりも早く影響を受けることになる。遠距離衝突の頻度が圧倒的に大きいのは、まさにこのためである。Spitzer らは電離気体の多体衝突を最初に考慮した。すなわちポテンシャルが遠距離的であるために、単純な衝突のみを考えるわけにはいかない。Chapman らの理論が仮定するように 2 つの粒子だけが衝突するのではなく、付近にある他の粒子とも相互作用するのである。

図 2-5 に大気圧付近(電離度 $\alpha = 5.0 \times 10^{-2}$ 、衝突断面積は参考文献[1]の電子温度 T_e との関係図から出した)でのアルゴンの電子温度と電気伝導度の関係図を示す。これによれば、Chapman-Cowling の理論では電子温度が上がれば電気伝導度が下がる図になっていることがわかる。逆に Spitzer-Harm の電気伝導度は電子温度に対応して上がっていく。また、10000[K] 付近で交点を持っており、文献[8]を見ると、Kantrowitz の電気抵抗は実験値に近いとわかる。

図 2-6 に電離度 $\alpha = 1.0 \times 10^{-4}$ 、密度 $r = 0.003 [kg/m^3]$ の時の電子温度 T_e と電気伝導度との関係の図を示す。ここで、Spitzer-Harm の電気伝導度と Chapman-Cowling の電気伝導度では高温部分で大きくかけ離れた図になっている。元々、Chapman-Cowling の理論は電離度 $\alpha \leq 1.0 \times 10^{-4}$ のような低電離度をモデル化した理論ではあるが、高温部分での記述が厳密でないので、高温部分では Spitzer の理論にほぼ従うと考える。また、Kantrowitz の理論では Chapman-Cowling の電気伝導度を考慮することで Spitzer-Harm の低温部分に補正をしているものと考えられる。このため、本研究では低温部での値は少し厳密性を欠くかもしれないが、それほど電子温度が低温になることは考えられず、全域で Spitzer-Harm の式を用いて電気伝導度を評価しても問題はないであろうと考えた。

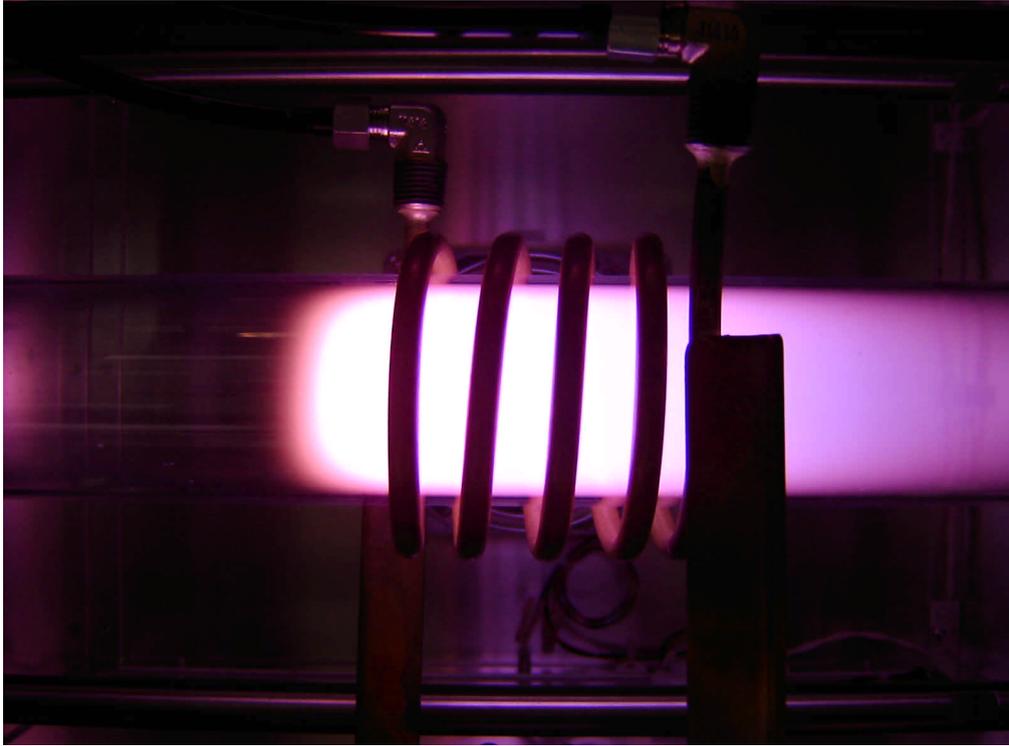


図 2-1 ICP 風洞

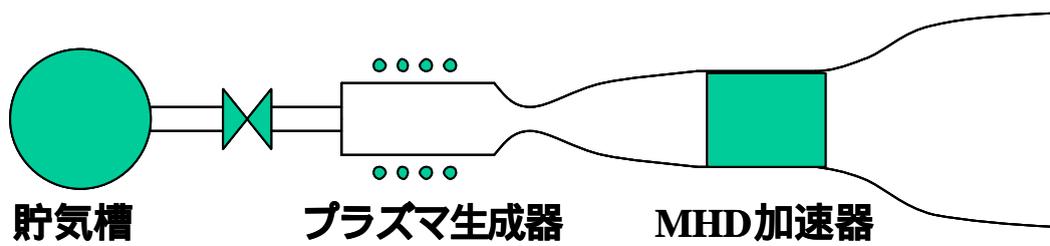


図 2-2 MHD 加速器概念図

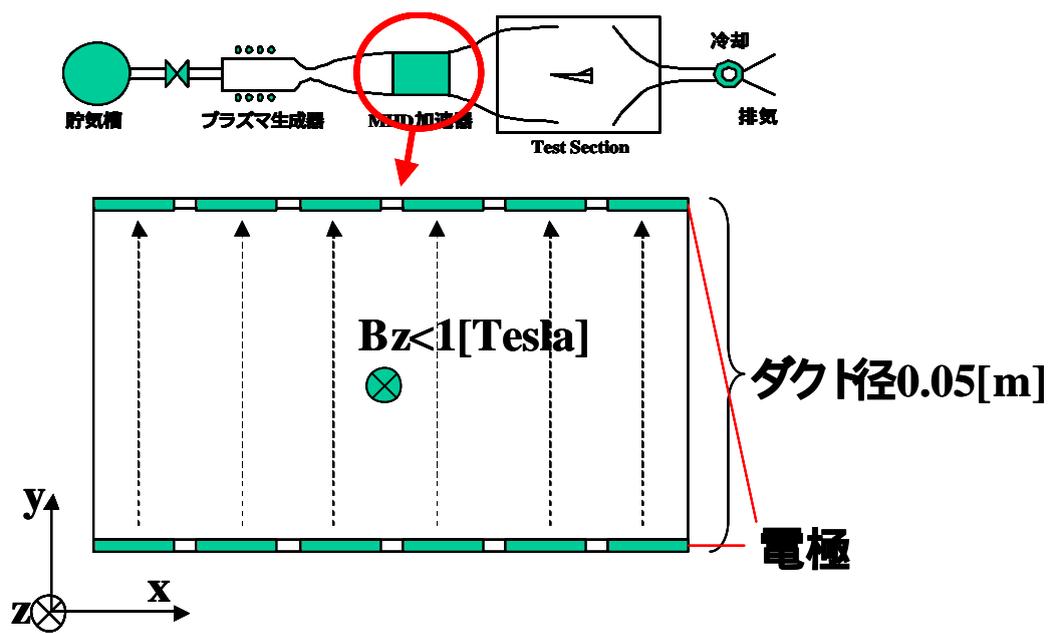


図 2-3 MHD 加速器の概要

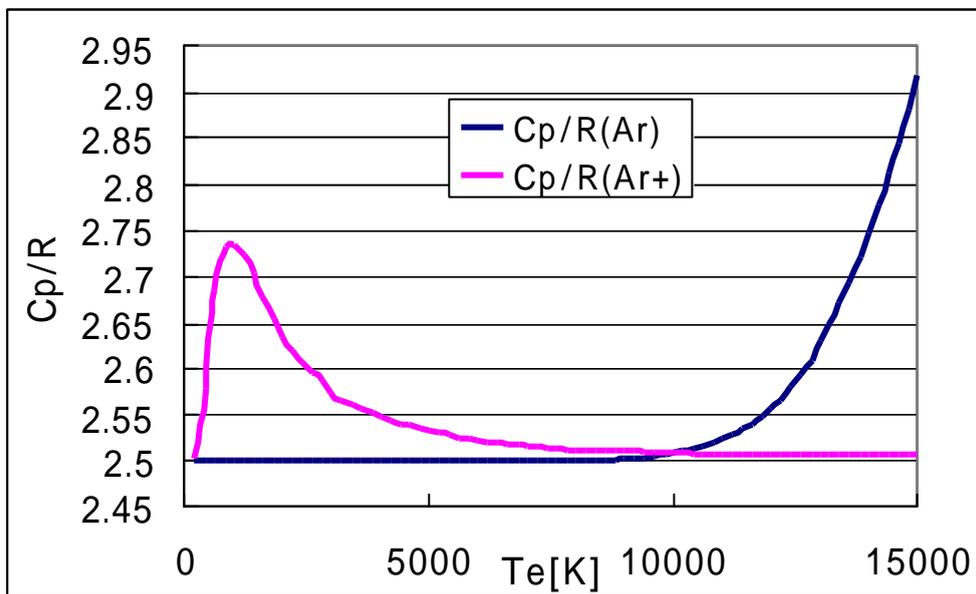


図 2-4 電子温度による比熱の変化

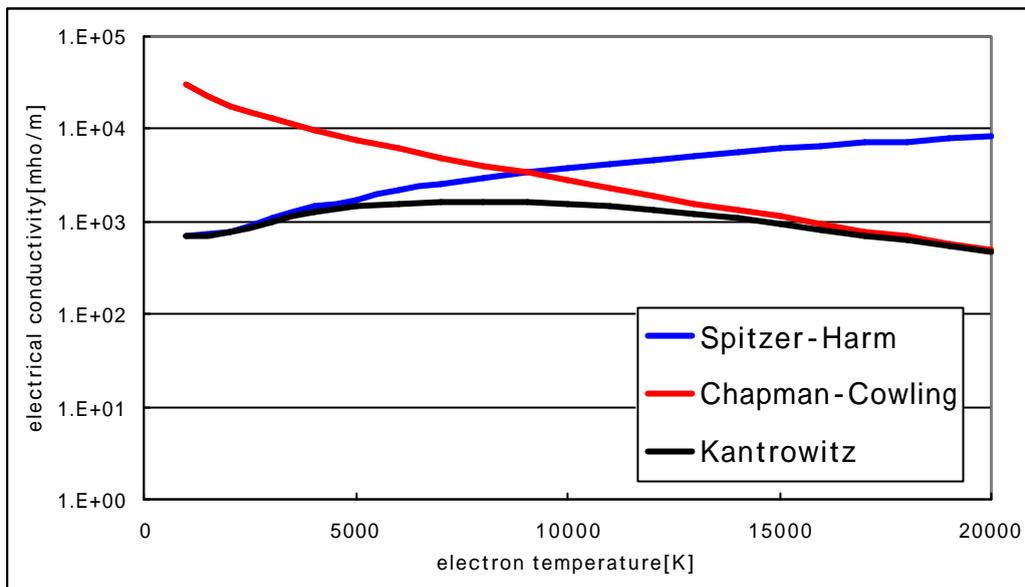


図 2-5 電気伝導度の比較(電離度 $\alpha = 5.0 \times 10^{-2}$ 、大気中アルゴン密度の時)

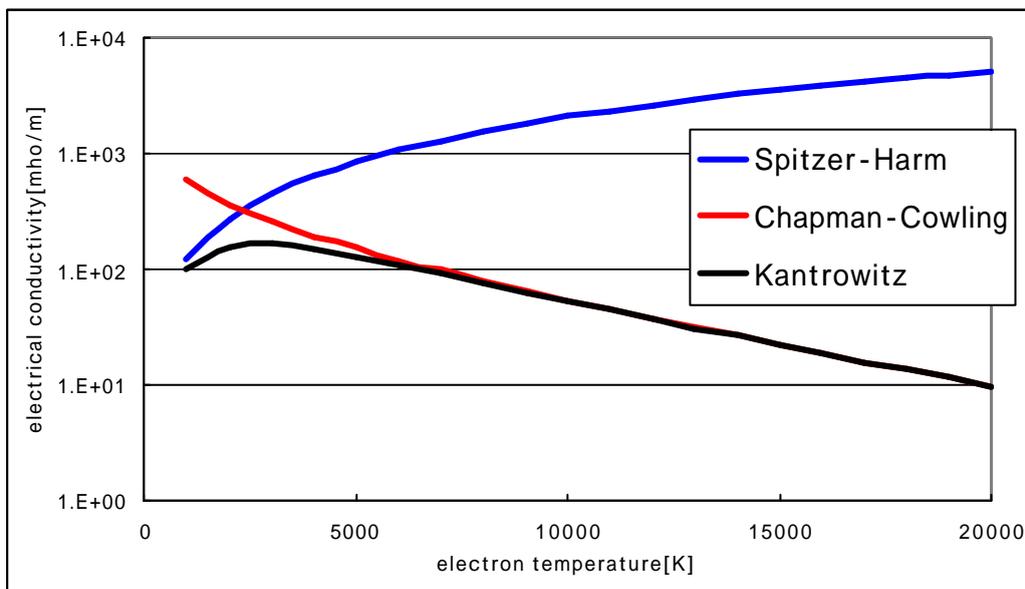


図 2-6 電気伝導度の比較(電離度 $\alpha = 1.0 \times 10^{-4}$ 、密度 $r = 0.003 [kg/m^3]$ の時)

第3章 簡易1次元流モデルによる解析解

簡易一次元モデルによって MHD 加速器の性質をとらえ、次章以降の数値解析の条件を模索することを目的としている。

ここで、簡易一次元モデルでの解析が目的しているモデルの概念図を図 3-1-1、図 3-1-2 に示している。

3.1 定常1次元流計算

流路の断面積を A とした時の、準一次元一温度流体方程式は以下のように書ける。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = S \quad (3.1)$$

ここで、保存量ベクトル Q 、流束ベクトル E 、生成項 S の値は以下のようになる。

$$Q = \begin{bmatrix} rA \\ ruA \\ eA \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} ruA \\ (p + ru^2)A \\ (e + p)uA \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -p \frac{\partial A}{\partial x} + F_x \\ Q_{joul} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

生成項の F_x はローレンツ力、 Q_{joul} はジュール加熱であり、

$$F_x = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x \quad (3.3)$$

$$Q_{joul} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (3.4)$$

と書ける。

電磁項の評価のために
一般化されたオームの法則

$$\mathbf{j} = \mathbf{s} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (3.5)$$

を用いて流体場を解析することができる。

また、気体の状態方程式

$$p = rRT \quad (3.6)$$

を用いることで方程式系が閉じる。

ここで、以下のような仮定を置く。

- ダクト断面積は一定
- 定常流を仮定
- 加速器内で解離反応、電離・再結合反応は起こらない
- 重粒子と電子の温度は等しいと仮定(一温度モデル)
- 電場は y 方向、磁場は z 方向のみを持つ
- 比熱比が一定の理想気体として扱うこととする

以上の仮定により、基礎方程式(3.1)-(3.6)は、

物質保存

$$ru = \dot{m}/b^2 = F = \text{const} \quad (3.7)$$

運動量保存

$$ru \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = J_y B \quad (3.8)$$

エネルギー保存

$$ru \left(C_p \frac{dT}{dx} + u \frac{du}{dx} \right) = J_y E \quad (3.9)$$

オームの法則

$$j_y = \mathbf{s} (E - uB) \quad (3.10)$$

気体の状態方程式

$$p = rRT \quad (3.11)$$

と定常 1 次元モデルとなる。

この方程式を解くためには(3.10)式の右辺にある電磁場、伝導度を決める必要がある。

ここで、Mercheret らの方法[1]に従ってさらに次のような仮定を置く。

- 負荷率 K を導入し、ダクト内で K が一定とする
- 電気伝導度 \mathbf{s} を決めるために、電離度が分かっているものとする、さらに電離度を一定と置いた

すると、 $j_y = \mathbf{s} (K-1)(ru)(B/r)^2$ などとすることにより、(3.7)-(3.11)は解析的に解くことができ、

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \frac{s(K-1) \left(\frac{C_p}{R} - K \right) F^2 \left(\frac{B}{r} \right)^2}{\left(\frac{C_v}{R} \right) F \left(1 - \frac{1}{M^2} \right)} \quad (3.12)$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{C_p} \left[\frac{s(K-1) K F^2 \left(\frac{B}{r} \right)^2}{F} - u \frac{du}{dx} \right] \quad (3.13)$$

の形になる。

(3.12)-(3.13)を用いると、ダクト入口条件を設定することにより、ダクト出口での気流温度、速度、その他がわかる。

負荷率 K

x 方向に速度 u 、 z 方向に磁場 B 、それと垂直方向の電場を E_y 、電流を j_y とし、ホール

電流 j_x 、電場を E_x とすれば、体積あたりの投入電力は $\langle j \cdot E \rangle$ であり、加速仕事は $\langle j_y u B \rangle$ で表せることから、効率 h が以下のように書ける。

$$h = \frac{\langle j_y u B \rangle}{\langle j_y E_y + j_x E_x \rangle} \quad (3.14)$$

ここで、 $\langle \rangle$ はダクトでの平均を表している。ファラデー型加速器では流れ方向の電流 j_x はないと考えるので、オームの法則の関係式より

$$E_y = uB + j_y / B \quad (3.15)$$

となる。

これから、投入電力 $\langle j \cdot E \rangle$ は、

$$\langle j \cdot E \rangle = \langle j_y^2 / s \rangle + \langle j_y u B \rangle \quad (3.16)$$

第一項はジュール加熱であり、第二項は加速仕事である。ジュール加熱だけがエントロピー上昇に寄与している。これは負荷率 K と関係付けられる。負荷率の定義は次のようなものである。

$$K = \frac{\langle E_y \rangle}{\langle uB \rangle} \quad (3.17)$$

j_y がダクトにそってあまり変化しないとすれば式(1)から j_y を消すことができ、

$$h = \frac{1}{K} \quad (3.18)$$

つまり、ファラデー型加速器の効率は負荷率で近似できるわけである。式(6)を見ると、負荷率 K が 1 に近ければ高い効率、低ジュール加熱を実現できることがわかる。一方、式(2)から負荷率 K が 1 であれば、 y 方向に電流が流れず、そのため加速力 $j_y B$ が起こらない。

つまり、最大効率の加速(負荷率 K が 1)は加速力と単位長さ当たりの投入電力がゼロになるという極限状態の解しかもっていないわけである。有限の加速力、投入電力を取るためには、最大効率での加速をすることと反することになる。実際には、ジュール加熱が常に存在し、このため MHD 加速器の効率は常に 1 より小さい。(K は 1 より大きい)

3.2 計算条件

3.1 の(3.12)式より局所的に考えた時に、効率的に速度増分を得るために必要な条件がわかる。

$$1 - \frac{1}{M^2} > 0$$

$$1 < K < \frac{C_p}{R}$$

負荷率 K の値は定義から 1 よりも大きい。また、 K が大きくなればジュール加熱が大きくなるので、効率的に作動するためには K の値があまり大きくなってはならない。

これより、(3.12)式の分子は正となるので、分母も正とならなければ速度増分は得られない。つまり の条件が出る。また、効率的に作動する中で速度増分を得るためには負荷率 K の値が のような範囲に入っていなければならないことがわかる。

の条件から MHD 加速器入口までにマッハ数が 1 を超えていなければならない。つまり、MHD 加速器までにノズルによる膨張加速などを行っている必要がある。

また、 の条件から負荷率 K の値、つまり電場 E_y と磁場 B_z の関係((3.17)式の関係)にある制限がかかっている事がわかる。

MHD ダクトの計算条件は以下のように設定する。

- MHD ダクト外形

実験室レベルの大きさを仮定して、表 3-1 のようにする。

表 3-1 MHD ダクト外形

Length	0.10[m]
Width	0.05[m]
Height	0.05[m]

- 電磁場

磁場は永久磁石で市販されているもので容易に手に入れられるであろう 0.1[Tesla]を用いることとし、電場は K によって決まる。また、 K の値は効率が比較的良いものとして、1.1 くらいのものを仮定する。つまり、表 3-2 のようにする。

表 3-2 電磁場

B	0.1 [Tesla]
K	1.1

- 貯気槽条件

貯気槽条件は上流に付くであろうプラズマ生成器で妥当と思われる値を用いた[5]。また、流入マッハ数の値は MHD 加速器までに加速する機構のことを考慮し、比較的低いマッハ数に設定した。

表 3-3 貯気槽条件および流入マッハ数

P0	5000 [Pa]
T0	5000 [K]
Mach	2

貯気槽条件から等エントロピー加速すると考えているので、基準条件での MHD ダクト入口の気流の特性値は表 3-4 の通り。

表 3-4 MHD ダクト入口条件

u	1700 [m/s]
p	600 [Pa]
	1.3 [g/s]
T	2100 [K]
mdot	5.8 [g/s]

ダクト入口で気流が持っている比エンタルピー(単位重量当たりのエンタルピー)は以下の通り。

$$h_{total} = 2.6 \times 10^6 [J/kg]$$

$$h_{velocity} = 1.5 \times 10^6 [J/kg]$$

h_total は総比エンタルピーであり、 $h_velocity$ はそのうち速度として持っている比エンタルピーである。

本章では貯気槽条件をパラメータとして変化させ、どのような変化が起こるかを見る。(貯気槽から MHD ダクト入口までは等エントロピー変化とする)

これにより、MHD ダクトによる加速の特徴の理解を目的とする。

3.3 計算結果

パラメータとして貯気槽圧力 P_0 を変化させた時は図 3-2 に書いてある。これを見れば、MHD ダクト出口と入口の比エンタルピーの差である比エンタルピー増加量が大きくなるためには、貯気槽圧力が低い方がよいことがわかる。これは、質量流量が P_0 に比例しており、 P_0 が低い方が質量流量は少なくなる。比エンタルピーは単位質量あたりのエンタルピーであり、同じ電力を投入しても少ない流量に投入された方がより比エンタルピーは上昇しやすい。このため、 P_0 が少ない方がよいという結果になる。

次に流入マッハ数 M を変化させた時は図 3-3 に書いてある。これを見れば、比エンタルピー増加量が大きくなるためには、流入マッハ数を大きくした方がよい。これも貯気槽圧力と同じで質量流量が原因であると考えられる。流入マッハ数 M が増加すれば質量流量が減少する。このため、マッハ数が大きい方がよいということになる。

貯気槽条件とは異なり、実験者が自由に設定できる値ではないが、負荷率 K が変化した時は図 3-4 に書いてある。これによると、比エンタルピーを増加させるには K が大きい方がよいことがわかる。ただし K が大きくなればなるほど比エンタルピーのうち速度増分で得られる増分の割合が減り、 K の定義から、結果ジュール加熱によって得られる比エンタルピーの増加の割合が増えていることがわかる ($K=2$ 付近)。

つまり、

- 質量流量を少なくすることで変化の割合が大きく見て取れるようになるということ。単位量当たりの変化が大きくなることがわかった
- 負荷率 K は大きい方が比エンタルピー増加量が大きくなるのだが、速度増分としてのエンタルピーを得たいのであれば K は小さい方がよい。

ここで考えているモデルというのは、ダクト全域で電流が一定割合 (K と uB_z による) で流れ続けることによって、全域ですべて加速し続けるというモデルである。この仮定の妥当性は、4 章以降の数値解析で検討する。

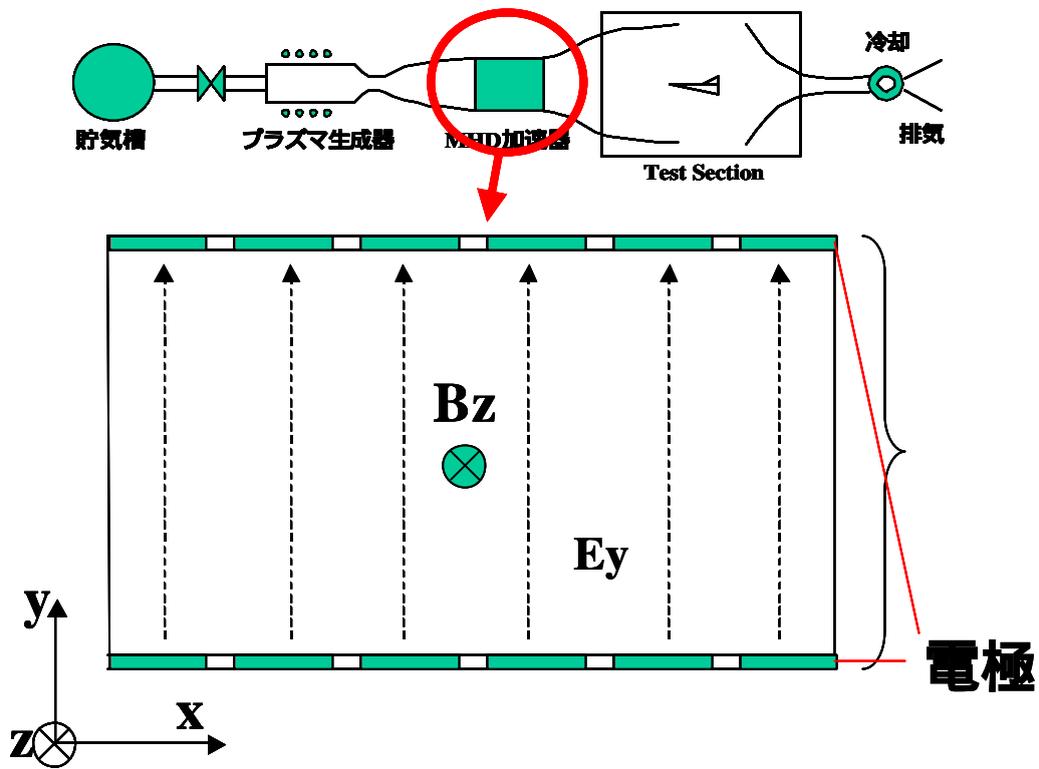


図 3-1-1 MHD 加速器概念図(1)

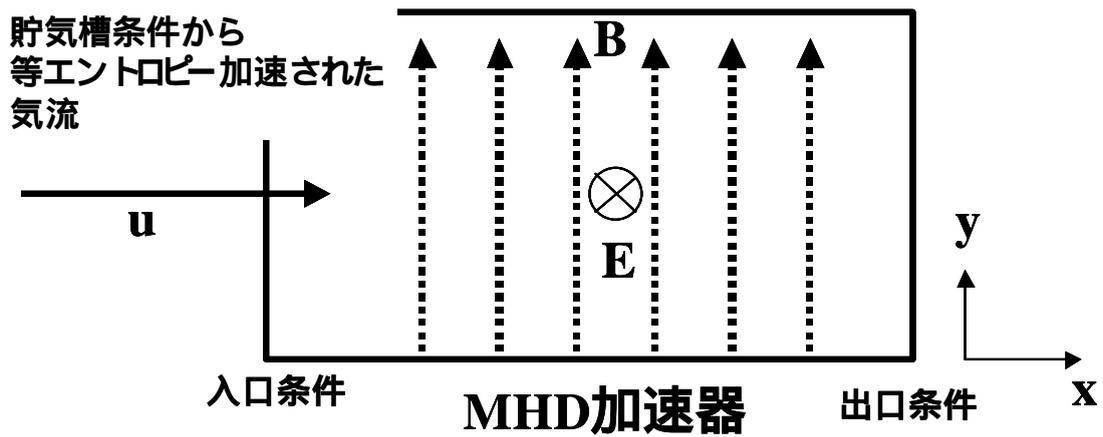


図 3-1-2 MHD 加速器概念図(2)

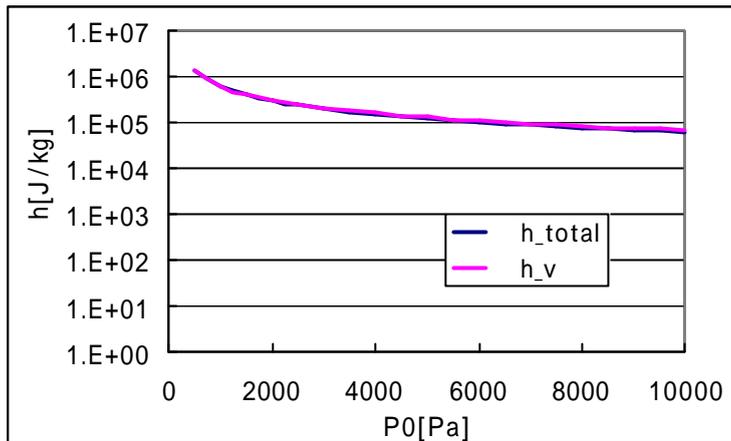


図 3-2-(a) 比エンタルピー増加量の変化

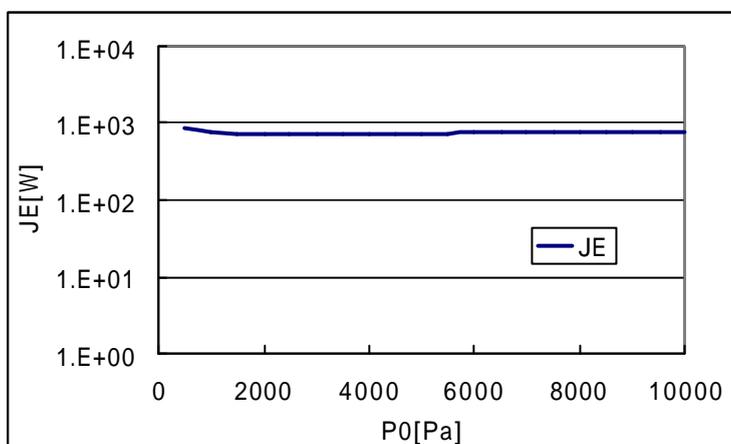


図 3-2-(b) 消費電力変化

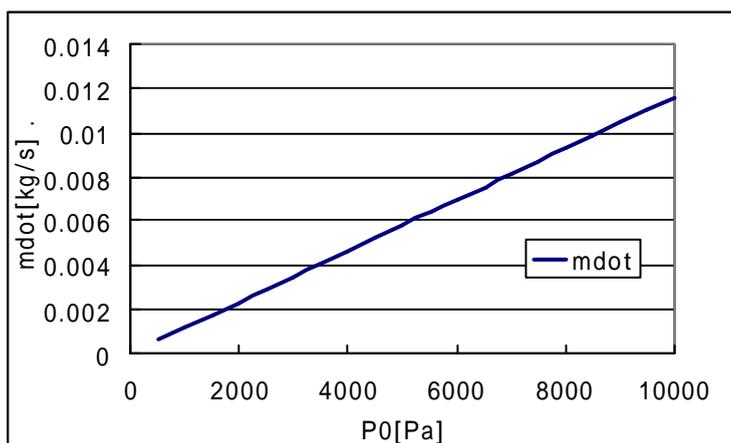


図 3-2-(c) 質量流量変化

図 3-2 貯気槽圧力 P0 を変化させた時の各値の変化

(a)はMHDダクト入り口と出口でのエンタルピーの値の変化 (b)はMHDダクトで消費される電力の変化 (c)はMHDダクトに流入する流体の質量流量

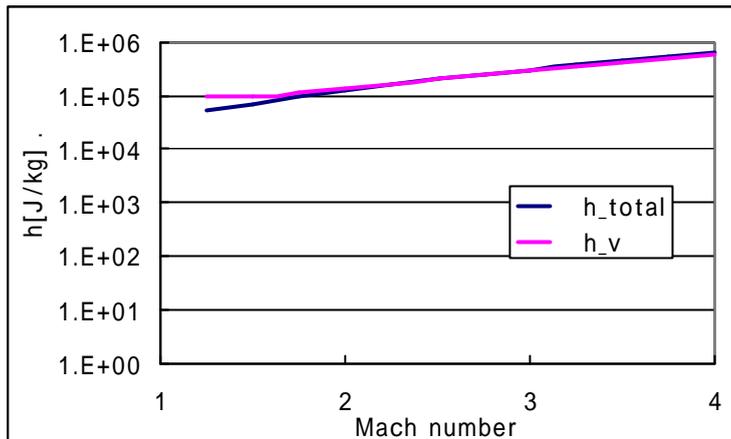


図 3-3-(a) 比エンタルピー増加量の変化

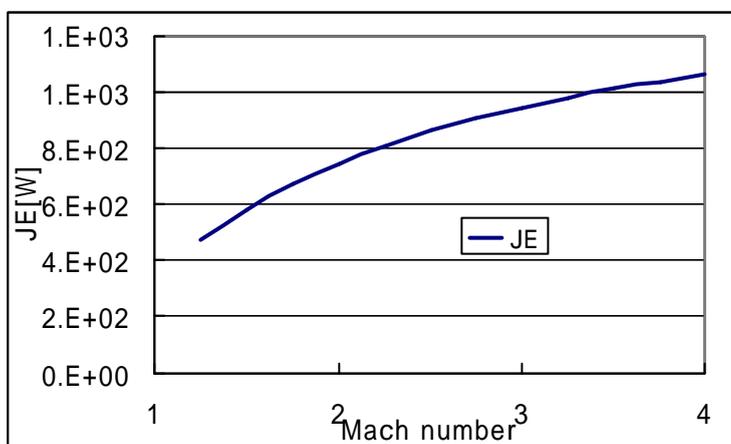


図 3-3-(b) 消費電力の変化

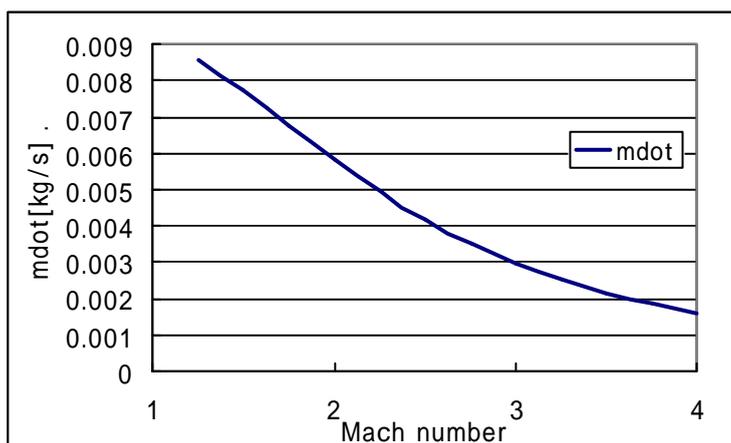


図 3-3-(c) 質量流量の変化

図 3-3 流入マッハ数 M を変化させた時の各値の変化

(a)はMHDダクト入り口と出口でのエンタルピーの値の変化 (b)はMHDダクトで消費される電力の変化 (c)はMHDダクトに流入する流体の質量流量

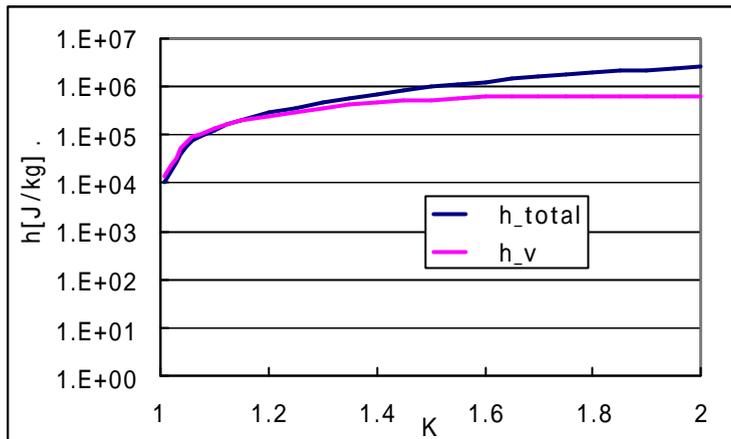


図 3-4-(a) 比エンタルピー増加量の変化

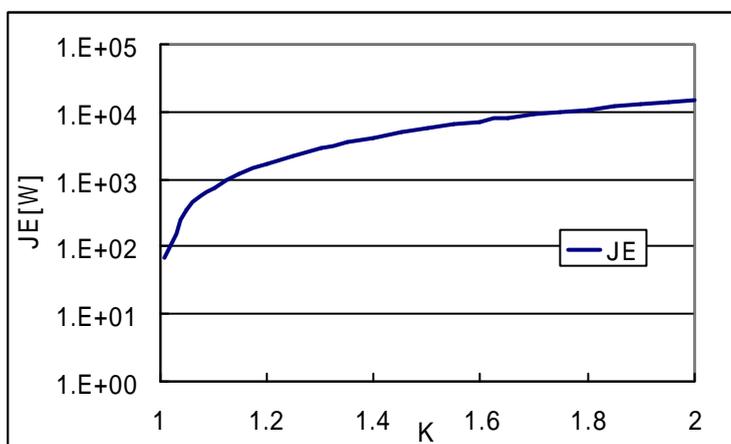


図 3-4-(b) 消費電力の変化

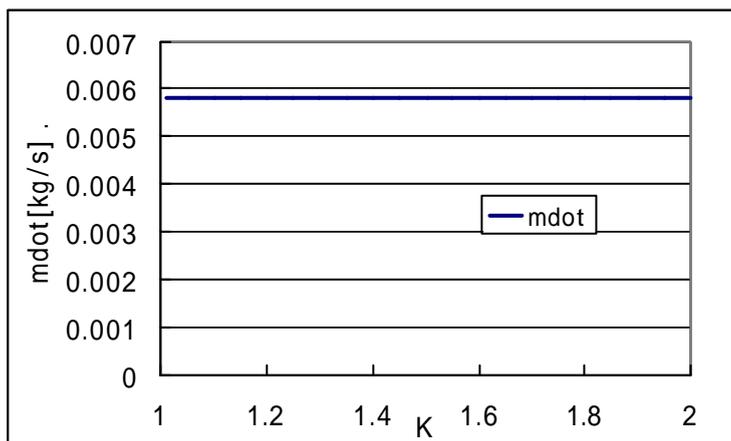


図 3-4-(c) 質量流量の変化

図 3-4 負荷率 K を変化させた時の各値の変化

(a)はMHDダクト入り口と出口でのエンタルピーの値の変化 (b)はMHDダクトで消費される電力の変化 (c)はMHDダクトに流入する流体の質量流量

第4章 一次元流モデルによる数値解析

3章での簡易計算のモデルは、電磁場をパラメータ K 、電気伝導度 s を固定することによって、ダクト内で加速を続けるというモデルであった。本章では電気伝導度 s を変化させ、パラメータ K を変化させて、電流の流れ方によって局所的に加速度が異なるようなモデルを考える。

4.1 基礎方程式

本章での解析の対象となる保存形の非粘性一流体方程式は、次のように書き表すことができる

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (4.1)$$

ここで、 Q は保存量ベクトル、 F は流束ベクトル、 S は生成項であり、これらの具体的な形は以下ようになる。

$$Q = \begin{bmatrix} rA \\ ruA \\ reA \\ r_e A \\ r_e e_e A \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} ruA \\ (ru^2 + p)A \\ r(e+p)uA \\ r_e uA \\ r_e (e+p)uA \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ F_x \\ Q_{joul} \\ \dot{w}_e A \\ Q_e \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

生成項の各値は、

$$\begin{aligned} F_x &= (j \times B)_x \\ Q_{joul} &= j \cdot E \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$Q_e = Q_{e_joul} + Q_{e_collision} + Q_{e_ch} + Q_{e_thermal} \quad (4.4)$$

以下の仮定を置くことによりこれを解くことにする。

- 化学反応はノズル内で「凍結」であり、起こっていないものとする
- 粘性を無視できるものとする。

4.1.1 一温度モデル

一温度モデルでは、基礎方程式系(4.1)-(4.4)は以下のように書ける。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = S \quad (4.5)$$

ここで、保存量ベクトル Q 、流束ベクトル E 、生成項 S の値は以下のようになる。

$$Q = \begin{bmatrix} rA \\ ruA \\ eA \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} ruA \\ (p + ru^2)A \\ (e + p)uA \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -p \frac{\partial A}{\partial x} + F_x \\ Q_{joul} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

生成項の F_x はローレンツ力、 Q_{joul} はジュール加熱であり、

$$\begin{aligned} F_x &= (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x \\ Q_{joul} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (4.7)$$

と書ける。

電磁項の評価のために
一般化されたオームの法則

$$\mathbf{j} = \mathbf{s} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (4.8)$$

を用いることで流体場を解析することができる。

また、気体の状態方程式

$$p = rRT \quad (4.9)$$

を用いることで方程式系が閉じる。

すると、気体の特性値は各々以下のように表せる。

$$p = (g-1) re = (g-1) \left(e - \frac{1}{2} ru^2 \right) \quad (4.10)$$

$$H = e + p \quad (4.11)$$

$$c^2 = g \frac{p}{r} = g(g-1) e = \sqrt{(g-1) \left(H - \frac{1}{2} u^2 \right)} \quad (4.12)$$

4.1.2 二温度モデル

(4.1)-(4.4)から保存量、流束、生成項ベクトルは以下のようになる。

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{r}A \\ \mathbf{r}uA \\ \mathbf{r}eA \\ \mathbf{r}_e A \\ \mathbf{r}_e e_e A \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \mathbf{r}uA \\ (\mathbf{r}u^2 + p)A \\ \mathbf{r}HuA \\ \mathbf{r}_e uA \\ \mathbf{r}_e H_e uA \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ p \frac{\partial A}{\partial x} + F_x \\ Q_{joul} \\ \dot{\mathbf{w}}_e A \\ Q_e A \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

(4.13)式を二つに分けると、

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{r}A \\ \mathbf{r}uA \\ eA \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \mathbf{r}uA \\ (p + \mathbf{r}u^2)A \\ (e + p)uA \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -p \frac{\partial A}{\partial x} + F_x \\ Q_{joul} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$Q_e = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_e A \\ \mathbf{r}_e e_e A \end{bmatrix}, \quad E_e = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_e uA \\ \mathbf{r}_e H_e uA \end{bmatrix}, \quad S_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_e A \\ Q_e A \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

となる。ここで、(4.14)式は流体全体の運動を記述している方程式系であり、(4.15)は電子の運動を記述しているものであり、上が物質保存、下がエネルギー式である。

(4.15)式の生成項の電子のエネルギー増分の項は、

$$Q_{ei} + Q_{ea} = -u \frac{\partial p_e}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + 3 \frac{m_e}{m} k n_e (\mathbf{n}_{ei} + \mathbf{n}_{ea}) (T_e - T) \quad (4.16)$$

また、電子の質量が非常に小さいので、(4.14)式のうち物質保存と運動量保存の式は重粒子を記述しているものと近似できるが、エネルギー式は次のように書き換えなければならない。(2.13)式より、

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_h) + \frac{\partial}{\partial x} [\{E_h + (p - p_e)\} \mathbf{V}] = -\mathbf{j} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + Q_{ch} + Q_{ie} + Q_{ae} \quad (4.17)$$

ここで、

$$E_h = \frac{\mathbf{r}v^2}{2} + \frac{1}{g-1} p \quad (4.18)$$

これに、気体の状態方程式、オームの法則を用いて、方程式系を閉じる。

(4.17)式を(4.14)式のエネルギー式と交換した方程式の形は 4.1.1 の一温度モデルと同じであり、同じ解法を適用して計算できる。また、電子の式 (4.15) を分けて、別々に解いてやれば全体の方程式をとくことが出来る。

4.2 数値計算法[12]

対流項の評価(TVD スキーム)

対象とする流れ場が複雑な流れ場構造を持つものと予想して、これらを捉えるために、対流項の離散化に Yee による symmetric-TVD スキーム[13]を用いることにした。以下にこの TVD スキームの説明を含めた対流項の離散化の方法を示す。モデルとして以下の方程式を考える。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (4.19)$$

セル境界面での数値流束を $\tilde{E}_{j+1/2}$ として、式(4.13)の方程式を差分式に置き換えると以下のようになる。

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\tilde{E}_{j+1/2} - \tilde{E}_{j-1/2} \right] \quad (4.20)$$

上のようにして次の時間ステップの物理量分布を決定する。

本研究では、Flux Difference Splitting(FDS)を用いている。その際、リーマン問題を近似的に満足するように $\tilde{E}_{j+1/2}$ を決めてやればよい。

1 次精度の数値流束は、

$$\tilde{E}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[E_{j+1} - E_j - |A|_{j+1/2} (Q_{j+1} - Q_j) \right] \quad (4.21)$$

ただし、

$$|A|_{j+1/2} = R_{j+1/2} |A|_{j+1/2} R_{j+1/2}^{-1} \quad (4.22)$$

で表せる。行列 A は流束のヤコビアン行列であり、この行列の要素 A_{ij} は $\frac{\partial E_i}{\partial Q_j}$ として、次のように求められる。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-g}{2}u^2 & (3-g)u & g-1 \\ \left(\frac{g-1}{2}u^2 - H \right) & H - (g-1)u^2 & gu \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

また、その同次的な性質(homogeneous)より、

$$E = AQ \quad (4.24)$$

が成り立つ。方程式は双曲型であるから、この行列は対角化が可能で、その 3 つの固有値は、

$$I_1 = u - c, \quad I_2 = u, \quad I_3 = u + c \quad (4.25)$$

となる。また、 R および R^{-1} はそれぞれ保存量の右固有行列、左固有行列であり、実際の値は、

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - c & u & u + c \\ H - uc & \frac{1}{2}u^2 & H + uc \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(b_1 + \frac{u}{c}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + b_2 u\right) & \frac{1}{2}b_2 \\ 1 - b_1 & b_2 u & -b_2 \\ \frac{1}{2}\left(b_1 - \frac{u}{c}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} - b_2 u\right) & \frac{1}{2}b_2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

ただし、

$$b_1 = \frac{u^2}{2} \frac{g-1}{c^2}, \quad b_2 = \frac{g-1}{c^2} \quad (4.28)$$

と表すことが出来る。

Symmetric-TVD 法での流束ベクトル $\tilde{E}_{j+1/2}$ の評価は、

$$\tilde{E}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[(E_{j+1} + E_j) + R_{j+1/2} \Phi_{j+1/2} \right] \quad (4.29)$$

であり、ベクトル Φ の各成分をどのように評価するかが Yee の upwind-TVD 法と違っている。Symmetric-TVD 法では、

$$\Phi_{j+1/2}^l = - \left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (c_{j+1/2}^l)^2 \hat{Q}_{j+1/2}^l + \Psi(c_{j+1/2}^l) (\mathbf{a}_{j+1/2}^l - \hat{Q}_{j+1/2}^l) \right] \quad (4.30)$$

ここで、

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{j+1/2} = R_{j+1/2}^{-1} (Q_{j+1} - Q_j) \\ \Psi(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq d \\ (z^2 + d^2)/2d & |z| \leq d \end{cases} \\ d = \max[0, c_{j+1/2}^l - c_j^l, c_{j+1}^l - c_{j+1/2}^l] \end{cases} \quad (4.31)$$

である。ここで、上添え字 l は各成分(固有値)に対応し特性波を意味している。また、 $c_{j+1/2}^l$

は固有値 $(u-c, u, u+c)$ 、 \mathbf{a}_i は特性線を横切る物質量的変化を表している。 $\Psi(z)$ はエント

ロピー補正量(entropy fix)と呼ばれ、通常は特性速度の絶対値 $|z|$ をとる。しかし、 $z=0$ 近

傍では $\Phi^l = 0$ となり、結果、数値流束はただの中心差分となってしまう。そうなると、数値的に不安定を招き、非物理的な解(膨張衝撃波など)を得る恐れがある。それを避けるために用いられている。また、 \mathbf{d} は速度と計算空間での音速の関数で表せる。

$\hat{Q}_{j+1/2}^l$ は各々の特性波に対応した流束制限関数(limiter function)であり、これは、数値粘性をコントロールして、解の振動を抑える働きをするものである。Symmetric-TVD では、すべて $j+1/2$ で評価されている点に特徴があり、制限関数として色々な形のものがあるが、代表的なものとして次のようなものがある。

$$\begin{cases} \hat{Q}_{j+1/2}^l = \text{minmod}\{\mathbf{a}_{j-1/2}^l, \mathbf{a}_{j+1/2}^l, \mathbf{a}_{j+3/2}^l\} \\ \hat{Q}_{j+1/2}^l = \text{minmod}\left\{2\mathbf{a}_{j-1/2}^l, 2\mathbf{a}_{j+1/2}^l, 2\mathbf{a}_{j+3/2}^l, \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{j-1/2}^l + \mathbf{a}_{j+1/2}^l)\right\} \\ \hat{Q}_{j+1/2}^l = \text{sup}b(\mathbf{a}_{j-1/2}^l, \mathbf{a}_{j+1/2}^l) + \text{sup}b(\mathbf{a}_{j+1/2}^l, \mathbf{a}_{j+3/2}^l) - \mathbf{a}_{j+1/2}^l \end{cases} \quad (4.32)$$

ここで、minmod および superbee は次のような関数である。

$$\text{minmod}(x, y) = \text{sgn}(x) \cdot \max\{0, \min(x \cdot \text{sgn}(x), y \cdot \text{sgn}(x))\} \quad (4.33)$$

$$\text{sup}b(x, y) = \text{sgn}(x) \cdot \max\{0, \min(2x \cdot \text{sgn}(x), y \cdot \text{sgn}(x)), \min(x \cdot \text{sgn}(x), 2y \cdot \text{sgn}(x))\} \quad (4.34)$$

TVD スキームはもともとスカラー方程式に対して考えられたものであるから、オイラー方程式のようなシステム方程式に拡張するにはリーマン問題を解く必要がある。ここでは、リーマン問題の解法として、Roe の近似解法を用いた。Roe の近似リーマン解法では、リーマン問題における3つの波(衝撃波、接触面、膨張波)をすべて不連続面としてとらえ、その両側の物理量がランキンユゴニオ(Rankin-Hugoniot)の関係式を満たすように流束ヤコビアンを平均化している。これが Roe 平均と呼ばれるものである。

(4.24)式の $j+1/2$ の添え字の量、 $c_{j+1/2}^l$ の固有値などは Roe の平均を用いて評価される。

1次元のオイラー方程式の場合、速度、エンタルピー、音速の Roe の平均は、

$$\mathbf{r}_{ave} = \sqrt{\mathbf{r}_L \mathbf{r}_R} \quad (4.35)$$

$$u_{ave} = \frac{\sqrt{r_L}u_L + \sqrt{r_R}u_R}{\sqrt{r_L} + \sqrt{r_R}} = \frac{u_L + D \cdot u_R}{1 + D} \quad (4.36)$$

$$H_{ave} = \frac{\sqrt{r_L}H_L + \sqrt{r_R}H_R}{\sqrt{r_L} + \sqrt{r_R}} = \frac{H_L + D \cdot H_R}{1 + D} \quad (4.37)$$

$$c_{ave}^2 = (g-1) \left(H_{ave} - \frac{1}{2}u_{ave}^2 \right) \quad (4.38)$$

として得られる。ただし、 $D = \sqrt{r_R/r_L}$ である。

時間積分

$$\frac{\partial u}{\partial t} = E \quad (4.39)$$

の方程式の時間積分を考える。

時間陽解法

発展問題において、あるレベルでの数値解が既知であるときに、次のレベルでの数値解を求めようとする差分式のなかに、未知の項がただひとつしかあられないものを陽解法という。時間発展問題なら、 $n+1$ ステップでの個々の空間格子点での未知数が、 $n+1$ ステップでの他の格子点での解にかかわりなく、 n ステップでの既知の値でのみ記述できるものを意味する。

代表的なものは、時間方向に前進差分をとる方法で、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad (4.40)$$

とし、(4.39)式の右辺を n ステップで評価する。つまり、

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = E^n \quad (4.41)$$

とすることで、 n ステップが既知なら、 $n+1$ ステップを計算できる。

時間陰解法

計算しようとする時刻 $n+1$ の未知数を 2 つ以上持つスキームを陰解法と呼ぶ。代表的なものは、時間差分には前進差分をとり、右辺を $n+1$ ステップで評価する。つまり、

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = E^{n+1} \quad (4.42)$$

として、さらに右辺を時間で展開することで、

$$E^{n+1} = E^n + \frac{\partial E^n}{\partial t} \Delta t \quad (4.43)$$

また、

$$\frac{\partial E^n}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial E^n}{\partial u} = \Delta u A^n \quad (4.44)$$

ここで、 $A = \frac{\partial E}{\partial u}$ はシステム方程式ではヤコビアン行列となる。また、 $\Delta u = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$ と表せるので、(4.42)式は、

$$(1 - A^n \Delta t) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = E^n \quad (4.45)$$

と表せる。

(4.45)式の右辺は陽解法での評価であり、右辺の前の $(1 - A^n \Delta t)$ の逆行列を左からかければ、

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = (1 - A^n \Delta t)^{-1} E^n \quad (4.46)$$

こうしてnステップでの値を用いてn+1ステップの値を求めることができるようになった。

一温度モデル

時間方向の積分には Euler 陽解法を用いた。

二温度モデル

電子のエネルギー式の時間積分は生成項のジュール加熱による寄与が大きいため時間陰解法を用いた。

4.3 計算条件

4.3.1 条件と3章との違い

一温度と二温度で計算条件は変えない。

3章でのMHD加速の条件を踏まえつつ条件設定をするものとする。

ここで、3章との違いを明確にしておきたい。

- 電磁場を磁場と負荷率 K を固定することによって決めるのではなく、電場、磁場を固定することにする
- 電気伝導度 s の値を入り口条件で固定せず、流路にそって変化させる(ただし、電離度は一定)

つまり、前者では3章の簡易計算では有る条件(流速が速くなればそれだけ強い電磁場をかける)で制限してダクト全域で加速するように考えていた拘束条件をはずしたわけである。また3章ではダクト入り口条件に依っていた電気伝導度の式を流路で分布を持つようにし

てどのような変化が表れるのかも見る。電気伝導度の評価の仕方は第 2 章に記述した。

4.3.2 モデル風洞の概要

計算領域は図 4-1 のような領域である。

加速器外形

ノズル、MHD 加速器の外形の寸法は以下のように定める。これは上流に付くプラズマ生成器(図 4-2 及び[7])の外形寸法に合うように決定したものである。

断面積は、スロート部の断面積に応じて変化させるが、基準状態の貯気槽状態の時の断面積、ダクト径は表 4-2 のようになる。

表 4-1 MHD 加速器及びノズル長さ

nozzle1	0.20[m]
MHD加速器	0.10[m]
nozzle2	0.20[m]

表 4-2 MHD 加速器外形

width	0.03[m]
Area	10[cm ²]

貯気槽条件

貯気槽条件はプラズマ生成器(ICP 風洞など)の条件を用いた。また、ノズルスロート直下のマッハ数を与えることでノズル部分から計算する。

表 4-3 貯気槽条件及びノズルスロート直下マッハ数

P0	5000[Pa]
T0	5000[K]
Mach number	1.05

下流は超音速流出を仮定する。

初期条件

初期条件としてノズルで加速する準一次元流れを計算し、定常状態になった所で MHD ダクト部分に電磁場をかけることとする。これは計算上の不安定要素を取り除くこともあるが、実際の風洞で用いる場合には、まず流体を流し、その流れが定常になったところで MHD 加速器を用いることが考えられるからである。

境界条件

境界条件として、上流は、

- 貯気槽条件(貯気槽から等エントロピー膨張加速してノズルのスロート直下に行くものとする)

- 入り口条件(マッハ数)としてノズルのスロート直下の値を用いる

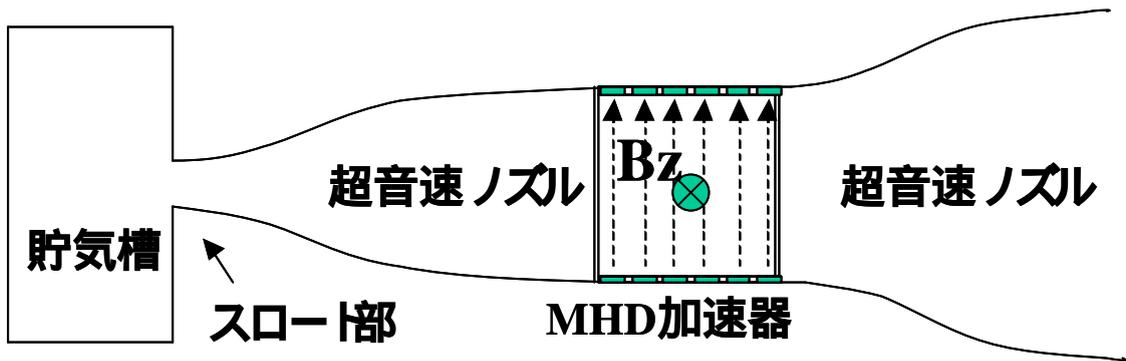


図 4-1 計算領域概念図

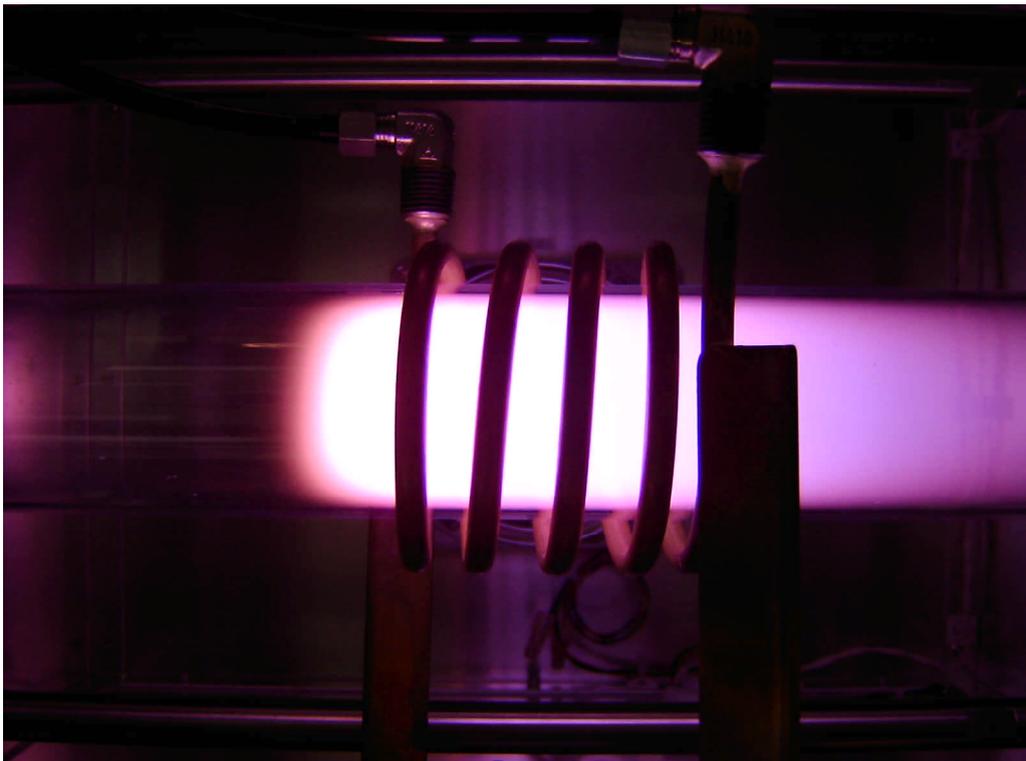


図 4-2 ICP 風洞

第5章 二次元流モデルによる数値解析

5.1 基礎方程式

本章での解析の対象となる保存形の二次元流一流体モデルは、次のように書き表すことができる。

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t^*} + \frac{\partial E^*}{\partial x^*} + \frac{\partial F^*}{\partial y^*} = S^* \quad (5.1)$$

ここで Q^* は保存量ベクトル、 E^* 、 F^* は流束ベクトル、 S^* は生成項であり、これらの成分は以下の通りである。

$$Q^* = [r^*, r^* u^*, r^* v^*, e^*]^T \quad (5.2)$$

$$E^* = \begin{bmatrix} r^* u^* \\ p^* + r^* u^{*2} \\ r^* u^* v^* \\ (e^* + p^*) u^* \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$F^* = \begin{bmatrix} r^* v^* \\ r^* u^* v^* \\ p^* + r^* v^{*2} \\ (e^* + p^*) v^* \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$S^* = \begin{bmatrix} 0 \\ F_x^* \\ F_y^* \\ Q_{joul}^* \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

また、生成項の具体的な値は以下のようになる。

$$\begin{aligned} F_x^* &= (\mathbf{j}^* \times \mathbf{B}^*)_x \\ F_y^* &= (\mathbf{j}^* \times \mathbf{B}^*)_y \\ Q_{joul}^* &= \mathbf{j}^* \mathbf{E}^* \end{aligned} \quad (5.6)$$

また完全気体の状態方程式、

$$p^* = r^* R^* T^* \quad (5.7)$$

$$R^* = 287 \left[\frac{J}{(kg \cdot K)} \right] \text{ (Air)} \quad (5.8)$$

を用いて系は閉じる。

無次元化

流入条件の値で無次元化を行う。つまり、物体代表長さ L 、一様流速度 U_∞ 、一様流温度 T_∞ 、一様流密度 r_∞ を用いて流体方程式の無次元化を行う。

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L}, \quad t = \frac{t^*}{(L/U_\infty)}, \quad u = \frac{u^*}{U_\infty}, \quad v = \frac{v^*}{U_\infty}, \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}^*}{r_\infty}, \quad T = \frac{T^*}{T_\infty}, \quad p = \frac{p^*}{(r_\infty U_\infty^2)},$$

$$e = \frac{e^*}{(r_\infty U_\infty^2)}, \quad R = \frac{R^*}{(U_\infty^2/T_\infty)}, \quad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{s}^*}{\mathbf{s}_\infty}, \quad B = \frac{B^*}{B_\infty}, \quad j = \frac{j^*}{(\mathbf{s}_\infty B_\infty U_\infty)}$$

さらに、次の2つの無次元量を定義しておく。

$$R_m = m_\infty \mathbf{s}_\infty U_\infty L, \quad R_p = \frac{B_\infty^2}{m_\infty r_\infty U_\infty^2} \quad (5.9)$$

R_m は磁気レイノルズ数、 R_p は磁気圧力数と呼ばれる。

磁気レイノルズ数は磁場の拡散減衰と磁場の凍結の比を表しており、 $R_m \gg 1$ の場合には、流れは磁場に対して「凍結」していると言い、速度場と磁場が一体となって運動する。逆に $R_m \ll 1$ の場合には、流体の流れに対して電磁場の拡散速度が大きく、漏洩のある流れとなる。本計算の対象としている流れは $R_m \ll 1$ である。磁気圧力数 R_p は動圧に対する磁気

圧力の比である。ここで、磁気圧力は $\frac{1}{2} \frac{B^2}{m}$ で表せる。

以上より、無次元化された二次元一流体モデル基礎方程式は、次のようになる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = S \quad (5.10)$$

$$Q = [r, ru, rv, e]^T \quad (5.11)$$

$$F = [ru, p + ru^2, ruv, (e + p)u]^T \quad (5.12)$$

$$G = [rv, ruv, p + rv^2, (e + p)v]^T \quad (5.13)$$

$$S = [0, F_x, F_y, Q_{joul}] \quad (5.14)$$

ここで、生成項の具体的な値は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} F_x &= R_p \text{Rm}(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x \\ F_y &= R_p \text{Rm}(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_y \\ Q_{joul} &= R_p \text{Rm} \mathbf{jE} \end{aligned} \quad (5.15)$$

また状態方程式は無次元の気体定数 $R = 1/gM_\infty^2$ を用いて、

$$p = rRT \quad (5.16)$$

5.2 数値解析法[11]

多次元に拡張するための方法として、局所的に一次元に分割する概念 - 時間分割法 (fractional step) - を用いる方法を用いた。これを以下に説明する。

今簡単のために、二次元オイラー方程式

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (5.17)$$

を考える。

この時、次のように時間分割を考える。

第一段階： $Q^{n+1/4}$ は以下の関係を用いて Q^n から計算される。

$$Q_t + E_x = 0 \quad \frac{1}{2} \Delta t \text{ステップ} \quad (5.18)$$

第二段階： $Q^{n+3/4}$ は以下の関係を用いて $Q^{n+1/4}$ から計算される

$$Q_t + F_y = 0 \quad \Delta t \text{ステップ} \quad (5.19)$$

第三段階： Q^{n+1} は以下の関係を用いて $Q^{n+3/4}$ から計算される

$$Q_t + E_x = 0 \quad \frac{1}{2} \Delta t \text{ステップ} \quad (5.20)$$

このオペレータ分割によって時間 2 次精度が実現できる。

ここで、対流項の評価は次元と同じく Yee の symmetric-TVD[12]を用いるのであるが、その主だった説明は第 4 章にある。

ここでは、ヤコビアン行列、固有値行列、固有値ベクトル行列について書いておく。

× 方向流束ヤコビアン行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(\mathbf{g}-3)}{2}u^2 + \frac{(\mathbf{g}-1)}{2}v^2 & -(\mathbf{g}-3)u & -(\mathbf{g}-1)v & (\mathbf{g}-1) \\ -uv & v & u & 0 \\ -\mathbf{g}u\frac{e}{\mathbf{r}} + (\mathbf{g}-1)uq^2 & \mathbf{g}\frac{e}{\mathbf{r}} - \frac{(\mathbf{g}-1)}{2}(2u^2 + q^2) & -(\mathbf{g}-1)uv & \mathbf{g}u \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$q^2 = (u^2 + v^2) \quad (5.22)$$

$$H = \frac{e + p}{\mathbf{r}} \quad (5.23)$$

× 方向固有値

$$\Lambda_x = \text{diag} [u - c, u, u + c, u] \quad (5.24)$$

× 方向右固有値行列

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u - c & u & u + c & 0 \\ v & v & v & 1 \\ H - cu & \frac{1}{2}(u^2 + v^2) & H + cu & v \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

× 方向左固有値行列

$$R_x^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(b_1 + \frac{u}{c}\right) & \frac{1}{2}\left(-b_2u - \frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}(-b_2v) & \frac{b_2}{2} \\ 1-b_1 & b_2u & b_2v & -b_2 \\ \frac{1}{2}\left(b_1 - \frac{u}{c}\right) & \frac{1}{2}\left(-b_2u + \frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}(-b_2v) & \frac{b_2}{2} \\ -v & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$b_1 = b_2 \frac{u^2 + v^2}{2}, b_2 = \frac{\mathbf{g}-1}{c^2} \quad (5.27)$$

y 方向流束ヤコビアン行列

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -vu & v & u & 0 \\ \frac{(\mathbf{g}-3)}{2}v^2 + \frac{(\mathbf{g}-1)}{2}u^2 & -(\mathbf{g}-1)u & -(\mathbf{g}-3)v & (\mathbf{g}-1) \\ -\mathbf{g}v\frac{e}{r} + (\mathbf{g}-1)vq^2 & -(\mathbf{g}-1)uv & \mathbf{g}\frac{e}{r} + \frac{(\mathbf{g}-1)}{2}(2v^2 + q^2) & \mathbf{g}v \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

y 方向固有値

$$\Lambda_y = \text{diag}[v-c, v, v+c, v] \quad (5.29)$$

y 方向右固有値行列

$$R_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ u & u & u & 1 \\ v-c & v & v+c & 0 \\ H-cv & \frac{1}{2}(u^2 + v^2) & H+cv & u \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

y 方向左固有値行列

$$R_y^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(b_1 + \frac{v}{c}\right) & \frac{1}{2}(-b_2u) & \frac{1}{2}\left(-b_2v - \frac{1}{c}\right) & \frac{b_2}{2} \\ 1-b_1 & b_2u & b_2v & -b_2 \\ \frac{1}{2}\left(b_1 - \frac{v}{c}\right) & \frac{1}{2}(-b_2u) & \frac{1}{2}\left(-b_2v + \frac{1}{c}\right) & \frac{b_2}{2} \\ -u & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

となる。

セルインターフェイスでの数値流束を計算する時の方法として一次元の時と同様に Roe 平均を用いる。

二次元のオイラー方程式の場合、Roe の平均は

$$\mathbf{r}_{ave} = \sqrt{\mathbf{r}_L \mathbf{r}_R} \quad (5.32)$$

$$u_{ave} = \frac{u_L + Du_R}{1 + D} \quad (5.33)$$

$$v_{ave} = \frac{v_L + Dv_R}{1 + D} \quad (5.34)$$

$$H_{ave} = \frac{H_L + DH_R}{1 + D} \quad (5.35)$$

$$c_{ave}^2 = \left(1 - \frac{g}{\rho}\right) H_{ave} - \frac{1}{2}(u_{ave}^2 + v_{ave}^2) \quad (5.36)$$

ただし、

$$D = \sqrt{\frac{\mathbf{r}_R}{\mathbf{r}_L}} \quad (5.37)$$

この Roe 平均を用いてセルインターフェイスでの数値流束を計算する[10][11]。

5.3 計算条件

図 5-1 のような矩形 MHD ダクトを対象として考える。ここで、諸条件は、MHD ダクト外形、気流条件ともに第 4 章の条件とほぼ同じとなるように考えた。つまり、以下の通り。

ノズル、MHD 加速器の外形の寸法は以下のように定める。

表 5-1 MHD 加速器外形

Length	0.10[m]
Width	0.03[m]
Height	0.03[m]

初期条件

初期条件として定常流を考え、その後 MHD ダクト部分に電磁場をかけることとする。

境界条件

境界条件として、上流は、

- 貯気槽条件(貯気槽から等エントロピー膨張加速してノズルのスロート直下に行くものとする)
- MHD 加速器入り口マッハ数を固定する

それぞれ具体的には以下の値。

表 5-2 貯気槽条件及び MHD 加速器入り口マッハ数

P0	5000[Pa]
T0	5000[K]
Mach number	2.0

下流は超音速流出を仮定する。

以上の条件下で電磁場を変化させた時にどのような変化をするかを見る。

また、流入速度の方向を変化させた時に、どのような変化をするか見る。この時の流入速度の与え方として、ノズルで膨張加速してきたものとして、端で速度の 10%が外側方向に向かっている場合を考えた。(図 5-2)

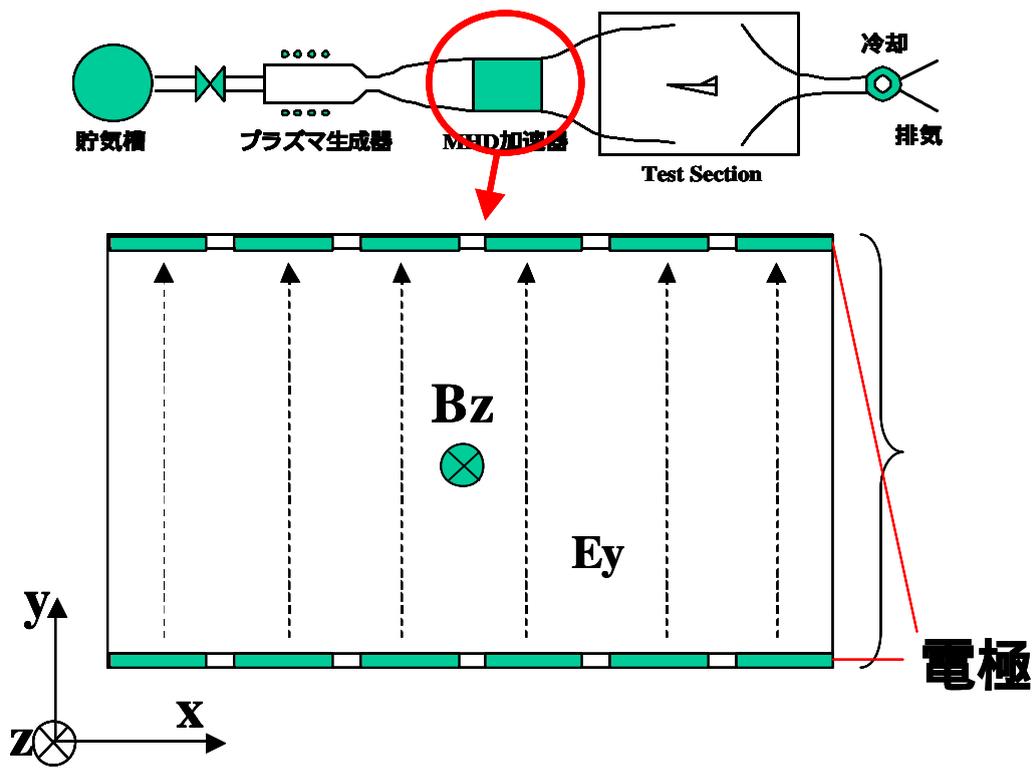


図 5-1 MHD 加速器概念図

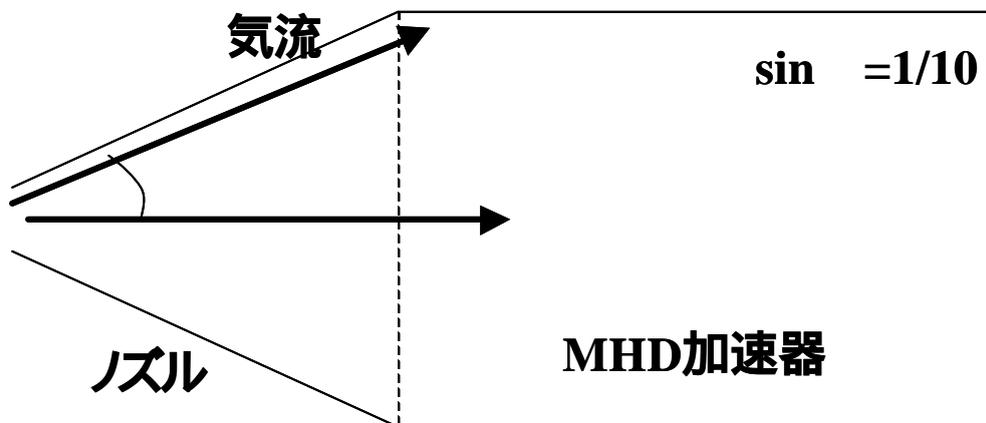


図 5-2 気流変化条件

第6章 結果

6.1 一次元流モデルによる数値解析結果(各種モデル評価)

6.1.1 一温度モデル

等エントロピーで貯気槽から流れてくるようなモデルを考えているので、貯気槽条件を変化させなければ断面積変化は変わらない。基準条件の断面積変化の図は図 6-1 に示している。この条件下で、磁場 B と電場 E (電位 V) を変化させた時の結果を次に示す。

一温度モデルで、磁場 $B = 0.10 - 1.0 [\text{Tesla}]$ の範囲で $0.1 [\text{Tesla}]$ ずつ変化させ、
 $E = 10.0 - 150 [\text{V}]$ で $10 [\text{V}]$ ずつ変化させ加速条件を満たすところを探した。

図 6-2 に加速条件を示した。赤の部分が適正加速に近い部分である。ここで言う適正加速とは、MHD ダクト入り口付近で急激に速度増分を得るのではなく、なだらかに変化する加速のことを言っている。

典型的なものをいくつか示す。

・ $B = 0.10 [\text{Tesla}], V = 10 [\text{V}]$ の時は図 6-3 に示す。

この時、加速はしているが加速度は小さく、なだらかに加速している様子がわかる。

・ $B = 0.60 [\text{Tesla}], V = 20 [\text{V}]$ の時は図 6-4 に示す。

この時、電流値 $s(E_y - uB)$ が逆側に流れ、減速している様子がわかる。

・ $B = 0.70 [\text{Tesla}], V = 40 [\text{V}]$ の時は図 6-5 に示す。

ほとんど加速していない様子である。

・ $B = 0.8 [\text{Tesla}], E = 100 [\text{V}]$ の時は図 6-6 に示す。

加速がダクト入り口からすぐ入った所で終わっている様子。この時、温度も急激に上がっていることに気が付く。

考察

- ・ 一温度モデルにおいて MHD 加速には大きく分けて 2 種類の加速があることがわかる。最初の部分で加速が終了してしまい、頭打ちになってしまうもの

これは、 $s(E_y - uB)$ を満たすある一定流速 u まで到達してしまうと、それ以降は電流が流れず、そのためその流速 u で一定値になってしまうわけである。

加速がダクト内で持続している場合

この場合 $s(E_y - uB)$ を満たす有る一定流速 u に達しないために加速を続けることから加速が持続しているのである。

の場合は電場 E_y が大きすぎるか B が小さすぎるわけであり、ダクト長さに最適な電磁場というものが存在することがわかる。逆にいえば、電磁場に最適なダクト長さが存在するわけである。

- ・ また磁場を固定して電場のみを強くした時、ある一定レベルを超えると温度に投入される。

第3章との比較

第3章で扱った MHD 加速は MHD ダクト内で加速し続けるというモデルであった。これは、 $K = \frac{E}{uB}$ を固定としたのだから、 B が決まれば、その時の速度に依るように電場を調節することで加速し続けるというモデルである。実際の風洞ではそのような操作を行うことは困難であると考えられる。しかし、変化量が小さければこのモデルと次元一流体モデルは同じであるから、微小区間、変化の少ない(投入電力、電磁場が小さい)ような時は第3章の MHD 加速と合致していると思われる。

6.1.2 二温度モデル

- ・ $B=0.8[\text{Tesla}]$ $E=45[\text{V}]$ の時

2 温度モデルで解いたものが図 6-7-1 に示し、1 温度モデルで解いたものを図 6-7-2 に示した。

考察

- ・ 二温度モデルにおいて MHD ダクトの最初において加速が終了している解が出る

図 6-7-1 と図 6-7-2 を見比べると少し分かりづらいが、1 温度モデルに比べて 2 温度モデルの方は加速領域(区間)が前に移動し、より短い距離で加速している。

これについての考察をしてみたい。

まず、一様流速を持っている気体が MHD 加速器に入った時に電磁場がかかると電流

$s(E_y - uB)$ が流れる。この時、最初は全体的に同じ大きさの電流が流れる。この電流のために、次の瞬間には流体の速度が加速されるわけである。

ここで、MHD 加速器に入ってくる流体の速度は一定であり、従って、速度 u に分布ができ、電流値 $s(E_y - uB)$ は MHD 入り口から下流に向け勾配を持つことになる。従って、MHD

加速器の最初の部分というのは、局所的に見ると第 3 章で考えたパラメータ K の値が大きい区間であるといえる。つまり、ジュール加熱がここで大きいわけである。

ここで、二温度モデルではジュール加熱の部分を電子がすべて一旦受け取り、電子温度として持った後に緩和過程で重粒子のエネルギーとして緩和していく過程を仮定していた。

そのため、発生したジュール加熱は一旦電子のエネルギーとなり、電子温度が上がることになる。重粒子との緩和過程が穏やかに起こると考えれば、電子温度によって電気伝導度 s の値が大きくなる。電気伝導度 s が電子温度によって大きくなり続けるものとモデル化しているためである。このため、より加速器入り口で電流が流れやすくなり、そのため、ジュール加熱が増える。また、後方部分に行くまでに $E_y - uB$ となる u となってしまうと、そ

れ以降電流が流れなくなり、つまりジュール加熱も受けなくなる。このため、さらに急峻な勾配となっていってしまうわけである。

ジュール加熱を一旦電子が全て受けるというモデルでは電子温度が上がり過ぎ、本研究の対象としている現象を捉えられていない可能性もある。

化学反応モデル

図.6-8 に $B=0.8[\text{Tesla}]$ $V=45[\text{V}]$ の時の結果を示す。

ピークの値は下がり全体的に少しなだらかな様子になっていることがわかる。しかしながら、MHD 加速器入口で急に電子温度が上がるという全体の傾向は変わらず、そのため、速度変化の図には影響が及ぼされない。

従って、化学反応により MHD 加速現象を変えてしまうところまで影響は大きくないものと考えられる。

熱伝導モデル

図.6-9 に $B=0.8[\text{Tesla}]$ $V=45[\text{V}]$ の時の結果を示す。

電子温度に目に見えるような変化は見られなかった。これは、本研究が対象としている流れの速度が速く、熱伝導による効果が相対的に小さくなってしまった為だと考えられる。

従って、熱伝導モデルによる効果は本研究では軽微であると考えられる。

電子 - 電子励起エネルギーモデル

$B=0.6[\text{Tesla}]$ $E=40[\text{V}]$ の時を挙げる。

この時、一温度では、図 6-10-1 に示されるのに対して、このモデルでは図 6-10-2 のように

なる。電子温度が変化せず、現象自体は一温度モデルとほとんど変わらない結果となった。

考察

二温度モデルの時の考察の所で、自由電子にジュール加熱を全部一旦受けさせて、そこから重粒子エネルギーに交換していくというモデルでは電子温度が不必要に大きくなる可能性があることに言及した。対して、電子-電子励起エネルギーモデルでは電子温度がほとんど変化せず、速度変化の図は一温度モデルと変わらない、つまり一温度モデルで本研究の現象が近似できるとの結果になった。電子-電子励起エネルギーモデルでは、重粒子が受け取るエネルギーが大きいわけである。これは、どちらが正しいのか更なる検討が必要で、もし双方ともに現象を正確に表していないのであれば、ジュール加熱を受け取る比率を決定するなどの新たなモデルの構築が必要であるといえる。

6.2 二次元一流体モデルによる数値解析結果

二次元一流体モデルによる数値解析結果を次に示す。

$B=0.8[\text{Tesla}]$ $E=100[\text{V}]$ の時の様子を図 6-11-1、図 6-11-2 に示す。

一次元一流体モデル(図 6-6)と比べてほぼ同じ結果が出ている。MHD 加速器入り口付近で加速が終わっているのがわかる。

$B=0.4[\text{Tesla}]$ $E=30[\text{V}]$ の時の様子を図 6-12-1、図 6-12-2 に示す。

一次元流体モデルの場合を図 6-12-3 に示す。MHD 加速器入り口から出口までなだらかに加速している様子がわかる。

考察

- ・ 双方ともに一次元一流体モデルとほぼ同じような結果が出ていることが分かる。
- ・ 流入条件を変化させた場合 には速度変化が急激であるため、流入速度による擾乱が見えにくくなっている。さらに、加速度も大きいいため、下流では整った流れになっている。電流の図(図 6-11-2(c))を見ると、MHD 加速器入り口の付近にだけ電流が流れていることがわかる(下流の電流はほとんど流れていない)。つまり、この付近だけで加速を終えていることが見て取れる。
- ・ においてはなだらかな加速を行っているため、擾乱による影響が見えやすい。加速度も比較的小さいので、下流まで何らかの影響が残っているのがわかる。また、電流の図(図 6-11-2(c))を見ると(図 6-11-1(c)と比較)ダクト内全域で電流が流れており、流入条件の違いによる乱れが下流まで見られるのがわかる。しかしながら、加速のおおまかな様子は一次元とほぼ変わりないと考えられる。(電流もほぼ垂直に走っている)
- ・ 以上から、非粘性二次元計算では、一次元計算と同じ傾向の結果が得られることがわか

った。

- ・ また、MHD 加速入口における入射条件の違いによって起こる MHD 加速器後方の擾乱は比較的小さく、整った流れになっている。

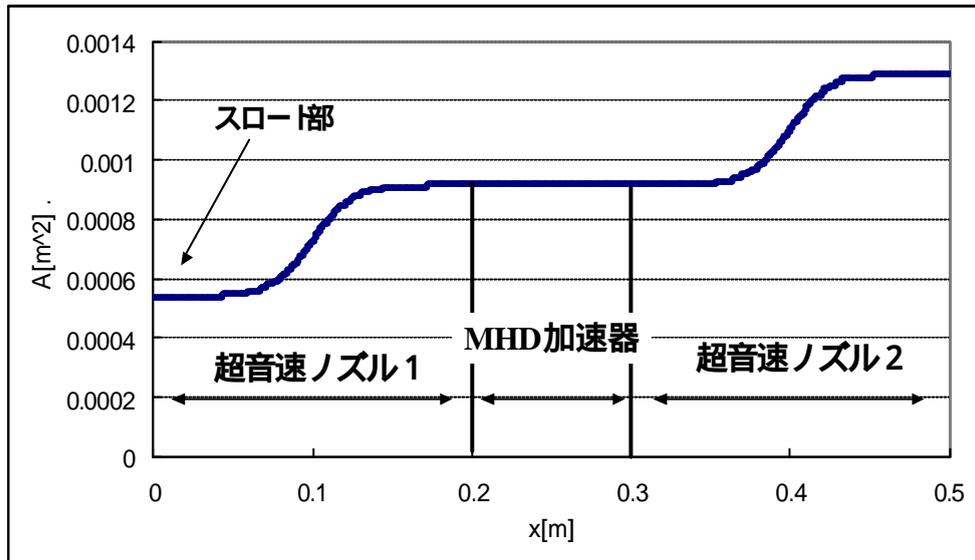


図 6-1 断面積変化

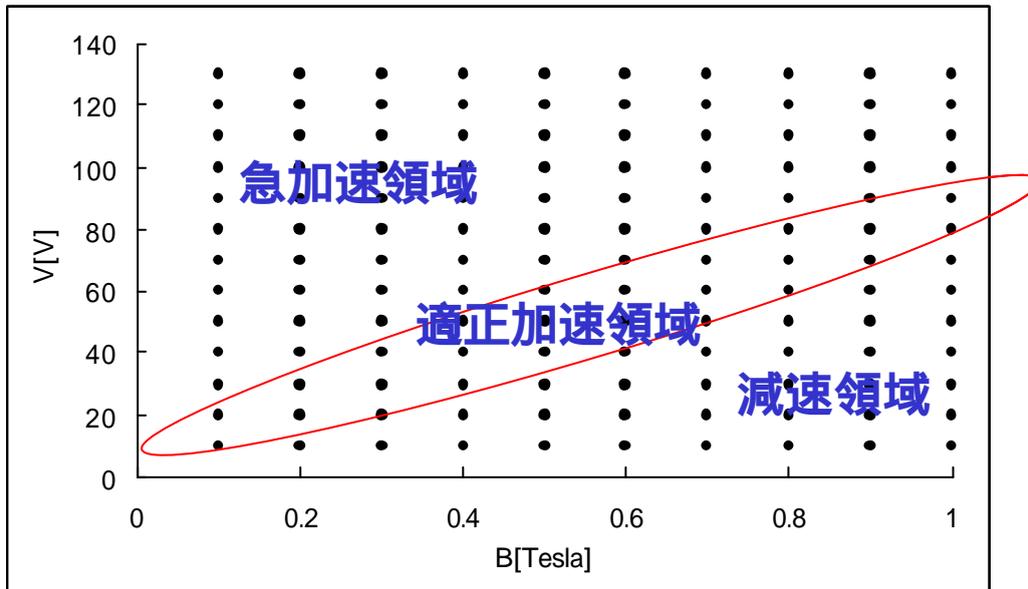


図 6-2 MHD 加速

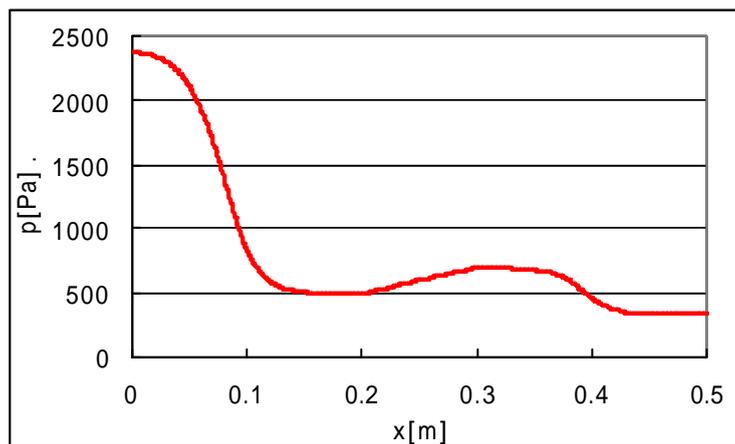
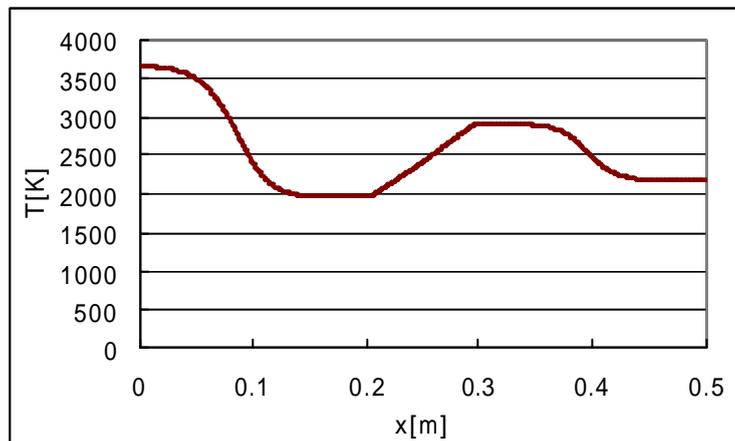
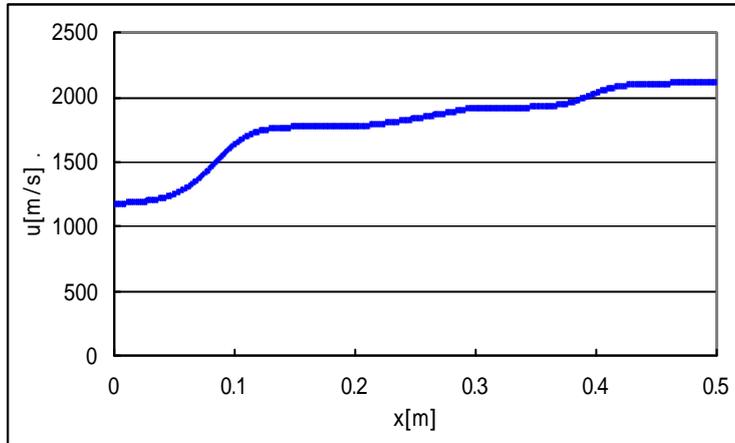


図 6-3 B=0.1[Tesla] E=10[V]の時の各値の変化の様子
上から順に(a)速度変化(b)温度変化(c)圧力変化

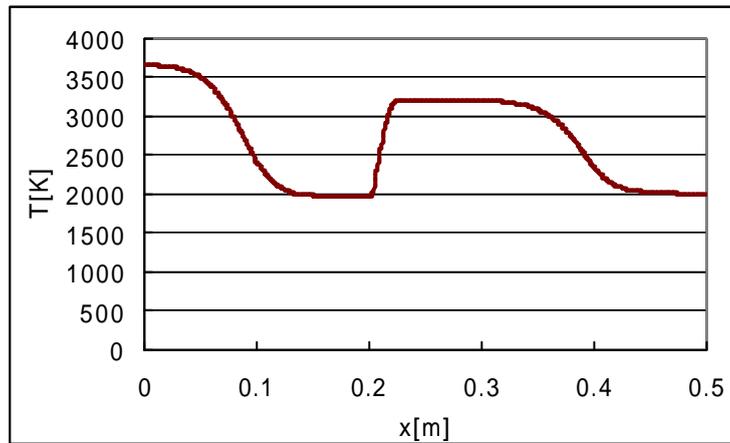
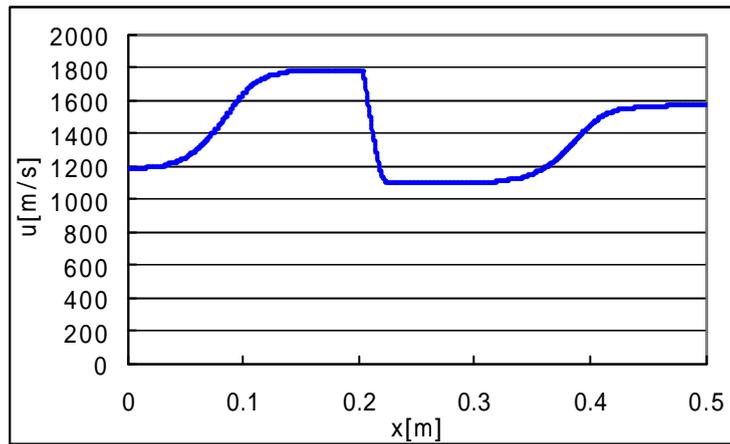


図 6-4 $B=0.6[\text{Tesla}]$ $E=20[\text{V}]$ の時の各値の変化
上から順に(a)速度変化(b)温度変化

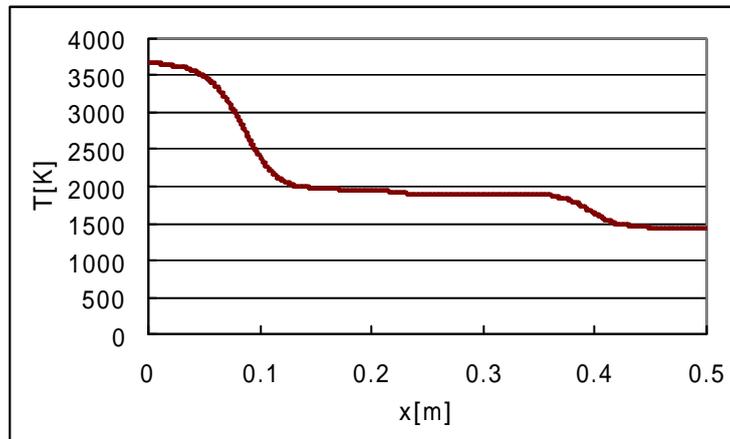
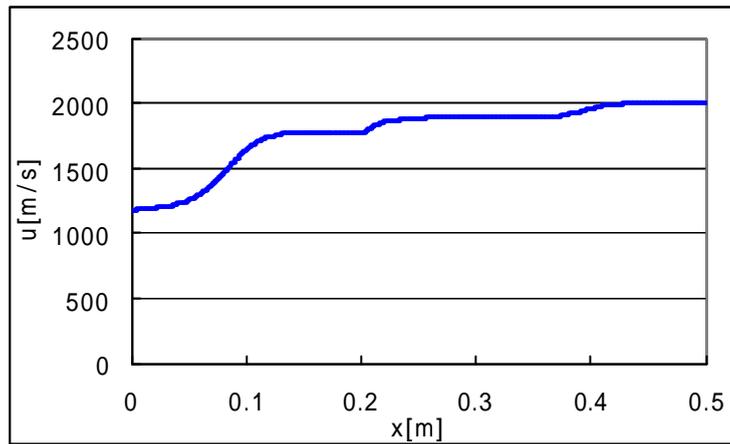


図 6-5 $B=0.7$ [Tesla] $E=40$ [V]の時の各値の変化
上から順に(a)速度変化(b)温度変化

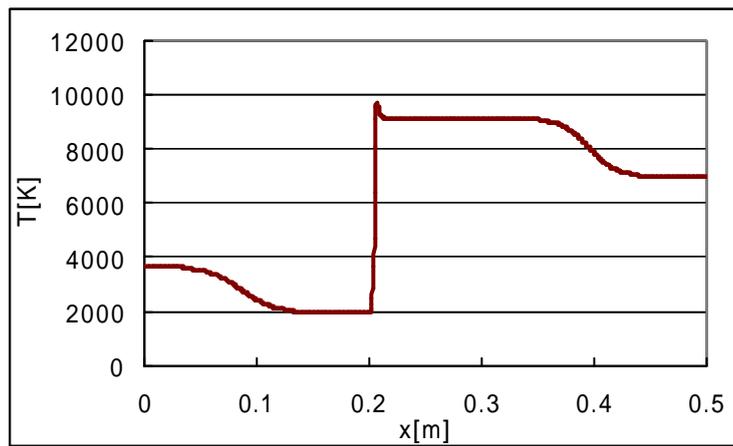
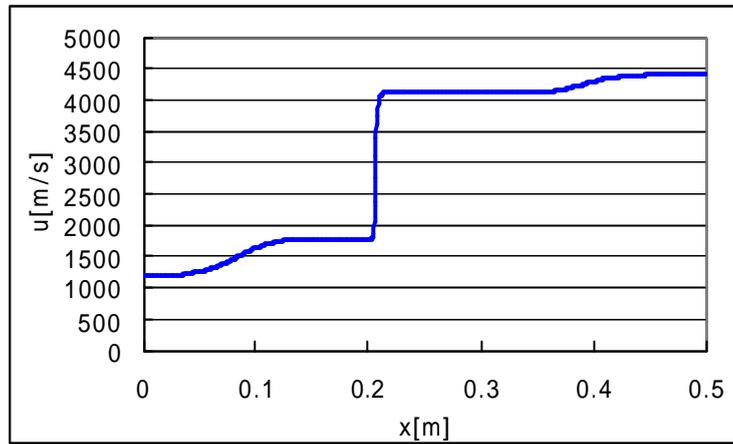


図 6-6 $B=0.8[\text{Tesla}]$ $E=100[\text{V}]$ の時の各値の変化
上から順に(a)速度変化(b)温度変化

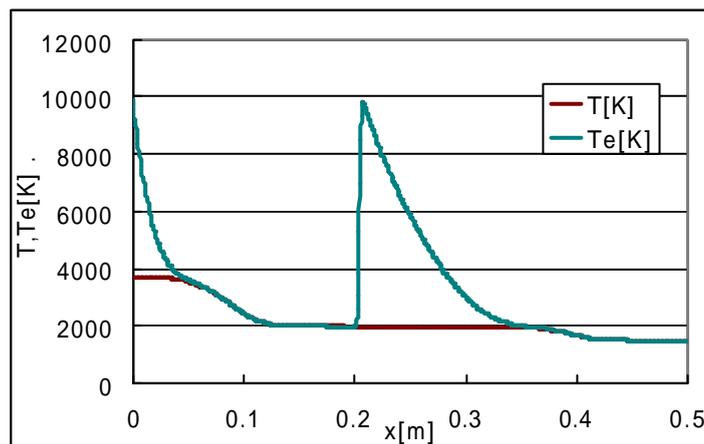
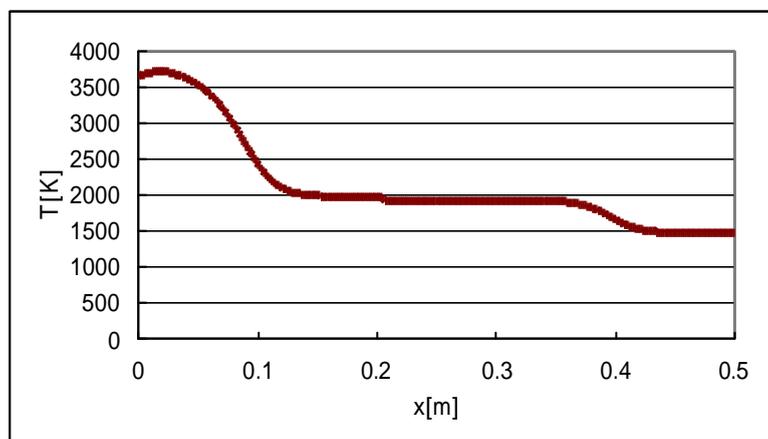
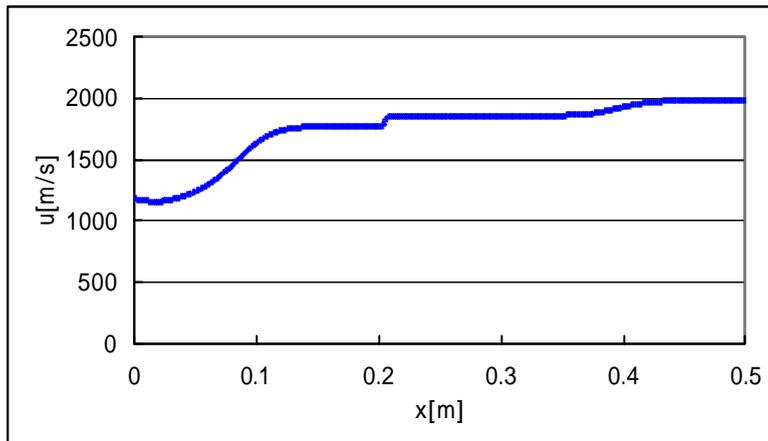


図 6-7-1 2 温度モデルで解いた場合

$B=0.8[\text{Tesla}]$ $E=45[\text{V}]$

上から順に(a)速度変化(b)温度変化(重粒子)(c)電子温度と重粒子温度変化

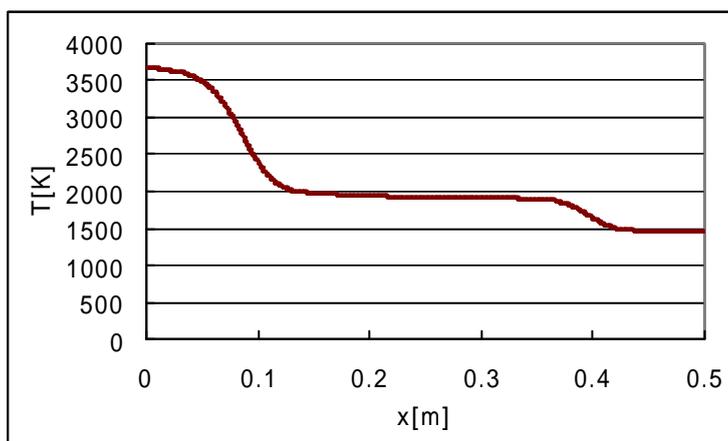
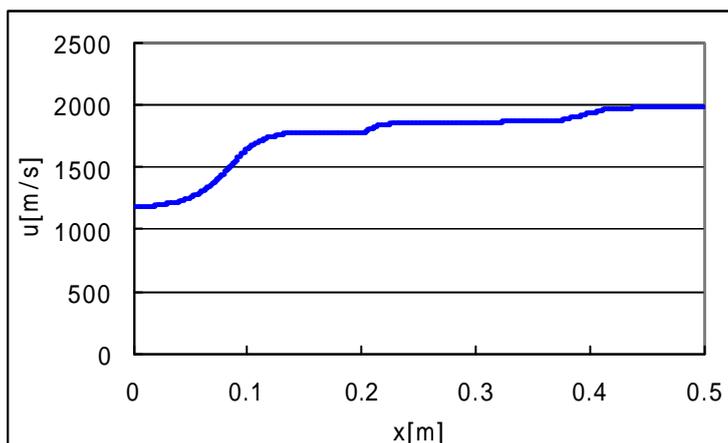


図 6-7-2 同条件下において一温度で解いた場合
(a) 速度変化(b)温度変化

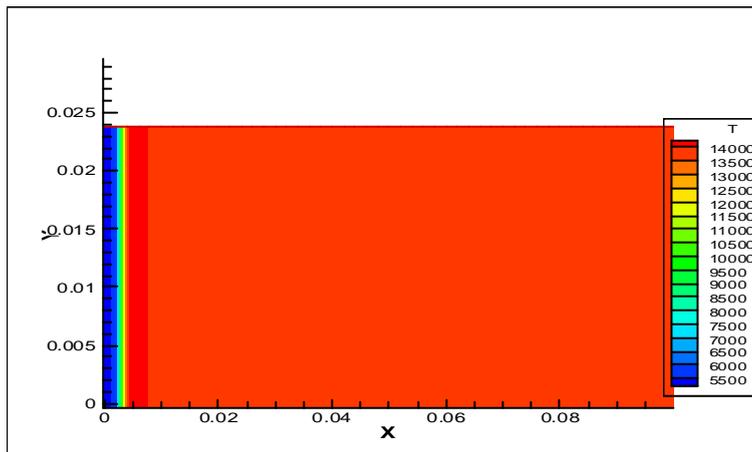
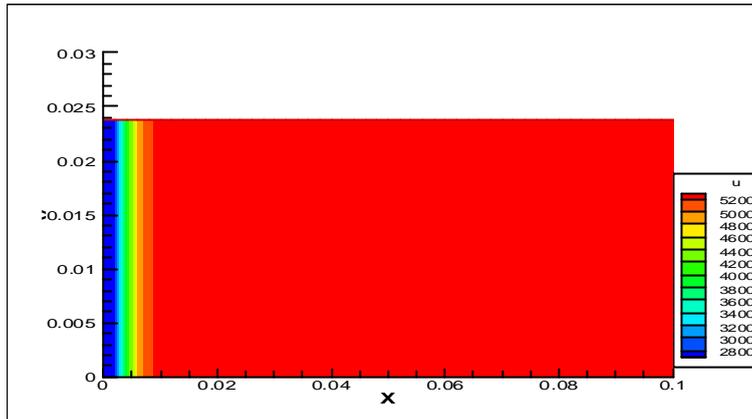


図 6-8-1 $B=0.8[\text{Tesla}]$ $E=100[\text{V}]$ の時
上から(a)速度(b)温度

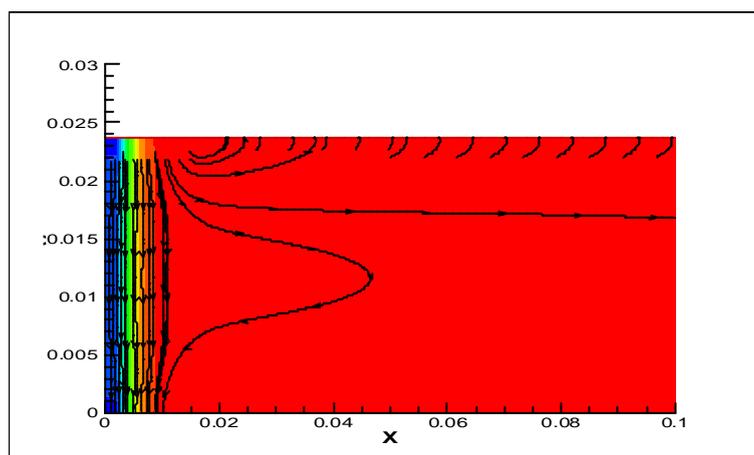
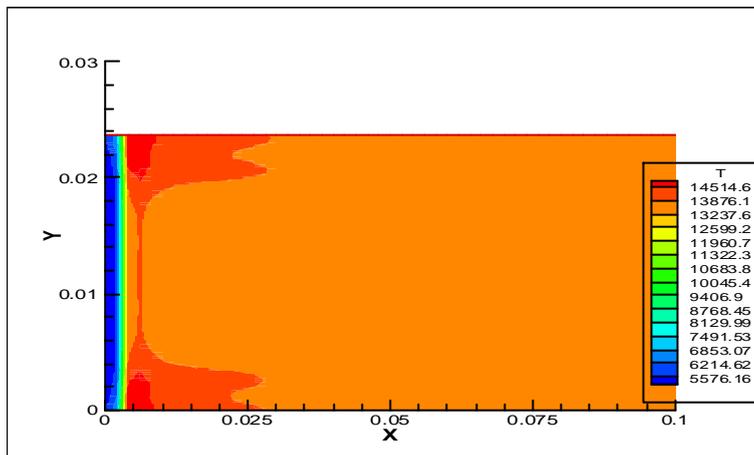
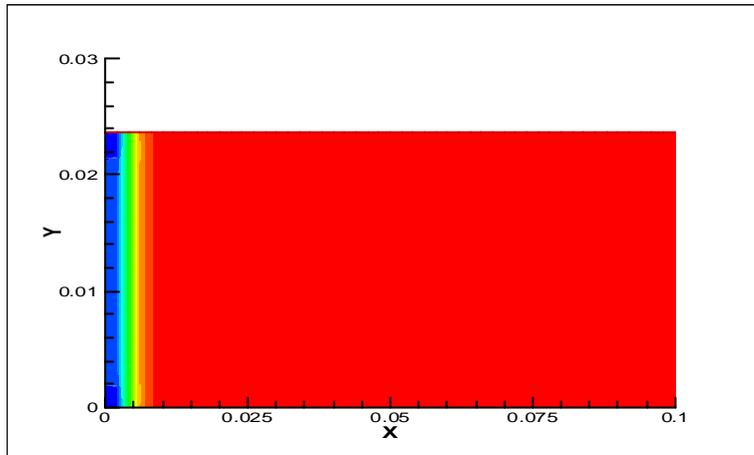


図 6-8-2 B=0.8[Tesla] E=100[V]の時
(a)速度(b)温度(c)電流方向

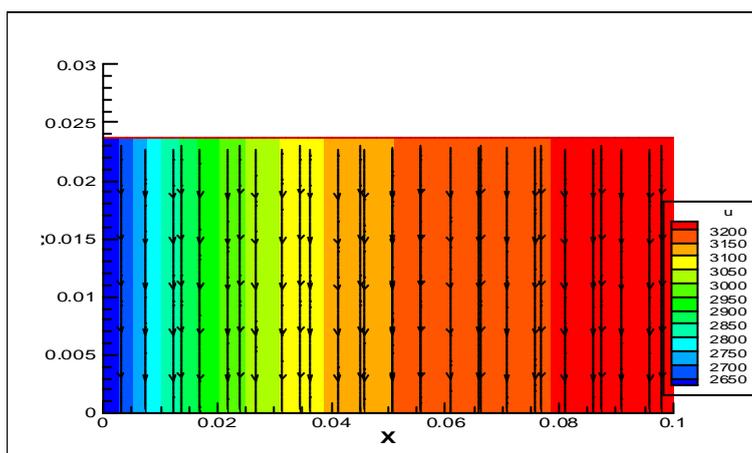
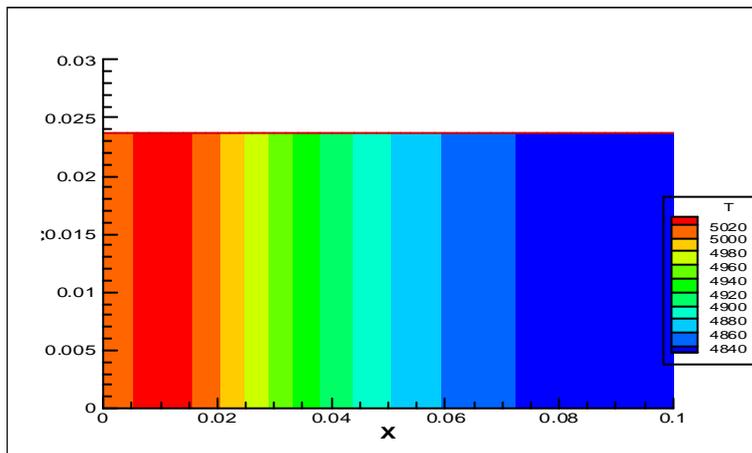
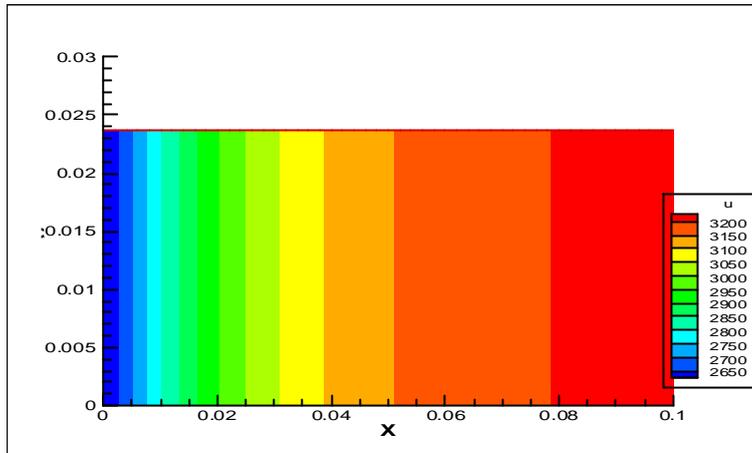


図 6-9-1 $B=0.4$ [Tesla] $E=30$ [V]の時
(a)速度(b)温度(c)電流方向

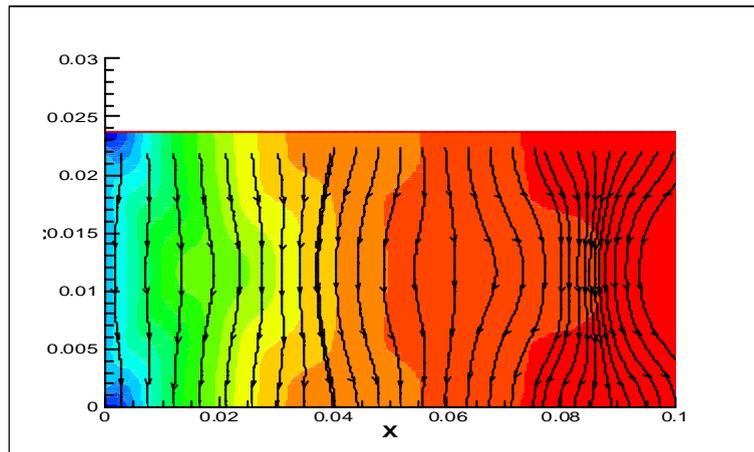
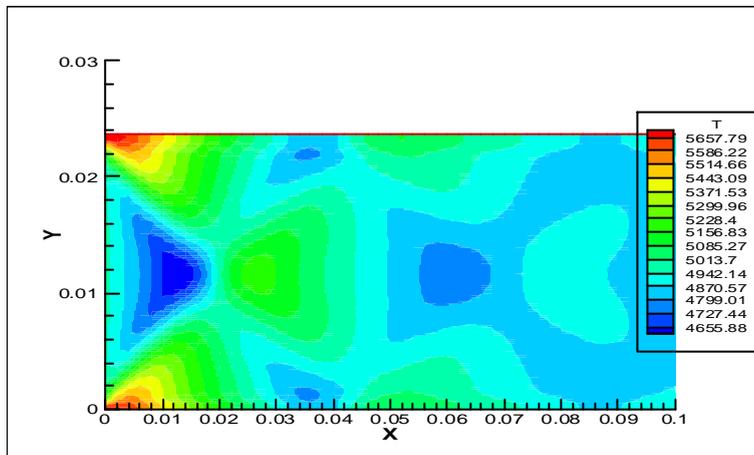
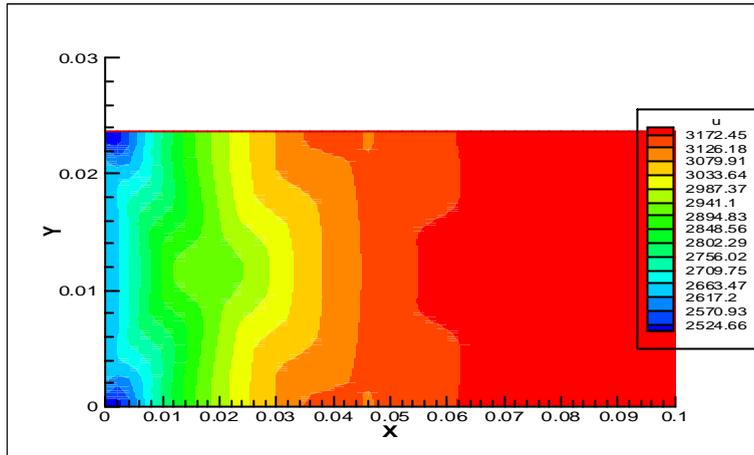


図 6.9-2 $B=0.4$ [Tesla] $E=30$ [V]の時
 (a)速度(b)温度(c)電流方向

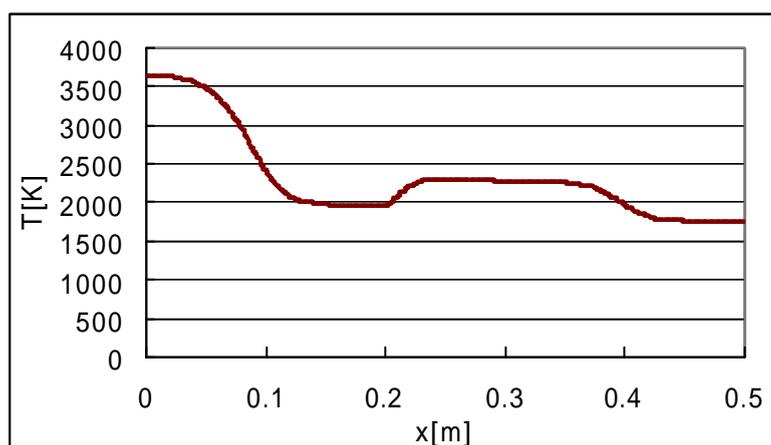
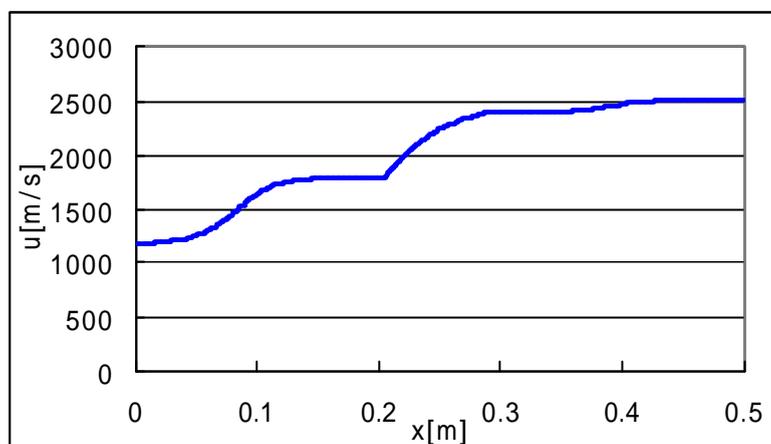


図 6.9-3 B=0.4[Tesla] E=30[V]の時(一次元一温度モデル)
(a)速度(b)温度

第7章 結論及びこれからの課題

7.1 結論

- 簡易計算から MHD 加速器成立のために必要な条件(超音速、負荷率 K に制限)があることがわかった
- MHD 加速器の内部の流体場を 1 温度モデル、2 温度モデル(各種モデル)で解析した。それにより、
 - 1 温度モデルの計算により MHD 加速器が成立に必要な条件(電磁場)があることを再確認した
 - 2 温度モデルにおいては、電子のエネルギー式の取り扱いが難しく、弾性衝突だけのモデルでは電子温度が上がりすぎている可能性があることを考え、化学反応、熱伝導、電子-電子励起エネルギーの各種モデルの効果を考察した。
 - 化学反応、熱伝導は本研究の条件においては、あまり効果はないということがわかった。
 - 電子-電子励起エネルギーモデルでは電子温度がほとんど変化しないという結果が得られ、重粒子と電子との間でジュール加熱を受ける割合をモデル化しなければならないことがわかった。
 - 2 次元計算により、入り口条件で並行流が流れて来た場合は、全く 1 次元と変わらないことを確認した。
 - 入り口条件で並行でない気流が入力された場合の変化は、急加速の MHD 加速器の場合は MHD 加速器入り口付近で影響がみられなくなるが、なだらかな加速の場合の MHD 加速器の場合は後方まで影響が続く。しかし、この影響は小さく、かなり並行流になっていることがわかった。

7.2 これからの課題

- 計算条件として大きく性能、特性に影響を与えた電気伝導度の見積もりを正しくすることで、計算はより正確になるものと考えられ、そこは改善点であろう
- 電離度の変化(アルゴンの電気伝導度の場合、電離度 $\alpha \approx 10^{-4}$ 付近であろうか)によってモデルが変化するため、特性が変わっている可能性がある。その辺りの物理的な現象のモデル化そのものを研究する必要があるだろう
- 流速が急激に変化する境界層の問題が MHD 加速器の性能に大きく関わってくるものと思われるため多次元性の研究は不可欠である
- 生成項の影響が強く、計算上不安定になりやすく陰解法で解く必要がある

- 電子-電子励起エネルギーモデルと自由電子にジュール加熱を一旦すべて受け持たせるモデルでは結果がかなり異なっており、どちらがより現象を捉え、正確であるか、ということを議論しなければならない。また、両方とも実際の現象を捉えられないモデルであるならば、ジュール加熱の受け取る比率をモデル化するなどの検討を行う必要がある。
- より詳細を記述できる気体モデルの構築と妥当性の検討を行う必要がある。
- 本研究ではテストモデルを検討したわけだが、実用化を目指して実証試験を行う必要がある。

Appendix A プラズマの諸特性量^[13]

1. (電子)平均自由行程

電子が気体分子と衝突してから次の衝突を行うまでに空間を飛行する距離が電子の自由行程である。確率過程であるので自由行程は一定ではないが、その平均した量を平均自由行程と呼ぶ。粒子間(中性粒子)の相互作用は分子の大きさより離れると相互作用の力が急激に減少し、ほぼ剛体的に考えることができたのに対し、電子-電子、イオン-イオン、電子-イオンのように荷電粒子間の衝突は現象が大きく異なる。

$$l_e = \frac{1}{sn} \quad (\text{A.1})$$

s は衝突断面積、 n は電子の数密度である。

2. ラーマー半径

荷電粒子は磁場中でローレンツ力を受ける。この求心力により磁力線を中心とした回転運動が現れる。図 A-1 に示すように、磁力線に垂直な平面内で速さ v の電子を考える。遠心力とローレンツ力の平衡の式は、

$$m_e \frac{v^2}{r} = evB \quad (\text{A.2})$$

である。これより、円軌道の半径 r は、

$$r = \frac{m_e v}{eB} \quad (\text{A.3})$$

となり、この半径をラーマー半径と呼ぶ。磁場が強いほど、速さが小さいほどラーマー半径は小さくなる。電子では磁力線に対して右回りの円運動となることに注意する。回転の角速度は、

$$\omega_{ce} = \frac{v}{r} = \frac{eB}{m_e} \quad (\text{A.4})$$

となり、これがサイクロトロン角周波数と呼ばれるものである。これを用いて、

$$r_{ce} = \frac{v}{\omega_{ce}} \quad (\text{A.5})$$

とも書かれる。

正の電荷を持つイオンについても同様にサイクロトロン周波数、ラーマー半径が定義でき、イオンの回転方向は電子と逆で、磁力線に対して左回りであることに注意する。

電気的中性

プラズマの重要な性質の一つに電気的中性性がある。プラズマは定義からも分るように、少なくとも1種の荷電粒子は運動し得る状況にあり、さらにこれが荷電粒子であれば当然電気的性質を帯びているので本来電気的に中性ではない。にもかかわらず中性性があるというところが逆にその性質を特徴付けているわけである。

それゆえプラズマの電気的中性性という概念には二つの種類の概念が要求される。一つは電気的性質を帯びているものが集団として見たときその電気的性格を外部に発揮しないような意味で、一定体積以上のマクロな大きさにおける中性性である。もう一つは、それでも運動し得る荷電粒子は、中性性を保つために空間的配置を変更することによって一定時間以下の短い時間では中性性から破れているおり、中性性という概念は一定時間以上のマクロな時間において使われなければならないというものである。デバイの遮蔽距離が下限を決める空間距離であり、この距離を越えたマクロな空間においてプラズマは中性である（空間的中性性）。また、プラズマは、プラズマ振動の1周期を下限時間としてそれ以上のマクロな時間間隔において中性性を有しているということが出来る（時間的中性性）。以下でその特徴付けをする値を見ていく。

3. デバイ長

プラズマを構成する荷電粒子間には、クーロン力が作用する。電荷 q_0 の粒子が、距離 r の位置に作るクーロンポテンシャル $f(r)$ は、真空中であれば、

$$f(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{A.6})$$

である。すなわち、距離に反比例してゆっくりとしか減衰しないので、例えば指数関数的に減衰よりも遠くまで影響を及ぼす。これは、中性粒子間の衝突が剛体球モデルで表されるのとは、大きくことなる。

ここで、多くの荷電粒子が同時に相互作用をしている状況の下で、長距離力であるクーロン力がそのままお互いの相互作用を規定しているのだろうか。基本はそうであるが、集団的振る舞いが遠くへの影響を变形していく様を見てみる。

今、空間を自由に動き得る温度 T の電子群、そして一様に分布して電子の負電荷を全体として中性化している、動かない正イオンで構成されるプラズマの中に、固定された正のテスト・イオンを置く。電子がボルツマンの式、

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{e_j f}{kT_j}\right) \quad (\text{A.7})$$

によってポテンシャル場に応じて分布しているとする。つまり、時間変化の際に現れる電子の慣性がここで考えている定常状態では関係ないとする。テスト・イオンのまわりの電

位 f は次のポアソンの式を解いて得られる。

$$\mathbf{e}_0 \nabla^2 \mathbf{f} = -Ze d(\mathbf{r}) + en \left\{ \exp\left(\frac{e\mathbf{f}}{kT}\right) - 1 \right\} \quad (\text{A.8})$$

ここで、右辺第一項は $\mathbf{r}=0$ に局在するテスト・イオンの電荷を三次元のデルタ関数で表している。デルタ関数は、

$$\int d(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1 \quad (\text{A.9})$$

のように体積積分すると 1 になる超関数である。(A.8)式の右辺第二項は電位分布の存在による、電子密度の平均値からのずれである。ここで、温度([eV])よりポテンシャルが小さい、やや離れた領域では、指数関数部分をテーラー展開することが許される、つまり、

$$\exp\left(\frac{e\mathbf{f}}{kT}\right) \approx 1 + \frac{e\mathbf{f}}{kT} \quad (\text{A.10})$$

を用いると、式(A.8)は、

$$\nabla^2 \mathbf{f} - k_D^2 \mathbf{f} = -\frac{Ze d(\mathbf{r})}{e} \quad (\text{A.11})$$

となる。ここで k_D は次に定義するデバイ長 l_D の逆数で、デバイ波長と呼ばれる。

$$l_D = \left(\frac{\mathbf{e}_0 kT}{ne^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.12})$$

(A.11)式は解析的に解け、その中で $r \rightarrow \infty$ で $\mathbf{f} \rightarrow 0$ を満たす解は、

$$\mathbf{f}(r) = \frac{Ze}{4\pi \mathbf{e}_0 r} \exp\left(-\frac{r}{l_D}\right) \quad (\text{A.13})$$

である。これは遮蔽された電位分布を表し、図.A-2 に Ze を電子すなわち

$$Ze = -e \quad (\text{A.14})$$

とした場合の遮蔽されていない状態のクーロン電位分布と遮蔽されたポテンシャルを比較している。(A.13)式によると、テスト・イオンよりデバイ長以上離れると、電位は著しく小さくなり、テスト・イオンに基づく電場は l_D 以上の距離には事実上及ばないことを表している。逆に、テスト・イオンの周囲には平均値より多くの電子が存在し、これにより、イオンの正電荷を遮蔽してしまうことになる。これがデバイ遮蔽である。

また、デバイ長より短い空間スケールではプラズマの中性は破られるが、デバイ長より大きな空間スケールではプラズマは正の電荷と負の電荷がほぼ等量存在し、準中性を保つ傾向にある。

4. プラズマ振動数

プラズマ固有の荷電粒子の縦振動の固有振動数であり、電子プラズマ振動が典型的なも

のである。この電子プラズマ振動について説明する。

図 A-3 に示すように、巨視的に見て電気的中性を保っている無限大の大きさの電子数密度 n_{e0} のプラズマ中で、 D の間隔の並行平面 $A-A'$ 、 $B-B'$ で挟まれた空間を考える。簡単のために軽い電子群のみが移動可能とする。何らかの要因で、この局所空間内の電子群が全体として右方向に dx だけ移動したとする。すると、図 A-3 に示すように分極を起こす。これによって、電場 E が誘起される。ここで、この分極の要因が取り除かれたとすると、電子は自分自身が作った電場 E により左に移動し、元の中性状態に戻ろうとする。しかしながら、電子群は質量を持つので慣性により、今度は図 A-3 とは逆方向の分極が起こることになる。この繰り返しで電子群は左右に振動し続ける。この振動を電子プラズマ振動と呼び、この固有振動数をプラズマ周波数という。

断面積が単位面積で、並行平面 $A-A'$ 、 $B-B'$ に垂直な筒の振動を考える。この筒に含まれる両端の電荷層の全電荷 s は、

$$s = en_e dx \quad (\text{A.15})$$

であり、これによって生じる図中の電場 E の大きさは、

$$E = \frac{s}{\epsilon_0} = \frac{en_e dx}{\epsilon_0} \quad (\text{A.16})$$

と書ける。筒内の電子群の運動方程式を考えると、

$$m_e n_e Dd\ddot{x} = -en_e DE \quad (\text{A.17})$$

(A.16)、(A.17)式から、

$$d\ddot{x} + w_{pe} dx = 0 \quad (\text{A.18})$$

ここで、

$$w_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}} \quad (\text{A.19})$$

である。固有振動数 w_{pe} の単振動である。よってプラズマ振動数は

$$f_{pe} = \frac{w_{pe}}{2\pi} \quad (\text{A.20})$$

と書ける。

電気的中性性の保持の為に小刻みに中性性を破りながらプラズマは時間の大域的な範囲において中性性を確保している。このため、プラズマの電気的中性性は時間領域ではプラズマ振動周期より十分長い時間の中で実現されているのであって、それより短い時間では中性性は常に破られていることになる。空間的にデバイ長より長い距離において中性であってそれより短い空間内ではこれが保たれていないのと一対を成すわけである。

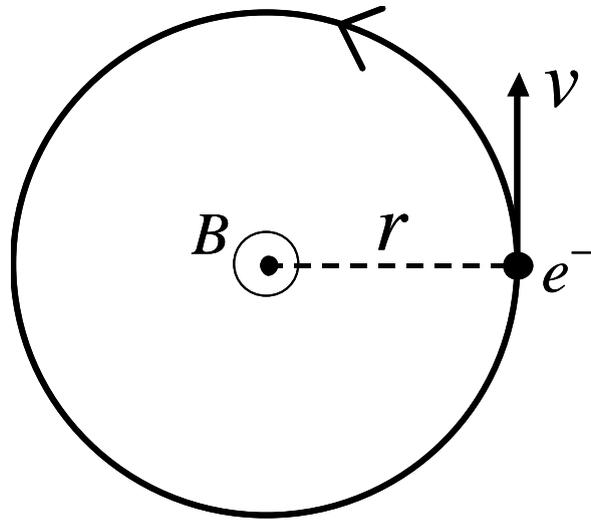


図.A-1 電子のサイクロトロン運動

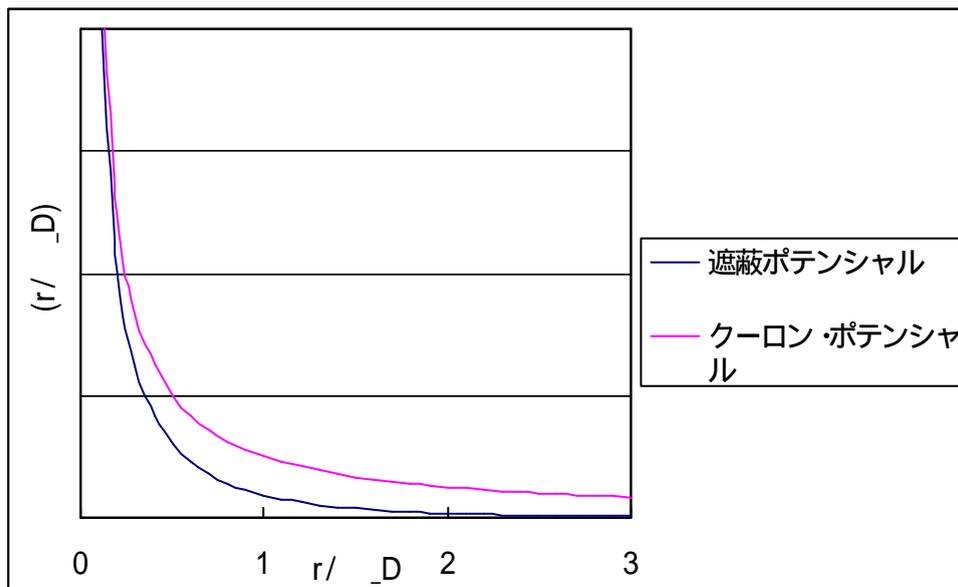


図.A-2 テスト・イオン周りの電位分布

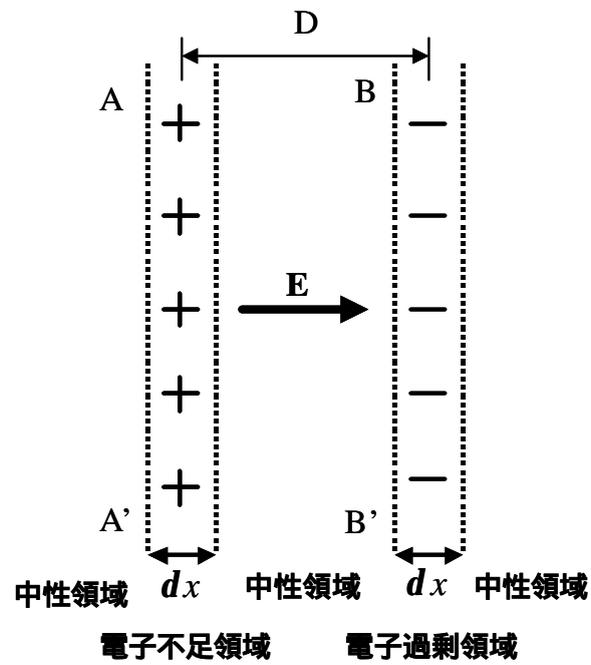


図.A-3 電子プラズマ振動の概念

参考文献

- [1]Sergey O.Macheret ,Richard B.Miles, and Gordon L.Nelson, “Feasibility Study of A Hybrid MHD/Radiatively Driven Facility for Hypersonic Ground Testing”, Paper AIAA 97-2429
- [2]R.A.Crawford,J.N.Chapman and R.P.Rhodes , “ Performance Potential and Technology Issues of MHD Augmented Hypersonic Simulation Facilities” AIAA Paper 90-1380,1990
- [3]R.A.Crawford ,R.P.Rhodes,”Hypersonic Propulsion Simulation Capability Utilizing MHD Augmented Arc-Heater Flow”,AIAA Paper 90-2505
- [4]V.A.Bityurin,J.T.Lineberry and V.G.Potebnia,”Assessment of Hypersonic MHD Concepts”,AIAA Paper 97-2393
- [5]Prasanta Deb and Ramesh K.Agarwal, “A Performance Study of MHD-Bypass Scramjet Inlets with Chemical Nonequilibrium” AIAA Paper 2001-2872,2001
- [6]U.B. Mehta D.W. Bogdanoff and C.Park”MHD Energy Bypass Engine:A Progress Report” NASA JPL/MSFC Twelfth Advanced SpacePropulsion Research Workshop, April 3-5, 2001
- [7]橘佳宏,”誘導結合プラズマトーチ内流れ場のモデル化とその数値解析”東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻 2003 年度修士論文
- [8]Cambell, A. B., “Plasma Physic,” NASA TM-101088, Feb. 1989
- [9]Yu.P.Golovachov, Yu.A.Kurakin, ”Numerical Investigation of Non-Equilibrium MGD Flows in Supersonic Intakes”,AIAA Paper 2001-2883
- [10]K.A.Hoffmann,H.M.Damevin and J.F.Dietiker, ”Numerical Simulation of Hypersonic Magnetohydrodynamic Flows”,AIAA Paper 2000-2259
- [11]Volkov Yu.M.,Zinov’ev O.A., Maluta D.D.”Mesurement of the diffusion cross-sections of low-energy electrons in rare gases using the microwave technique”,Teplofizika Vysokikh Temp.,1968,Vol6,No.2,P.209-218.
- [12]藤井孝蔵,「流体力学の数値計算法」,東京大学出版会(1995)
- [13]Yee, H. C., “A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods,” NASA TM-101088, Feb. 1989
- [14]高村秀一,「プラズマ理工学入門」,森北出版(1997)
- [15]R.K.Prabhu,W.D.Erickson, ”A Rapid Method for the Computation of Equilibrium Chemical Composition of Air to 15000K”,NASA TP 2792,1988
- [16]久保田弘敏,鈴木宏二郎,綿貫忠晴,「宇宙飛行体の熱気体力学」,東京大学出版会(2002)

謝辞

本論文を作成するにあたり、お世話になった方々へここで謝辞を述べたいと思います。

テーマの選定、研究、論文、発表までその構成や進め方、疑問点及び解決方法などについて適切にアドバイスを頂き、計算が不慣れな私に根気強く助力頂きました鈴木宏二郎助教授に感謝の意を表したいと思います。

そして、研究室の先輩であります橋佳宏さんには、計算条件や色々な条件設定、モデル化などで参考にさせて頂きました。感謝いたします。

また、困っている時に相談に乗っていただいた院生の方々、同輩の修士2年生達もどうもありがとうございました。

綿貫忠晴助手にはいろいろとお世話をしていただきました。どうもありがとうございました。

数多く頂いた御指導、御助言を生かしきれないとは思いますが、これから生かしていきたいと思います。本当にどうもありがとうございました。

学会発表

衣本啓介「高エンタルピー風洞における MHD 加速利用に関する数値解析」,宇宙航行の力学シンポジウム 2005